MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Számítástechnikai Központja

TÁJÉKOZTATÓ

9

BUDAPEST, 1963
DECEMBER

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Számítástechnikai Központja

TÁJÉKOZTATÓ

9

BUDAPEST, 1963
DECEMBER

E szám munkatársai:

Dömölki Bálint, az MTA Számitástechnikai Központ tudományos munkatársa

Frey Tamás kandidátus, az MTA SzK mb. igazgatója

Grätzer György kandidátus, az MTA SzK külső munkatársa

Kiefer Ferenc, az MTA SzK tudományos munkatársa

Kiss Imre, az MTA SzK tudományos munkatársa

Kornai János kandidátus, az MTA SzK tudományos főmunkatársa

Németh Pál, az MTA SzK tudományos munkatársa

Révész György, az MTA SzK tudományos munkatársa

Tóth Imre, az MTA SzK tudományos munkatársa

Varga Dénes, az MTA SzK tudományos segédmunkatársa

Varga László, az MTA SzK külső munkatársa

A szerkesztés munkáját végezte:

Dancs István és
Szelezsán János

Sajtó alá rendezte:

Kanics Lászlóné

Felelős kiadó:

Frey Tamás

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR MÜSZÁLGYÁRTÁS TÁVLATI FEJLESZTÉSÉNEK MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSA

Frey Tamás - Kornai János

A vizsgálat feladata egy uj, most kibontakozó magyar iparág, a müszálipar legkedvezőbb strukturájának meghatározása. A program az 1975 évi termelés, export és import összetételét adja meg. A korlátozó feltételek lineárisak; közgazdasági tartalmuk: a hazai szükségletek, a végtermékek és az anyagok közötti technológiai arányosságok, a beruházási erőforrasok korlátai, piaci korlátok. A minimalizálandó célfüggvény konkáv: figyelembe vesszük azt a tényt, hogy nagyobb üzem relativ megtakaritásokkal jár. Tekintettel a konkáv minimalizálási feladat ismert nehézségeire, meg kellett elégedni az egzakt megoldás elfogadható megközelitésével. Az adatok egy részének bizonytalansága miatt kiegészitő sztochasztikus számitásokat végeztünk.

A Magyar Tudományos Akadémia Számitástechnikai Központja a Nehézipari Minisztérium megbizásából számitásokat végzett a magyar müszálipar 1965-75 évi távlati fejlesztési tervének meghatározására. A kutatást egy kollektiva végezte, amelyben résztvettek elméleti és gyakorlati közgazdászok, matematikusok és számitástechnikusok, vegyipari tervező mérnökök és külkereskedelmi szakértők.[x/]

A többéves kutatás eredményeit részletes zárójelentés foglalja össze, ebben a rövid ismertetésben csupán a legfontosabb feladatokat irjuk le. A cikk első részében a modellt jellemezzük és a számitási metodika közgazdasági vonásait irjuk le, a második részben pedig az elektronikus gépen végzett számitások matematikai és számitástechnikai problémáival foglalkozunk.

x/ A kutatást Kornai János irányitotta. Az adatgyüjtést Verden Ferenc és Tardos Márton, a numerikus számitásokat Frey Tamás vezette. Utóbbi dolgozta ki a konkáv programozásnál felhasznált eljárást. A Számitástechnikai Központ munkatársai közül Hajnal Andrásné és Tarlós Béla vettek részt a munkában; ezenkivül számos külső munkatárs müködött közre.

1. A modell, a számitási metodika.

1.1. A változók és a feltételek.

Összesen 15 féle müszálipari termékkel foglalkoztunk /pl. nylon szál, terilén szál, orlon szál, valamint a szálak gyártásához felhasznált fontosabb anyagok/. Valamennyi termékkel kapcsolatban a következő választási problémák merültek fel:

a/ Hazailag termeljük-e, vagy importáljuk?

b/ Ha hazailag termeljük: kizárólag a hazai szükségletet fedezzük-e, vagy ezen felül termeljünk exportra is?

c/ Hazai termelés esetén milyen technológiával állitsuk elő a terméket?

A modellben összesen 61 változó szerepel; ezek közül 49 gazdasági tevékenységeket - termelési, export és import tevékenységeket - reprezentál, a többi maradékváltozó.

A program az 1975 évi termelési, export- és import struktúrát irja elő, azaz a távlati tervidőszak végére elérendő állapotot. Az 1975-re vonatkozó termelési előirányzat magában foglal beruházási döntést is. Amennyiben az optimális program szerint 1975-ben egy 1965-ben még nem gyártott terméket kell előállitani, ugy ez azt jelenti: a közbenső időszakban el kell végezni az ehhez szükséges beruházásokat. Ha pedig az optimális programban nulla értékkel szerepel valamely már meglévő kapacitás üzemeltetését reprezentáló tevékenység, ugy ez a meglévő kapacitás leszerelését jelenti.

A programnak 26 feltételből álló lineáris feltételrendszert kell kielégitenie. A feltételek fő csoportjai:

1. Termékmérlegek /Hazai termelés + import = export + hazai szükséglet/. A hazai szükségletet ismertnek tételezzük fel.

2. A meglévő kapacitások korlátai.

3. A beruházási erőforrások korlátai.

4. Anyagellátási korlátok.

5. Export piaci korlátok.

1.2. A célfüggvény.

Az optimalizálási feladat: az 1975 évi kalkulativ költségek minimalizálása. A célfüggvény alakja:

$$f\,/\underline{x}/ = \sum_{i=1}^{34}\left[P_i\left(\frac{x_i}{X_{oi}}\right)^{\delta_i} + R_i\left(\frac{x_i}{X_{oi}}\right)^{\gamma_i} + s_i x_i\right] + \sum_{i=35}^{49} t_i x_i,$$

ahol

x_i = az i-edik változó értéke.

X_{oi} = az i-edik termelési változó feltételezett üzemnagysága. Ezzel az üzemnagysággal számoltak a tervezőmérnökök a müszaki költségadatok meghatározásánál.

A termelési változók száma 34.

P_i = a beruházási költségek után számitott évi kamatteher, X_{oi} feltételezett kapacitás esetén.

R_i = évi bérköltség, X_{oi} feltételezett kapacitás esetén.

δ_i, γ_i = degressziós kitevők. Nagyságuk 0 és 1 között van. /A beruházási költségek kitevője többnyire 0,6-0,7 között van; a bérköltségeké 0,2-0,6 között/

s_i = az egy kapacitásegységre eső anyagköltség,

t_i = az importár, illetve negativ előjellel az exportár, a külkereskedelmi tevékenységeknél /i=35,...,49/.

Közismert, hogy a nagyüzem, a tömegtermelés jelentős gazdasági előnyökkel jár. Különösen erősen érvényesül ez a vegyiparban. Ezt vesszük figyelembe azáltal, hogy a költségek két leginkább degressziv elemét, a beruházási költségeket /illetve ezek kamatterhét/ és a bérköltségeket konkáv költségfüggvényként határoztuk meg. Ugyanakkor elfogadható egyszerüsités a termelésben felmerülő anyagköltségek, valamint a külkereskedelmi kiadások és bevételek linearitásának feltevése.

A költségfüggvénynek ez a konkáv jellege számos nehézséget okozott a feladat számitástechnikai megoldásánál; vizsgálatunkban meg kellett elégednünk egy közelitő eljárás alkalmazásával, amelyet a cikk második része ir le. Ennek ellenére kitartottunk a konkáv költségfüggvény mellett, mert a költségdegresszió elhanyagolása közgazdasági szempontból torzitotta volna a számitás eredményeit. Ellenőrzésképpen a következő számitást végeztük:

Célfüggvényünket "linearizáltuk", majd meghatároztuk az igy nyert lineáris programozási feladat exakt megoldását. Ezekután az optimális lineáris programra kiszámitottuk az eredeti konkáv célfüggvény értékét, s ezt összehasonlitottuk a nem-lineáris programozás során nyert legkedvezőbb célfüggvényértékekkel. A következők derültek ki.

1. A lineáris programozással nyert optimális program költsége kb. 3 %-kal magasabb, mint a közelitő nem-lineáris programozással nyert legkedvezőbb programé. A közgazdaságilag durvább egyszerüsitő feltevésen alapuló, de matematikailag exaktabb eljárás eredménye távolabb marad a tényleges közgazdasági optimumtól, mint a matematikailag nem-exakt, közelitő jellegü, de közgazdaságilag pontosabb feltevésen alapuló eljárás.

2. A lineáris modellel nyert program egyik jellegezetessége, hogy szétaprózottabb, mint a nem-lineáris célfüggvénnyel kapott program. Pl. mindkettő előirja nylon 6 selyem termelését, hazai szükségletre és exportra. A nem-lineáris modellel nyert program szerint ezt egyféle technológiával kell nyerni, mig a lineáris modellel nyert program szerint egyrészét "A", másik részét "B" technológiával.

Vagy egy másik példa: a nem-lineáris modellel nyert program szerint a régi viszkózkapacitást teljes egészében celofángyártásra kell koncentrálni, mig a másik, a lineáris modell szerinti program a félkésztermék-kapacitást megosztja a celofán és a viszkózselyem termelése között. A két példa jól mutatja: a konkáv költségfüggvény sokkal erőteljesebben ösztönöz a termelés koncentrációjára.

A költségfüggvényben szereplő kitevőket az amerikai és nyugatnémet petrokémiai szakirodalomban szereplő hasonló tipusu költségfüggvényekből vettük. Ott ezeket az adatokat sok száz üzem statisztikai megfigyelésére alapozták.
Célszerü lesz a jövőben ehelyett más módszert alkalmazni az adatok meghatározására. A magyar adottságoknak megfelelően a tervezőmérnökökkel ki kell dolgoztatni ugyanannak az üzemnek a költségadatait többféle üzemnagyságra. Ebből kell levezetni a költségfüggvény paramétereit.

Érdemes még megemliteni a költségfüggvény néhány más jellegzetes vonását:

1. Olyan kalkulativ költségeket számoltunk, amelyek nem a számitás idején fennálló 1962 évi állapotot, hanem a várható 1975 évi állapotot tükrözik. Széleskörü piackutatás és adatgyüjtés alapján előrebecsléseket dolgoztunk ki a várható export és importárakra. Hasonlóképpen nem a jelenlegi, hanem a jövőbeni bérekkel számolunk.

2. A hivatalos metodikától eltérő nagyságu kalkulativ kamatlábbal és kalkulativ devizaárfolyammal számoltunk: 10 %-os kamatlábbal, 60 Ft-os dollárárfolyammal. /Emellett a dollárárfolyammal paraméteres programozást végeztünk, amelyben a 30 és 70 Ft közötti intervallumon futtattuk végig a dollárárfolyamot./ Egy-egy programozáson belul szigoruan egységes devizaárfolyammal szá-

x/ A 2.1. szakaszban ezt a paraméteres programozási feladatot irjuk le.

moltunk minden exportbevételt és importkiadást, a müszálak, az anyagok és a gépek importját egyaránt.

3. Különféle módszerekkel /többek között a népgazdasági ágazati kapcsolati mérleg segitségével/ figyelembe vesszük a müszálipari beruházásokkal együttjáró, más ágazatokban jelentkező un. kapcsolódó /indirekt/ beruházásokat is. Viszont a hazai anyagokat nem termelői áron, hanem tisztajövedelemmentes reálköltséggel vesszük számba.

1.3. A bizonytalan adatok kezelése.

A hosszulejáratu számitásokban felhasznált adatok jelentős része szükségképpen bizonytalan. Különösen igy van ez a müszáliparban, amelyben ezekben az években rendkivül gyors optikai fejlődés ment végbe. A bizonytalanságok tudatában eleve azt kértük a kutatásban közremüködő szakértőktől: a bizonytalan müszaki, költség- és külkereskedelmi adatokat "-tól-ig" formában adják meg, azaz egyetlen szám helyett egy intervallumot közöljenek becslésként. A becslésnek ez az egyszerü formája közel áll a gazdasági gyakorlat szokásos szemléletéhez. A "-tól-ig" becsléseket kétféle formában használtuk fel.

A/ Rögzitett üzemnagyságok mellett meghatároztuk egy- egy tevékenység kalkulativ nyereséghanyadát. Az alternativákat a mutatószám szerint rangsoroltuk. Kétféle rangsort készitettünk: 1. "Pesszimista" rangsort. Itt a "-tól-ig" becslések pesszimista határértékét vettük alapul, vagyis költségadatoknál a magasabb, bevételi adatokkal az alacsonyabb értéket. 2. "Optimista" rangsor. Itt a "-tól-ig" becslések pesszimista határértékével számoltunk.

E kétféle rangsorolás módot adott bizonyos következtetésekre. Pl. meghatározhattuk; melyek azok az alternativák, amelyek még pesszimista esetben is jobbak, mint más alternativák optimista esetben. Az előbbiek dominálják az utóbbiakat. Vagy: melyek azok az alternativák, amelyek pesszimista esetben is nyereségesek, illetve optimista esetben is veszteségesek. Az ilyen fajta elemzések módot adnak bizonyos szelekcióra: egyes alternativák preferálására, mások határozott elvetésére.

B/ A "-tól-ig" becsléseket normális eloszlásu valószinüségi változóként fogtuk fel.[x/] Feltételeztük: 98 % a valószinüsége annak, hogy az adat "-tól-ig" tartományon belül marad. Ez, benyomásunk szerint, megfelelően tükrözi a becslést végző szakértők tényleges felfogását saját becsléseikről. A szakértők maguk sem állitják, hogy teljesen lehetetlen a "-tól-ig" tartomány tullépése; csupán azt gondolják: ennek valószinüsége igen kicsi. Valószinübbnek tartják a középérték, illetve az ahhoz közel eső érték bekövetkezését, mint a két szélső értékét. Mivel becsléseik tárgyilagosak, egyformán valószinünek tartják a középérték tullépését és az attól való elmaradást.

Feltételeztük továbbá, hogy a valószinüségi változók függetlenek egymástól; kivéve egyeseket - a világpiaci árakat - amelyek között korreláció van. Pl. korreláció van az egymást helyettesitő termékek ára között az anyag és belőle készült termék ára között stb.

Ilymódon egy stochasztikus célfüggvényhez jutottunk. Számitásainkban ezt a stochasztikus költségfüggvényt annak P biztonsági Q_p ($\underline{\underline{x}}$) kvantilisével pótoltuk.

$$Q_P (\underline{\underline{x}}) = C (\underline{\underline{x}}) + \vartheta_P \sigma (\underline{\underline{x}}),$$

ahol

Q_P = a sztochasztikus költségfüggvény kvantilise, P biztonsági szint mellett.

C ($\underline{\underline{x}}$)= a költségfüggvény középértéke.

ϑ_P = a biztonsági faktor. /$\vartheta_P = \Phi^{-1}$ (P), a standard normális eloszlás P-kvantilise./

---

x/ A müszálipari programozásnál felhasznált sztochasztikus modellt a kutatás első szakaszában Kornai János és Lipták Tamás dolgozta ki; a sztochasztikus számitások elvégzésében Wellisch Péter müködött közre.

$\sigma(\underline{\underline{x}})$ = a sztochasztikus költségfüggvény szórása.

A P biztonsági szint /s ezzel együtt a ϑ_P biztonsági faktor/ a gazdaságpolitika biztonsági proferenciáit fejezi ki; a gazdasági vezetés magatartását a beruházási döntésben rejlő kockázattal szemben.

$\vartheta_P \sigma(\underline{\underline{x}})$-et bizonytalansági pönáléként foghatjuk fel, amely a középértékhez hozzáadódik. Ez a pönálé annél nagyobb, 1. minél nagyobb P, azaz minél magasabb a gazdasági vezetés biztonsági követelménye és 2. minél nagyobb σ, azaz minél bizonytalanabbak az adatok.

E költségfüggvény tipus tul nehézkes ahhoz, hogy - jelenlegi adottságaink mellett - vállalkozhattunk volna a programozási feladat megoldására. Ehelyett megelégedtünk azzal, hogy 10 előre rögzitett megengedett programra meghatároztuk e költségfüggvény értékét különböző biztonsági szintek mellett, az igy kapott eredményeket hasonlitottuk össze. Mivel azonban ezt a 10 programot ugy határoztuk meg, hogy azok jellegzetes gazdaságpolitikai irányzatokat reprezentáljanak /pl. tiszta import, tiszta önellátás, extrém módon elért koncentráció stb./, a puszta összehasonlitás is számos érdekes tanulsággal szolgált. Módot adott pl. egyes programok, ezen keresztül bizonyos gazdaságpolitikai irányzatok határozott támogatására, mások határozott elvetésére.

1.4. A számitás gyakorlati eredményei.

Gyakorlati következtetéseink:

1. A hazai müszálipar fejlesztése célszerü, gazdaságos. Érdemes a hivatalos tervjavaslatokban eredetileg erre szánt beruházási keretet erre a területre forditani.

2. Nem szabad törekedni autarkiás irányzatra, a sokoldalu hazai szükségletek hasonlóan sokoldalu /s ezért szétaprózott/ hazai termeléssel való kielégitésére. Messzemenően ki kell használni a nemzetközi munkamegosztással, a külkereskedelemmel járó

előnyöket. Tehát aránylag kevésféle /lehetőség a hivatalos tervjavaslatok előirányzatainál is kevesebbféle/ terméket kell gyártani, de nagyobb mennyiségben, exportálva a felesleget és importálva a nem termelt cikkeket.

3. Nem a viszkóz, hanem a szintétikus szálak gyártását kell előtérbe helyezni. A meglévő viszkózgyári félkésztermékelőállitó kapacitást teljes egészében a celofángyártás szolgálatába kell állitani.

4. Nem egyetlen számitást, hanem egész számitássorozatot végeztünk. Ezek során egyes alternativák megitélése szilárdnak /szilárdan jónak, vagy szilárdan rossznak/ mutatkozott. Ezekkel kapcsolatban határozottan állást foglalhattunk, ami támpontot adhat a gazdasági vezetésnek a döntéshez. Meg kell azonban emliteni: maradtak olyan alternativák is, amelyekkel kapcsolatban nem vonhattunk le ilyen egyértelmü következtetéseket, ezek gazdaságosságát tovább kell vizsgálni.

5. A számitás során összesen 15-féle programot határoztunk meg. A legkedvezőbb ezek közül - kalkulativ költségfüggvényünkkel számolva - kb. 12 %-os megtakaritást mutat ki a hagyományos módszerekkel számitott eredeti tervjavaslathoz képest. Ez a megtakaritás kereken évi 800 millió Ft. Ha ennek a megtakaritásnak csupán 10 %-a realizálható, akkor is egyetlen nap alatt megtérül matematikai programozási vizsgálatunk egész költsége.

2. A konkáv programozási feladat megoldásának megközelitése

2.1. A probléma matematikai jellemzése

A müszálipari vizsgálat paraméteres optimalizálási feladatának értelmezési tartományát az

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}} \; ; \; \underline{\underline{x}} \geq \underline{\underline{0}}$$

lineáris mellékfelvételrendszert kielégitő és igy egy konvex poliédert kijelölő $\underline{\underline{x}}$ oszlopvektorok halmaza alkotja, a célfüggvény

$$f/\underline{\underline{x}}/ = \underline{\underline{c}}^*.\underline{\underline{x}} + \sum_i d_i x_i^{\delta_i} + \sum_i g_i x_i^{\gamma_i} + \lambda/\underline{\underline{h}}^*.\underline{\underline{x}} + \sum_i j_i . x_i^{\delta_i}/ = \min$$

alaku - aholis λ adott tartományban folyamatosan változó paraméter, /közgazdaságilag: a dollárárfolyam/ a $/d_i/$, $/g_i/$, $/j_i/$, $/\delta_i^*/$ és $/\gamma_i^*/$ sorvektorok pedig nem negativak és mindegyik exponens kisebb egynél. Tekintettel arra, hogy a λ paraméter szóbajövő értéktartománya kielégiti a $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ feltételt, a $\underline{\underline{c}}^*$ és $\underline{\underline{b}}^*$ sorvektoroknak pedig van pozitiv komponense, ezért az $\underline{\underline{x}} \geqslant \underline{\underline{0}}$, feltétel következtében az értelmezési tartományt kijelölő konvex poliéder felületén /sőt, a belsejében is/ teljesül a grad $f \neq \underline{\underline{0}}^*$ reláció. Emellett az értelmezési tartományba eső $\underline{\underline{x}}_1$ és $\underline{\underline{x}}_2$ vektorokat összekötő

$$\underline{\underline{x}}/t/ = \underline{\underline{x}}_1 + t\,/\underline{\underline{x}}_2 - \underline{\underline{x}}_1/$$

egyenesnek a $0 \leq t \leq 1$ szakaszát tekintve rögzitett λ - paraméter mellett, azonnal belátható, hogy amennyiben van olyan t_o, ahol a

$$\text{grad } f \,.\, /\underline{\underline{x}}_2 - \underline{\underline{x}}_1/ = 0$$

feltétel teljesül és itt az $f\,[\underline{\underline{x}}/t/]$ függvénynek lokális extrémuma van, akkor az csak lokális maximum lehet. Valóban

$$\frac{d^2 f[\underline{\underline{x}}/t/]}{dt^2} = -\sum_i^* d_i \delta_i/1-\delta_i/ \frac{/x_{2i}-x_{1i}/^2}{[x_{1i}+t/x_{2i}-x_{1i}/]^{2-\delta_i}} -$$

$$-\sum_i^x g_i \gamma_i/1-\gamma_i/ \frac{/x_{2i} - x_{1i}/^2}{[x_{1i}+t/x_{2i}-x_{1i}/]^{2-\gamma_i}} -$$

$$-\lambda \sum_{i}{}^{x} j_i \delta_i /1-\delta_i/ \frac{(x_{2i}-x_{1i})^2}{\left[x_{1i}+t/x_{2i}-x_{1i}/\right]^{2-\delta_i}}$$

alaku - ahol a summajel feletti csillag arra utal, hogy csak olyan i-kre kell összegezni, amelyekre $x_{2i} - x_{1i} \neq 0$ teljesül. $\frac{d^2f}{dt^2}$ igy feltétlenül negativ minden szóbajövő $0 \leq t_o \leq 1$-re, feltéve, hogy az összeg nem üres. Utóbbi esetben viszont $\underline{\underline{x}}_1$ -nek és $\underline{\underline{x}}_2$ -nek csak olyan rendezői különbözhetnek egymástól, amelyekhez tartozó d_i g_i és j_i rendezők zérussal egyenlők - ekkor pedig, ha van olyan t_o, amelyre grad f . $/\underline{\underline{x}}_2 - \underline{\underline{x}}_1/$, zérus, akkor e skalárszorzat azonosan zérus, és igy $f[\underline{\underline{x}}/t/]$ állandó, az egyenes $[0,1]$ szakaszán. Mindebből következik, hogy amennyiben az $f/\underline{\underline{x}}/$ célfüggvény az értelmezési tartományt alkotó poliéderlapok valamelyikén nem konstans értékü, akkor minimumát valamelyik csucsponton is felveszi. Az optimalizálási feladat megoldásánál elegendő tehát az értelmezési tartományt alkotó konvex poliéder csucspontjait tekinteni.

A fenti vizsgálatból azonban az is látható, hogy előfordulhat az az eset is, hogy az értelmezési tartományt alkotó konvex poliéder csucspontjait tekintve csak, közülük többön is felveszi "szigoru" minimumát a célfüggvény - abban az értelemben, hogy valamennyi szomszédos csucspontban határozottan nagyobb értékü az extremalizálandó függvény - s e "szigoru" minimumok értéke nem azonos. Amennyiben tehát a feladat megoldása céljából a szokásos szimplex eljárást a célfüggvény alakjának megfelelően módositva alkalmazzuk - azaz az értelmezési tartományt alkotó konvex poliéder egyik csucspontjától elindulva egy olyan szomszédos csucspontra térünk át, amelyben a célfüggvény értéke határozottan kisebb - /esetleg a szomszédos csucspontok közül azt is kiválaszthatjuk, amelyben a célfüggvény értéke a lehető legkisebb/ -, akkor az eljárás befejeztével mindenesetre egy, a fenti értelemben lokális minimumot biztositó csucsponthoz jutunk. Nem biztos azonban, hogy megtaláltuk a feladat keresett megoldását. Minthogy azonban minden más ut számitástechnikailag elérhetetlen volt, jelenleg a feladat megoldásánál ezt választottuk, de olyan módositásokkal, amelyek elég plauzibilissá tették, hogy a legjobb "lokális" minimumot sikerült megtalálni.

Az alábbiakban röviden vázoljuk azt a számitástechnikát, amelyet a módositott szimplex eljárás során alkalmaztunk, majd ismertetjük azokat a kiegészitéseket, amelyekkel a talált "lokális" minimum és a keresett megoldás egybeeső voltának plauzibilitását növelni igyekeztünk.

2.2. Az alkalmazott szimplex-technikáról

A pillanatnyi szimplex tábla baloldali része az egységmatrix - amelyet természetesen nem érdemes tárolni a gépi memóriában. A célfüggvény lineáris részében szereplő $\underline{c}^x$ /s ugyanigy a $\underline{b}^x$/ sorvektor rendezőit meghatározott sorszámu rekeszekben, megfelelően normálva, és első hat bitjükben az azonositásukat lehetővé tevő sorszámmal ellátva, abban a mindenkori sorrendben tároljuk, ahogy a szimplextábla oszlopai megkivánják. Igy az egységmatrix-rész oszlopvektoraihoz tartozó indexek a $\underline{c}^x$ sorvektor első rendezőinek sorszámából megállapithatók. A szimplex tábla további oszlopvektorai, sorfolytonosan, egy-egy normálófaktorral együtt vannak tárolva; a tárolt α_{ij} elemekből ill. α_j normálófaktorokból a szimplextábla i-edik sorának és m+j-edik oszlopának /m az egységmátrix dimenziója/ eleme igy számitható:

$$a_{i,j+m} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_j}$$

Egy-egy bázisvektor cseréje után a tárolt oszlopvektorok normálása ugy történik, hogy a maximális abszolut értékü elemet /beleértve az oszlop normálófaktorát is/ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)$-ra normáljuk /$\varepsilon$ a legalacsonyabb helyértéket jelöli/ az oszlop valamennyi elemének végigszorzása révén.

Ezután meghatározzuk, hogy az első, második, stb. - a bázisban benn nem levő - oszlopvektornak a bázisba történő bevonása esetén melyik elemét kell generáló elemnek választani. Ehhez a

$$\min_{i} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} ; \quad \alpha_{ij} > 0$$

ill. az $\alpha_{ij} \beta_i - \alpha_{i^*j} \beta_i > 0; \alpha_{ij} > 0 \quad / i^* = 1;2;\dots;m, \alpha_{i^*j} > 0$

feltételt kielégitő i indexet kell meghatározni /fixpontos gépen, a normálásra tekintettel, utóbbi biztosan számitható/, ahol

$$b_i = \frac{\beta_i}{\beta}$$

a szimplex táblához tartozó csucsponti vektor megfelelő rendezője. i, ill. a_{ij} és β_i ismeretében könnyen számitható tetszőleges célfüggvény esetén utóbbi megváltozása, ha az m+j-edik vektort vonjuk be az i-edik helyett a bázisba. E változás gépi számitása kissé nehézkes, mert fixpontos módszerrel általában nem megy.

Amennyiben a probléma nem tartalmaz paramétert, csak azokat az adatokat tároljuk a memóriában, amelyek olyan báziscserékhez tartoznak, amelyeknél a célfüggvény megváltozása negativ. Ha azonban a probléma paramétert is tartalmaz, minden olyan lehetséges báziscserénél, amelynél a pillanatnyi paraméterérték mellett pozitiv lenne a célfüggvény növekménye, kiszámitjuk a paraméter azon értékét, ahol a növekmény zérus, s közülük azt, amely a jelenlegi paraméterértékhez legközelebb, a változásnak megfelelő irányba és a tekintett intervallumba esik, szintén tároljuk.

Végighaladva ilymódon valamennyi oszlopon megvizsgáljuk, hogy a pillanatnyi paraméterértéknél találtunk-e olyan báziscserét; amely a célfüggvény értékét csökkenti. Ha igen, akkor kiválasztjuk közülük az egyiket /pl. véletlenszerűen, vagy azt, amely a célfüggvény értékét maximálisan csökkenti/. Ha nem, akkor a tekintett szimplextábla közvetlenül szolgáltatja a tekintett paraméterértéknél a lokális minimumhoz tartozó csucspontot s a minimum értékét, amelyek jellemző adatait a gép kinyomtatja. Ezután a paraméterértéket az imént meghatározott legközelebbi értékre változtatjuk. Mindkét esetben végrehajtjuk ezután a báziscsere megkövetelte változtatást a szimplextáblában, amely a normálások és normálófaktorok megválasztása következtében egyszerüen, fixpontos müveletekkel végrehajtható; éspedig az uj tábla elemei igy határozhatók meg:

$$\tilde{\alpha}_{rs} = \alpha_{rs}\alpha_{ij} - \alpha_{is}\alpha_{rj}\,; \quad \tilde{\alpha}_{s} = \alpha_{s}\cdot\alpha_{ij}$$

ill.

$$\tilde{\beta}_{s} = \beta_{s}\alpha_{ij} - \beta_{i}\alpha_{rj}\,; \qquad \tilde{\beta} = \beta\cdot\alpha_{ij}$$

ha $r \neq i$ és $s \neq j$

továbbá

$$\tilde{\alpha}_{rj} = -\alpha_{rj} \quad \text{és} \quad \tilde{\alpha}_{j} = \alpha_{ij}, \text{ ha } r \neq i$$

$$\tilde{\alpha}_{is} = \alpha_{is}\,; \quad \tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{j}.$$

Megemlitjük, hogy az M-3 gépen memóriatakarékossági szempontok alapján és arra való tekintettel, hogy az δ_i és γ_i exponensek csak két értékes jegyre pontosan voltak ismeretesek, a célfüggvény megváltozása, ill. értéke kiszámitásánál a felmerülő

$$a^{\delta}$$

alaku hatványmennyiségeket az alábbi módon számitottuk:

$$\alpha^{\delta} = \prod_{i;\delta^{(i)}=1} \sqrt[2^i]{a},$$

aholis $\delta^{(i)}$ a $0 < \delta < 1$ feltételnek eleget tévő kitevő bináris előállitásában a i-edik számjegyet jelöli. Megjegyezzük továbbá, hogy minden olyan számológépen, ahol a négyzetgyökvonás huzalozott alapmüvelet, a fenti számitási mód adja a legkedvezőbb időstatisztikát az exponenciális függvény számitásához.

Megjegyezzük továbbá, hogy nem-lineáris célfüggvény esetén azok a paraméterértékek, amelyeket a fentebb ismertetett módon számitunk, nem adják meg azokat a pontokat, ahol a két különböző megoldásnak megfelelő programok "váltják" egymást, azaz amelytől kezdve az egyik ill. a másik program "szigoru" minimumot vesz fel. Minthogy azonban a paramétertől a tekintett feladattipus esetén lineárisan függ a célfüggvény, elegendő mindegyik program értékét két különböző paraméterértéknél meghatározni. Ilymódon ismeretessé válik a tekintett programok célfüggvényértékének a paramétertől függő változását ábrázoló egyenes, s ezen egyenesek kijelölik az alsó burkolót, ill. a megfelelő metszőpontokat, ahol az egyes optimális programok "váltják" egymást.

2.3. A minimalizálandó függvény konkáv jellegéből adódó problémákról

Egyes rögzitett paraméterértékeknél - azoknál, amelyek a paraméteres programozás szempontjából lényegesebb kitüzött értékek - igyekeztünk a lehető legvalószinübbé tenni, hogy a megtalált lokális szélsőértéket biztositó poliéder csucspontban megtaláltuk az optimalizálási probléma megoldását is. E célból két különböző eljárást is alkalmaztunk. Az elsőt, amelyet a "véletlen séta" módszerének nevezünk, a következő módon hajtottuk végre: kiindulva a szimplex egy alkalmas - tehát a tekintett, rögzitett paraméterértéknél még lokális szélsőértéket sem biztositó - csucspontjából, kiválasztottuk mindazon lehetséges, a bázisba bevonható vektorokat, amelyeknek a bevonása a célfüggvény csökkenésével jár. Közülük egyenletes eloszlásu véletlen számtáblázat segitségével választottuk ki minden egyes lépésben azt a vektort, amelyet a bázisba ténylegesen bevontunk. Ezt az eljárást mindaddig folytattuk, amig lokális extrémumot biztositó poliéder-csucsponthoz nem jutottunk. Az eljárást ugyanabból a kiinduló bázisból többször megismételtük. Természetesen ez az eljárás csak akkor vezethet el - elég gyakori próbálkozás után - az optimalizálási probléma tényleges megoldásához, ha a poliéder kiindulásul választott csucspontja olyan, hogy abból szomszédos és állandóan csökkenő célfüggvényértékü csucspontokon keresztül legalább egy ut vezet a megoldást jelentő csucspontig. Közgazdasági megfontolásokból következtetünk arra, hogy az általunk kiindulásul választott csucsponton a célfüggvény értéke elég nagy /közel van a lehetséges maximumhoz/ és igy valamennyi szóbajövő lokális minimumot biztositó csucsponthoz legalább egy ut vezet.[x/] Az emlitett kisérletet többször lefolytatva végül is azt a csucspontot választottuk ki, amelyen a célfüggvény értéke a lehető legkisebb volt. /Érdekesség kedvéért megemlitjük, hogy a konkrét modell kapcsán a szóbanforgó, "véletlen séta"-tipusu eljárással három lokális minimumot is találunk - jelentősen eltérő célfüggvény-értékkel./ A "véletlen séták" segitségével ilymódon kiválasztott és optimálisnak tekinthető programot azután egy másik eljárással további vizsgálatoknak vetettük alá. Ezen eljárás lényege a következő:

A költségfüggvény nem lineáris részét - ujból hangsulyozzuk, hogy a paraméteres programozás eredeti, közgazdasági értelemmel biró paramétere mindkét eljárás során rögzitve van - a kisérlet céljait szolgáló változtatható szorzófaktorral láttunk el, amelyet a továbbiakban kisérleti paraméternek fogunk nevezni. E kisérleti paraméter egységnyi értéke éppen azt fejezi ki, hogy az eredeti célfüggvényt tekintjük az eredeti paraméter adott, rögzitett értéke mellett. /Ehhez tehát a "véletlen séták" módszerével már kikerestünk egy optimálisnak látszó lokális minimumot biztositó csucspontot; az e csucspontnak megfelelő bázisból inditjuk a kisérletet./ Az a tény, hogy a választott kisérleti paraméter egységnyi értékénél a választott megoldás lokális minimumot biztosit, abban tükröződik, hogy a célfüggvénynek az adott csucsponton átmenő akvipotenciális felülete a szóbanforgó poliédert vagy egyáltalán nem metszi másutt /ez esetben a lokális minimum egyszersmind az optimalizálási feladat megoldása is/, vagy ha igen, akkor sem metszi az adott csucspontból kiinduló kétdimenziós élek /amelyek tehát a szomszédos csucspontokhoz vezetnek/ egyikét sem ezen akvipotenciális felület. A választott kisérleti paraméter növelése /tekintettel arra, hogy a célfüggvény nem-lineáris részében valamennyi együttható pozitiv/ geometriailag egyfelől azt jelenti, hogy a célfüggvény valamennyi ekvipotanciális felületének a görbültségét növeljük, másfelől pedig azt, hogy a tér rögzitett pontjában a célfüggvény értéke nő -

x/ Ilyen kiinduló pont pl.: valamennyi szükséglet kielégitése importból.

azaz a lokális minimumot biztositó kiinduló bázison átmenő ekvipotenciális felületek a segédparaméter növelésével egymás után behatolnak a poliéder belsejébe. Amint a kisérleti paraméter értéke oly nagyra nő, hogy az ennek következtében egyre erősebben görbülő ekvipotenciális felületek közül a választott bázisponton átmenő felület a szóbanforgó csucspontból kiinduló kétdimenziós élek valamelyikével már metszésbe kerül, ezt a tényt a program azzal jelzi, hogy a szóbanforgó kisérleti paraméterérték elérésekor a kiindulási bázist már nem tartja optimálisnak. /A tényleges végrehajtás - mint azt a fentebbiekben láttuk - egyszerüen ugy történik, hogy egy lépésben meghatározzuk a kisérleti paraméter azon minimális - egynél nagyobb - értékét, amikor az a jelenség bekövetkezik./ Elvégezve azt a báziscserét, amelyet a tekintett ekvipotenciális felületnek valamely szomszédos csucsponton való áthaladása indukál, az igy kapott program általában nem biztosit lokális minimumot, hiszen legtöbb esetben e két szomszédos csucsponton áthaladó ekvipotenciális felület ténylegesen be is hatol a csucspontok egyikénél a poliéderbe. Ezért a kisérleti paraméter szóbanforgó értékének rögzitésénél általában néhány további vektornak a bázisba való bevonása lehetségessé válik - mindaddig, mig a kisérleti paraméter adott értékénél el nem érünk egy ujabb lokális minimumhelyre. Eközben állandóan figyeljük, hogy az igy kapott csucspontokban a kisérleti paraméter egységnyi értékénél mekkora a célfüggvény értéke. Ha azt tapasztaljuk, hogy valahol kisebb, mint az eredeti kiindulási bázisnál volt, akkor visszaváltoztatjuk a kisérleti paraméter értékét egységnyire és megvizsgáljuk, hogy igy is a minimumot biztosit-e a szóbanforgó csucspont. Ha nem, folytatjuk az extremalizálást, amelynek befejeztével egy olyan ujabb lokális minimumot biztositó csucspontot találunk, amelyben a célfüggvény értéke kisebb, mint a kiindulási bázisban volt. Ha azonban ez az eset nem következik be, akkor a szóbanforgó kisérlet elvégzése után ismét az eredeti bázisra térünk vissza. Ezen kivül meghatározzuk azt a legelső nem-lineáris célfüggvény együtthatót, amelyhez tartozó oszlopvektor a kisérleti paraméter növelése során először került be a bázisba. Az ezen oszlopvektornak megfelelő nem-lineáris együtthatókat a következő kisérletnél kizárjuk a kisérleti paraméter hatása alól - azaz a szóbanforgó koordinátatengely irányában a következő kisérletnél már nem változtatunk az ekvipotenciális felület görbültségén. Ez után a szőbanforgó kisérletet - amit a célfüggvény görbitése módszerének nevezhetünk - a megmaradt nem-lineáris változók segitségével mindaddig folytatjuk, mig valamennyi nem-lineáris változó ki nem került a kisérleti paraméter hatásköréből. Mindezek elvégzése után igen nagy valószinüséggel egybeesik az általunk megtalált és optimális lokális minimumot biztositó csucspont a feladat megoldásával.

Az eredeti - tulajdonképeni - paraméter teljes értéktartományában természetesen nem lehetett a fenti kisérleteket mindenütt elvégezni. Ezért arra szoritkoztunk, hogy a paraméter leglényegesebb értékénél x/ a fenti módon igen nagy biztonsággal igyekeztünk megállapitani a minimális célfüggvényértéket biztositó csucspontot és ezután a paraméter ezen értékéből kiindulva először felfelé, majd visszafelé /az eredetileg megadott értékhatárokon kissé tulmenve/ változtattuk a paraméter értékét. Ezt a változtatást azonban csak akkor fejeztük be, amikor két ellentétes irányu változtatás után a paraméter valamelyik értékénél azonos optimumot biztositó csucsponthoz jutottunk. Az eredeti paraméter változtatása ugyanis bizonyos értelemben megegyezik azzal a kisérleti programmal, amit e "célfüggvény görbitése módszerének" neveztünk és igy előfordulhat /és a konkrét feladatnál ténylegesen elő is fordult/, hogy a paraméter értékét különböző irányokban változtatva nem azonos programhoz jutottunk azonos paraméterérték-intervallumokban, hanem az optimum értéke a változtatás során javult. Uj eredmény csak akkor nem várható, ha egy adott paraméter-értéket ellentétes irányban közelitve meg, mint az előző alkalommal. ugyanahhoz a programhoz jutunk.

Befejezésül megemlitjük még, hogy a fentebb emlitett és az un. "kétszintü" tervezés-modellekre xx/ kidolgozott módszerek egyesitésével olyan programozási módszer kidolgozására törekszünk, amelynek segitségével biztosan el lehet jutni a fentihez hasonló konkáv programozási feladatoknál az optimalizálás megoldását jelentő abszolut minimumot biztositó csucsponthoz.

---

x/ Gyakorlatilag: 60 Ft-os dollárárfolyamnál.

xx/ Lásd Kornai - Lipták T.: "Kétszintü tervezés"(MTA Számitástechnikai Központ, 1962.)