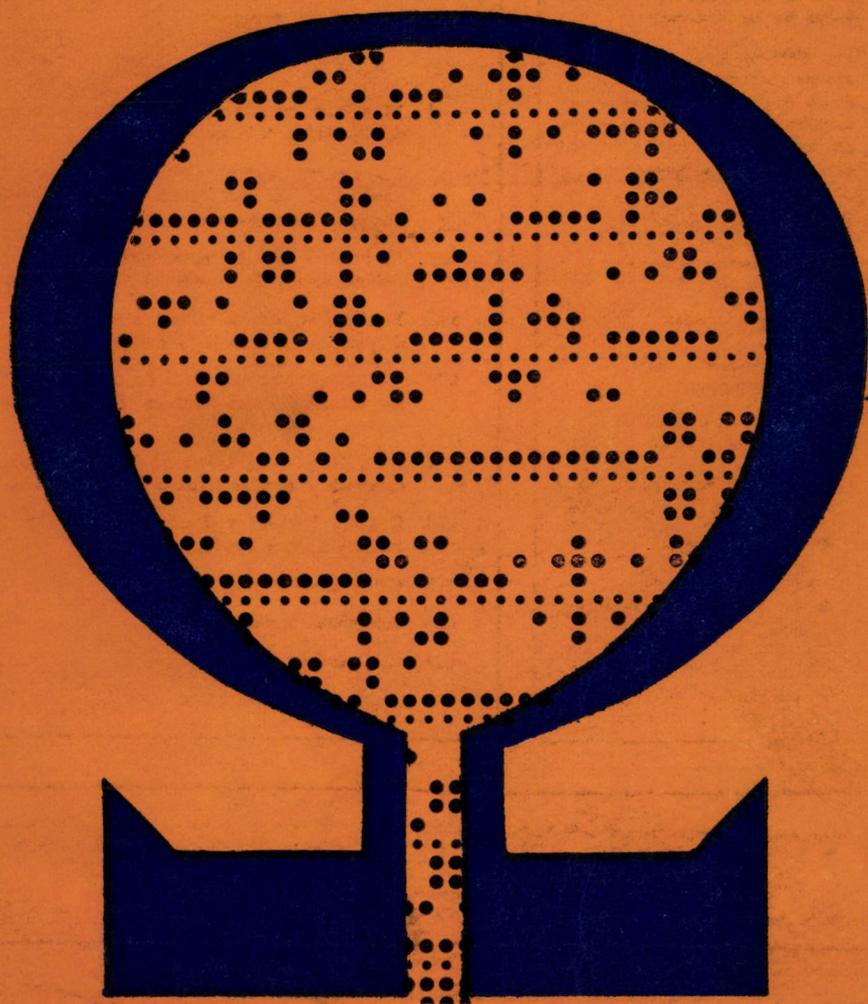
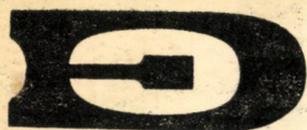


**economía  
y desarrollo**

**5**





Publicación Trimestral del Instituto de Economía de la Universidad de La Habana.

Los trabajos publicados no expresan necesariamente la opinión de la Revista. Esta se reserva el derecho de expresarla por medio de artículos o notas aclaratorias cuando lo estime conveniente.

**Director:**

- Lic. Hermes Herrera Hernández.

**Consejo de Dirección:**

- Lic. Julio Aracelio Díaz Vázquez.
- Ing. Alfredo González Gutiérrez.
- Lic. Julio González Noriega.
- Lic. René Infante Matilla.
- Lic. Orlando Segundo Arias.

**Diseño:**

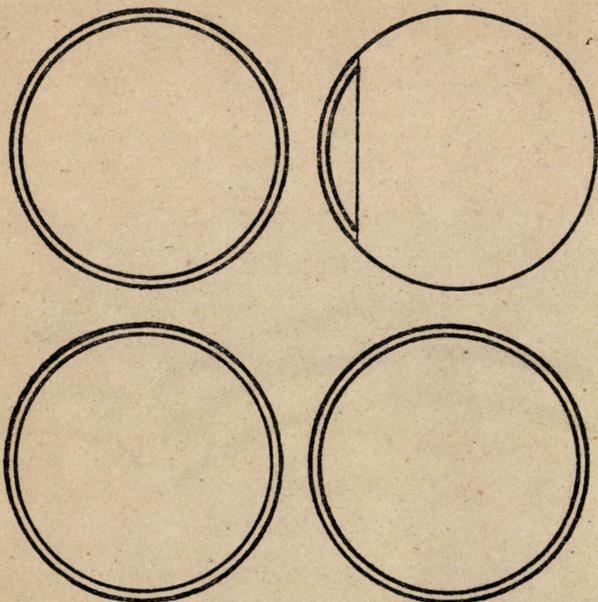
- Ana Suárez.

## SUMARIO

- 3 El Sector externo y el desarrollo económico de América Latina / *C.I.E.I.*
- 61 Un modelo aproximado para la solución de problemas de programación lineal por descomposición / *Kornai Janos.*
- 92 El control de la natalidad y el argumento del ahorro y la inversión / *Angel Fucaraccio.*
- 107 Estimación del nivel de mortalidad a través de preguntas censales / *Luisa Alvarez*
- 127 Método de construcción de poblaciones modelos estables cuasi-estables *Rodolfo Mezquita y Juan Chackiel.*
- 146 La adhesión de Cuba al GATT y sus consecuencias / *Benito Besada Ramos.*
- 159 Estados Unidos y Japón: Rivalidades Económicas / *Victor Perlo.*
- 176 Cuba Económica.
- 186 Selección Internacional.
- 195 Académicas.

Redacción / Edificio Julio Antonio Mella, L No. 353. e/ 23 y 21. Vedado / Habana, Cuba / Teléfono: 32-9458  
● Circulación / Distribuidora Nacional de Publicaciones, Virtudes No. 257 e/ Galiano y Aguila, Habana. Teléfono: 6-6765 ● Precio del Ejemplar / 50 centavos ● SUSCRIPCIONES ● En el extranjero a / Departamento Internacional del Instituto del Libro / Calle 19 No. 1002, Vedado / La Habana, Cuba ● Precio de la suscripción Anual / Correo aéreo para Latinoamérica y Estados Unidos: 7.00 dólares canadienses; Europa: 10.00 dólares canadienses; África: 15.00 dólares canadienses; Asia: 18.00 dólares canadienses.

# AMERICA LATINA



**39**

TASA DE NATALIDAD  
POR CADA 1000 HABITANTES



TASA DE MORTALIDAD  
POR CADA 1000 HABITANTES

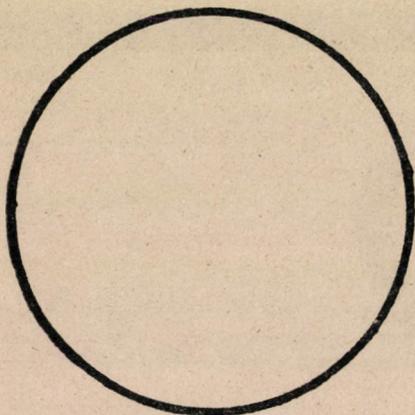
**10**



**376**

**PROYECCIONES  
DE POBLACION  
PARA 1980**

(millones de habitantes)



**AMERICA  
LATINA**

**CALCULO DE POBLACION EN 1969**  
(millones de habitantes)

**276**

# un modelo aproximado para la solución de problemas de programación lineal por descomposición\*

KORNAI JANOS

## 1. INTRODUCCION

*Para la solución de problemas extensos de programación lineal resulta eficaz utilizar los algoritmos de descomposición. En los últimos años se han elaborado muchos tipos de procedimientos para la solución de estos problemas, desgraciadamente una característica común a todos ellos es que convergen hacia el óptimo lentamente.<sup>1</sup>*

*En lo que sigue, presentamos un procedimiento de cálculo aproximado,<sup>2</sup> la base matemática no es original; el algoritmo utilizado ha sido el de DANTZIG-WOLFE (de aquí en adelante nos referiremos a él como el algoritmo DW), el método que aquí se presenta puede considerarse como una forma heurística-simple del procedimiento DW. Nuestro procedimiento no garantiza poder obtener el óptimo antes de la descomposición original; sin embargo, contribuye a que*

\* Este artículo constituye una versión al español del trabajo «Kézelito eljárás lineáris programázási feladatok dekompozíciós számítására», aparecido en la revista Szigma en el año 1969. La versión al español se debe al Lic. Carlos de la Torre Maicas.

<sup>1</sup> Hasta el momento no se ha publicado ninguna experiencia de análisis comparando distintos procedimientos de cómputo, tanto exactos como aproximados, lo que daría la eficacia de las técnicas de cálculo aplicadas.

<sup>2</sup> Ver referencia IV.



De aquí en adelante cada vez que nos refiramos a /1/ lo designaremos como «la tarea grande». Para la formación de la estructura a dos niveles, las variantes de acción de la tarea grande las ordenamos de forma tal, que se compongan de  $n$  elementos en el conjunto. A estos los llamamos «sectores». <sup>4</sup>

Definamos  $x = [x'_1; x'_2; \dots; x'_n]$  el vector programa de la tarea grande,  $x$  el programa óptimo.

Las restricciones se pueden dividir en dos grupos. El grupo /1a/ serán las restricciones centrales en las cuales pueden existir coeficientes distintos de cero al menos en las variables de dos sectores. El número de restricciones centrales será  $m$ . El grupo /1b/ serán las restricciones especiales de sector, aquí se pueden encontrar coeficientes distintos de cero solamente en el sector al cual incumben. Llamamos  $X$  el conjunto del programa factible para la tarea grande.

*Hipótesis 1.* El conjunto  $X$  es acotado y no vacío  $X \neq \emptyset$ . Llamamos a la matriz  $U$  la partición límite central.

$$/2/ \quad U = [u_1; u_2; \dots; u_n],$$

donde  $u_i = (i = 1, \dots, n)$ ; de la misma dimensión de vector  $b_0$ , es decir  $m$ . Llamamos la tarea del  $i$ -ésimo sector a la correspondiente a la partición límite  $u$  del programa central, éste constituye un problema de programación lineal tal, que  $x_i$  es la variable y /3/-/4/-/5/ son restricciones, al menos existiendo /4/-/5/.

$$/3/ \quad A_i x_i \leq u_i$$

$$/4/ \quad B_i x_i \leq b_i$$

$$/5/ \quad x_i \geq 0$$

## 2.2 Los grados de óptimo y programas factibles

Llamamos a  $x_i$  programa factible cuando, dado  $[u_i; b_i]$  se cumplen las restricciones /3/-/4/-/5/. Designamos ese conjunto de programas como  $X_i [u_i; b_i]$ . Llamamos partición límite central valorizable a las matrices  $U$  que cumplimentan las dos condiciones siguientes:

$$/6/ \quad u_1 + u_2 \dots + u_n \leq b_0$$

$$/7/ \quad X_i [u_i; b_i] \neq \emptyset \quad \text{para todo } i (i = 1, 2, \dots, n)$$

<sup>4</sup> Las denominaciones utilizadas en el artículo, de acuerdo a las posibilidades, se van acercando a la terminología utilizada en III sobre planificación a dos niveles. También en la primera prueba sobre planificación a largo plazo (1966-70), se introduce la misma nomenclatura. Ver referencia VI.

Designamos por  $U$  el conjunto de particiones centrales valorizables.<sup>5</sup> De la primera hipótesis se deduce que:

$$/8/ \quad U \neq \emptyset$$

El programa de sector  $X_1$  en las condiciones  $[u_i; b_i; g_i]$ , es óptimo en la medida que la tarea de sector es óptima. Se trata de encontrar la solución al programa de sector siguiente:

$$/9/ \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 x_1 \leq u_i \\ B_1 x_1 \leq b_i \\ x_1 \geq 0 \\ g'_1 x_1 \rightarrow \text{Máx} \end{array} \right.$$

donde  $g'_1$  es el vector de coeficientes de la función objetivo (posiblemente diferente del valor  $e_i$ ).

$x_1$  es el programa de sector factible si satisface el sistema de restricciones siguientes:

$$/10/ \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 x_1 \leq b_i \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

Designamos por  $X_1 [b_i]$ , el conjunto de programas factibles  $[b_i]$ . El programa sectorial es óptimo para  $[b_i; g_i]$ , si es la solución para:

$$/11/ \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 x_1 \leq b_i \\ x_1 \geq 0 \\ g'_1 x_1 \rightarrow \text{Máx} \end{array} \right.$$

### 2.3 Programa comparativo

Para la aplicación de un procedimiento de cálculo aproximado eficaz, es obvio conocer un programa de la tarea grande al cual llamamos «programa comparativo». Lo denominamos  $X^0 = [x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0]'$ . La denominación indica que estamos comparando los programas obtenidos a través del procedimiento.<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Los teoremas y presentaciones relacionados con la descomposición de la tarea grande a dos niveles y con la partición central valorizable se pueden ver en la referencia bibliográfica III de la página 580-583.

<sup>6</sup> La primera prueba de programa comparativo en la programación nacional se llevó a cabo en el así llamado «programa oficial», el cual los panificadores en la práctica elaboraron con métodos de planificación tradicional, no matemáticos e independiente de nuestro modelo.

Hipótesis 2.  $x^0 \in X$ .

Llamamos a  $U^0$  «partición central límite comparativa», a la matriz para la cual el vector  $i$ -ésimo se determina de la forma siguiente:

$$/12/ \quad u_i^0 = A_i x_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

De la hipótesis 1-2 y de la determinación /8/, se deriva que las particiones centrales comparativas son evaluables, o sea,

$$/13/ \quad u^0 \in U$$

Hipótesis 3.  $c'x^0 < c'x$

Hipótesis 4.  $c'_i x_i^0 < c'_i x_i^1$  para todo  $i$ ,<sup>7</sup> donde  $x_i^1$  es el programa óptimo de la tarea siguiente:

$$/14/ \quad \begin{cases} A_i x_i \leq u_i^0 \\ B_i x_i \leq b_i \\ x_i \geq 0 \\ c'_i x_i \rightarrow \text{Máx} \end{cases}$$

Llamamos programa óptimo del sector, al vector  $x_i^1$ , dado que ese es el programa óptimo calculado con el vector original de coeficientes de la función objetivo, y  $n$  el caso de partición central comparativa.

#### 2.4 Proyecto de plan

Designamos a  $t_i$  como el proyecto de plan de  $i$ -ésimo sector al vector siguiente:

$$/15/ \quad t_i = A_i x_i \quad x_i \in X_i [b_i]$$

Designamos con  $s_i$  la contribución del  $i$ -ésimo sector a la función objetivo en el siguiente número real.

$$/16/ \quad s_i = c'_i x_i \quad x_i \in X_i [b_i]$$

En los siguientes epígrafes determinamos, por sector, las series de proyectos de plan y les damos números similares a la contribución a la función objetivo correspondiente. Los números superiores indican los

<sup>7</sup> Basándonos en nuestras experiencias prácticas puede decirse que es válido para todo  $i$ . Hasta el momento no nos hemos encontrado con un programa comparativo el cual haya sido solución óptima de tarea /14/.

números de serie al lado de los símbolos. Damos a conocer dos proyectos de plan especiales, el comparativo y el óptimo del sector.

$$/17/ \quad t_i^0 = A_i X_i^0 = U_i^0 \quad S_i^0 = C_i X_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$/18/ \quad t_i^1 = A_i X_i^1 \quad S_i^1 = C_i X_i^1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Se incluyen las contribuciones a la función objetivo.

### 3. LA DEDUCCION GENERAL DEL PROCEDIMIENTO

En la deducción aplicamos un número de serie dual, el primero indica el número de serie por iteración, el segundo expresa dentro de cada iteración el paso correspondiente. Si damos el número de serie de iteración al símbolo, esto lo destacamos después del símbolo con un corchete.

Suponemos, de acuerdo a los procedimientos de descomposición acostumbrados, que unas partes son determinables por el centro y otras por los sectores. En pasos determinados, la información pasa del centro a los sectores y viceversa.<sup>8</sup>

De acuerdo a lo anterior, destacamos en cada paso donde tiene que realizarse la tarea, en el centro o en el sector. Si se trata de un paso de transmisión de información, se indica el sentido.

Algunos pasos del procedimiento requieren solución exacta del programa matemático redactado. Estas operaciones se resuelven en la práctica con máquinas computadoras. Otras operaciones son para aplicar sin algoritmos rígidos y deben ser desarrolladas en la práctica de un modo intuitivo-heurístico. De acuerdo a esto, recalamos si se trata de tareas algorítmicas o heurísticas. En los pasos heurísticos sólo damos a conocer el contenido formal de los mismos. En parte posteriores explicamos en qué información debe apoyarse el que aplica esos pasos. Al deducir ese procedimiento suponemos que en todos los sectores se conoce el programa comparativo  $x_i^0$

<sup>8</sup> Si solamente examináramos el procedimiento desde el punto de vista de la técnica de cálculo, sería natural que todas las operaciones fueran realizadas por ese grupo planificador y con la misma máquina computadora, en ese caso el «centro» y el «sector», solamente servirían para las diferentes fases de organización del trabajo.

### 3.1 La primera iteración

#### Paso 1.1 (Algoritmo en el sector)

De acuerdo a la fórmula /12/, se puede determinar el valor  $u_i^0$ , con el conocimiento de este, se soluciona la tarea /14/ y se determina el programa óptimo del sector  $x_i^1$ . Basándose en el programa óptimo del sector y en el programa comparativo de acuerdo a las fórmulas /17/-/18/, se determinan los proyectos del plan  $t_i^0 - t_i^1$  así como, las contribuciones a la función objetivo  $s_i^0 - s_i^1$  que les corresponden.

#### Paso 1.2 (Heurístico en el sector).

Determinación de los pares de vectores  $[u_i^k; g_i^k]$ ,  $(k = 2, 3, \dots, K_i \{1\})$ .

#### Paso 1.3 (Algoritmo en el sector)

Basándose en determinadas funciones objetivo y en las restricciones, se halla la solución óptima del programa:

$$/19/ \quad \begin{cases} A_i X_i \leq U_i^k \\ B_i X_i \leq b_i \\ X_i \geq 0 \\ g_i^k X_i \rightarrow \text{Máx} \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, K_i \{1\}$$

Designamos  $x_i^k$  como el programa óptimo de la tarea /19/. Basándonos en esto, se genera el proyecto de plan  $t_i^k$  así como, la contribución a la función objetivo  $s_i^k$  correspondiente.

#### PaPso 1.2 (Heurístico en el sector).

Con la utilización de los resultados obtenidos en los pasos 1 y 3, formamos la matriz del proyecto de plan siguiente y el vector de contribución a la función objetivo.

$$/20/ \quad T_i \{1\} = [t_i^0, t_i^1, t_i^2, \dots, t_i^{k_i} \{1\}]$$

$$/21/ \quad S_i' \{1\} = [S_i^0, S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^{k_i} \{1\}]$$

#### Paso 1.5 (Del sector al centro)

Envío hacia el centro de las matrices  $T_i \{1\}$  y los vectores  $s_i' \{1\}$ .



Determinamos en qué cuantía se agotaron las restricciones superiores en la tarea central resuelta de la iteración  $(z-1)$ -ésima.

Se determina el vector de utilización de las restricciones  $r\{z\}$ , para el cual el componente  $h$ -ésimo viene expresado por:

$$Y_h\{Z\} = \frac{b_h - W_h Z - 1}{b_h} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

donde  $W_h\{z-1\}$ , es el valor de la variable de holgura asociada a las restricciones en la  $(z-1)$ -ésima iteración en la solución óptima de la tarea central. Cuando  $r_h\{z\} = 1$  se utiliza totalmente el recurso, y si  $r_h\{Z\} < 1$  hay holgura; en consecuencia  $r_h\{Z\}$  indica el margen de holgura existente.

Paso  $(z-2)$  (Heurístico en el centro).

El vector  $r\{Z\}$  da la evaluación cualitativa del valor de los distintos componentes del programa; el análisis cualitativo del grado de holgura («Poca» o «Mucha» holgura, etc.)

Paso  $(z-3)$  (Del centro a los sectores).

Flujo del centro a los sectores de las informaciones obtenidas en el centro de los pasos  $(z-1)$  y  $(z-2)$ , o sea, los vectores  $r\{Z\}$  (evaluaciones cualitativas del grado de holgura).

Paso  $(z-4)$  (Heurístico en el sector).

Basándose en las informaciones recibidas del centro en el paso  $(z-3)$ , así como, en el análisis de programación de los sectores, obtenidas en las programaciones anteriores, la nueva designación de los vectores  $\{u_i^k; b_i^k\}$ ; viene a ser la siguiente:

$$(k = K_i Z - 1 + 1, K_i Z - 1 + 2, \dots, K_i Z)$$

La designación de los pares de vectores se lleva a cabo desde los siguientes cuatro puntos de vista de la formación del proyecto de plan:

- A) Si en la tarea central, el límite  $h$ -ésimo tiene holgura, pero por las experiencias obtenidas en las iteraciones anteriores en el sector no tiene holgura, el  $U_h$  correspondiente se puede elevar en comparación con el valor descrito en las iteraciones anteriores. En la determinación de la elevación se puede tomar en cuenta el grado de holgura de la restricción central.

- B) Si en la tarea central, el límite h-ésimo no tiene holgura, pero por las experiencias anteriores en iteraciones del sector tiene un poco de holgura, el  $u_h$  correspondiente se puede hacer decrecer en comparación con el valor descrito en las iteraciones anteriores. En la determinación de la disminución se puede tomar en cuenta el grado de holgura de la restricción central.
- C) Si de acuerdo a las experiencias obtenidas en las iteraciones anteriores, el límite h-ésimo del sector se demuestra como de muy poca holgura, entonces, el límite se puede elevar en un valor mayor a las iteraciones descritas anteriormente. Eso también se puede hacer, si en la tarea central, ese mismo límite, se encontró de muy poca holgura.
- D) Se puede dar como función de objetivo, la minimización del empleo de cualquier límite que no tenga holgura. Es posible utilizar en la iteración  $(z - 1)$ -ésima, como sistema de ponderación en la solución óptima dual de la tarea central, los precios sombras asociados a los factores limitantes.<sup>10</sup>

Para la determinación del nuevo par de vectores  $u_i^k$ ;  $g_i^k$  del número total  $(K_i z - K_i z - 1)$ , se pueden combinar de diferente forma los puntos de vista enumerados A)-D).<sup>11</sup>

Paso  $(z - 5)$  (Algoritmo en el sector).

Basándonos en las funciones de objetivo y en los límites determinados del cuarto paso, solucionamos la tarea de sector /19/. Basándonos en los programas óptimos obtenidos generamos los nuevos proyectos del plan y también las contribuciones a la función objetivo.  $(t_i^k; s_i^k$  respectivamente)  $(k = K_1 \{z - 1\} + 1 \dots K_1 \{z\})$ .

<sup>10</sup> En la medida en que cualquier utilización de un limitante central, se vayan equilibrando los precios sombras y los restos del vector  $c_i$  original, nos aproximamos a la función objetivo del procedimiento DW exacto.

<sup>11</sup> En nuestro artículo —para hacer más sencillo— hasta el final, tomamos el caso en que, tanto en la tarea grande, como en la tarea de cualquier sector, solamente juegan su papel los límites superiores. Desde luego, en la práctica, no siempre es así. En el caso de límites inferiores de acuerdo a nuestro criterio, hay que modificar el paso  $(z-4)$ . Si por ejemplo, entre las condiciones centrales juega un papel el balance de productos, entonces en el sector de origen, hay que prescribir un límite inferior. En este caso, en ese sector hacemos valer el punto de vista de la formación del proyecto B), elevando el límite inferior. (Mientras en los sectores de destino, de acuerdo al punto de vista B), disminuimos el límite superior.

Paso (z - 6) (De los sectores al centro).

Flujo de información de los sectores al centro enviando los nuevos proyectos de plan y las contribuciones a la función objetivo.

Paso (z - 7) (Algoritmo en el centro).

Construimos la tarea central ampliada. Ya a finales del paso (z - 6), entraron  $(1 + K_i \{z\})$  proyectos de plan para el sector i-ésimo. De acuerdo a la tarea ampliada, el vector de ponderación  $y_i \{z\}$  y el vector de contribución a la función objetivo  $s_i \{z\}$  contienen un número de  $(1 + K_i \{z\})$  componentes, así como también la matriz del proyecto de plan  $T_i \{z\}$ , contiene el mismo número de columnas. Solucionamos la tarea central ampliada; el programa óptimo será  $y \{z\}^*$ .

Paso (z - 8) (Algoritmo en el centro).

Calculamos de forma análoga a la fórmula /23/  $D \{z\}$ , o sea, el excedente de la función de objetivo alcanzado en comparación con el programa comparativo.

Paso (z - 9) (Heurístico en el centro).

Balanceamos  $D \{z\}$ , en la medida que no sea aceptable, continuamos el procedimiento y retornamos a la iteración (z + 1)-ésima. Si es aceptable, no elaboramos más iteraciones y efectuamos los pasos finales.

### 3.3 La terminación del procedimiento

Es la iteración decidida en el paso 9, la que recibe el número de serie z para no realizar más iteraciones. En este caso, se dan lugar aún a dos finales.

Paso (z - 10) (Desde el centro a los sectores).

Flujo del programa óptimo  $Y_i \{z\}^*$  obtenido en el paso 7 de la iteración z-ésima.

Paso (z - 11) (Algoritmo en el sector).

Determinamos  $x_i z$ , o sea, el programa mejorado del sector

$$/25/ \quad x_i \{Z\} = X_i \{Z\} Y_i \{Z\}^*,$$

donde  $X_i \{z\}$ , es el producto de todos los cálculos anteriormente realizados, donde la matriz y los programas de sector correspondientes  $x_i^k$  tienen la misma dimensión  $(1 + K_i \{z\})$ .

El conjunto de programas de sectores mejorados, componen el programa mejorado:

/26/

$$X\{Z\} = [X_1^1\{Z\}; \dots; X_n^1\{Z\}]^1.$$

### 3.4 El esquema de las fuentes de información

El procedimiento descrito en 3.1-3.3, lo representamos en un esquema. En éste, como en la descripción utilizada en el procedimiento de descomposición, hasta el momento usamos, desde el punto de vista acostumbrado, es decir, una parte de las operaciones las realiza «el centro» y la otra «los sectores». Es más, en los siguientes utilizamos el punto de vista institucional. Diferenciamos del uno y el otro, los planificadores existentes en la realidad, los procedimientos y los modelos utilizados de las personas y las máquinas, y todo lo alimentado con datos, directivas y algoritmos. En nuestro esquema, los círculos representan los grupos planificadores del centro y los sectores, es decir, las personas vivas; los rectángulos, las máquinas computadoras. Los círculos realizan las funciones heurísticas y los rectángulos, las algorítmicas.

Dentro de los círculos y los rectángulos, damos a conocer la iteración que se lleva a cabo en la misma. Las flechas indican el flujo de información. A esta le damos también el contenido de la información.

## 4. POSIBILIDADES DE MODIFICACION

### 4.1 Algunos artificios de cálculo

En los pasos siguientes damos a conocer algunas posibilidades de modificación, o sea, de complementación al procedimiento general descrito en el capítulo 3, las cuales pueden elevar la eficiencia práctica del procedimiento.

- a) En el procedimiento DW, la tarea central solamente combina proposiciones de plan tales, que no exigen la optimización de  $u_i$ ;  $b_i$ ;  $g_i$ , sino solamente la de  $[b_i$ ;  $g_i]$ . Esto es permisible en el procedimiento aproximado también, siempre y cuando haya un conjunto de proposiciones unidos de plan tal, que en ella  $[u_i$ ;  $b_i$ ;  $g_i]$ , es óptimo para cualquier  $u \in U$ .
- b) No hay necesariamente que adherirse a la idea de que  $[u_i$ ;  $b_i$ ;  $g_i]$ , sea óptimo, es decir, que utilicemos programas

óptimos  $[b_i; g_i]$  para la elaboración de las proposiciones de plan. Para la complementación de esto, utilizamos en cada sector algunos  $[b_i; g_i]$  factibles, también  $[b_i]$  factible (pero no óptimo). A lo mejor, su elaboración es mucho más fácil que los programas de sector óptimos.

- c) Se dificulta el acercamiento a la solución óptima en la tarea grande, si la tarea central solamente puede combinar unos vectores  $t_i^k$ , los cuales tienen muchos componentes que no sean cero. Puede ser conveniente introducir asimismo, algunas variables originales de la tarea central en forma directa; o sea aquellos que tengan pocos coeficientes distintos de cero en las condiciones centrales, y aquellos que tengan cero en las condiciones especiales de sector.<sup>12</sup>
- d) Es conveniente en la tarea central evitar las igualdades, como lo es también para aquellas formas de desigualdad, que por su contenido práctico, es mejor darle el límite inferior. Es posible, y mucho mejor, desde el punto de vista de la función objetivo, sobrecumplir algún límite inferior, o sea, en el caso de la tarea económica, la elaboración de sobrantes, que dejar de tomar en cuenta la introducción de propuestas de plan ventajosas, porque por culpa de ello, fuera imposible cumplir las condiciones de igualdad.
- e) El paso (z — 4) lo describimos originalmente en forma tal, que el sector determina los vectores discretos  $[u_i^k; b_i^k]$  para la programación de sector basada en la formación de propuestas de plan nuevas. Junto a esto, se pueden utilizar los procedimientos de programación paramétrica. Podemos prescribir en forma paramétrica el vector limitante  $u_i$  central y dado en el sector, para poder realizarse desde los puntos de vista A, B, C), como también el vector  $g_i$  de coeficientes de la función objetivo para la validez del punto de vista D). Solamente una programación paramétrica sucesiva puede fundamentar la formación de una serie nueva de proposición de plan.
- f) La terminación del paso (z — 4) lo describimos originalmente de manera que quede resuelta en forma independiente por el sector, esto se lleva a cabo con la utili-

<sup>12</sup> En la programación de la economía nacional de 1966-70 esa fue la situación con unas cuantas variables de importación de países capitalistas, de esas, solamente 2 fueron coeficientes distintos de cero, uno el balance de productos mencionados, y otro, la balanza de divisas de países capitalistas. Por esta razón, introducimos en forma directa, más variables de importación de países capitalistas, lo que hizo más «elástica la mezcla» de programa mejorados.

zación de las informaciones centrales obtenidas en el paso ( $z - 3$ ). Sin embargo, en el procedimiento se puede introducir la complementación siguiente: en todas las iteraciones de los sectores se ofrecen también las soluciones duales de programa de sector óptima, que sirven de base a los proyectos de plan, más exactamente, da los precios sombras a los límites centrales. El centro compara éstos. Basándose en las comparaciones de los precios sombras de las programaciones de sector efectuadas en la ( $z - 1$ )-ésima iteración, prescribe lo siguiente: es necesario elevar los límites superiores de las fuentes centrales de  $h$ -ésimas en aquellos sectores en los cuales el precio sombra correspondiente al límite  $h$ -ésimo es alto, (haciéndolo valer desde el punto de vista B). De la misma manera hay que disminuir su límite de la fuente  $h$ -ésima en aquellos sectores en los cuales es bajo el precio sombra, (haciéndolo valer desde el punto de vista C).<sup>13</sup>

g) A través de la aplicación práctica, sistemáticamente no utilizamos un cálculo sino, una serie de cálculos. Los miembros de la serie se pueden diferenciar el uno del otro, tanto en la función de objetivo, como en el valor de los componentes de algunos de los vectores limitantes. En la aplicación del procedimiento aproximado debemos prepararnos para lo siguiente:

- cualquier función de objetivo que llegue a tomar parte en la aplicación de la serie, la hacemos jugar un papel en las programaciones de sector, esto es, en la determinación de los programas óptimos [ $u_i$ ;  $b_i$ ;  $g_i$ ].
- nos preparamos para las modificaciones a los limitantes centrales que toman parte en la serie de cálculos. Si por ejemplo, sabemos que el vector limitante central  $h$ -ésimo lo vamos a elevar o hacer decrecer en los diferentes miembros de la serie, entonces preparamos unos proyectos de plan tales, que los mismos utilizan algunos más o menos del límite  $h$ -ésimo.

De esa manera podemos comparar una tarea central «universal». Esta serie de cálculos se puede utilizar para cualquier miembro, por lo

<sup>13</sup> En el artificio de cálculo expresado en el punto 6, se construye el procedimiento por acercamiento del método básico de descomposición por juegos ficticios descrito en el III, pues en éste, basándose en los precios sombras obtenidos en las programaciones de sector se lleva a cabo la agrupación intersectorial de las fuentes.

menos en la primera iteración para el cálculo del vector de ponderación inicial y  $\{1\}$ .

#### 4.2 Paso hacia el procedimiento DW-exacto

Por cuanto, la variación metódica de nuestro procedimiento, no presenta ningún obstáculo para que podamos pasar el procedimiento exacto después de la iteración  $z$ -ésima, supongamos que después de la iteración  $\bar{z}$ -ésima (con la utilización de los resultados obtenidos hasta ahora con el procedimiento aproximado), deseamos continuar el cálculo de acuerdo al algoritmo exacto. Describimos la  $(\bar{z} + 1)$  iteración, manteniendo los pasos de conteo obtenidos en las etapas descritas en 3.2. Ahora no ponemos en el símbolo «algoritmo» para algunos pasos, porque ahora naturalmente, es válido para cualquier paso.

Paso  $(\bar{z} + 1)$ . 1. (En el centro).

Describamos la solución dual óptima de la tarea central del tipo de iteración  $z$ -ésima. Simbolicemos con  $p \{\bar{z}\}$  el vector de precios sombras correspondientes a las condiciones centrales /22.a/.

Paso  $(\bar{z} + 1)$ . 2.

No tiene lugar.

Paso  $(\bar{z} + 1)$ . 3. (Del centro a los sectores).

Se cede el vector.

Paso  $(\bar{z} + 1)$ . (En los sectores).

Creación de la tarea del sector siguiente:

$$\begin{array}{l} /27/ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_1 x_1 \leq b_1 \\ x_1 > 0 \\ (c'_1 - p' \{\bar{z}\} A_1) x_1 \rightarrow \text{Máx} \end{array} \right. \end{array}$$

Paso  $(\bar{z} + 1)$ . 5. (En los sectores).

Solucionamos la tarea /27/. Basándonos en la solución generamos la nueva propuesta de plan junto con la contribución de la función objetivo que le corresponde.

Pasos  $(\bar{z} + 1)$ .6- $(\bar{z} + 1)$ .9.

De acuerdo al razonamiento, corresponden a los pasos similares descritos en la z-ésima iteración en la etapa 3.2.<sup>14</sup>

Cuando existe la aplicación del procedimiento aproximado, el programa de computadoras electrónicas se puede elaborar de manera que los que en ellas funcionan, de acuerdo a su gusto, en la iteración pasen del procedimiento aproximado al exacto. Tomando en cuenta esto, el procedimiento de aproximación se puede considerar como la «fase preparatoria» del procedimiento DW. Asimismo, puede producir un programa inicial bueno para el cálculo DW-regular.

## 5. CARACTERÍSTICAS DEL PROCEDIMIENTO APROXIMADO

### 5.1 Características que se pueden demostrar

En los puntos siguientes, damos a conocer las características que se pueden demostrar y que estaban descritas en el tercer capítulo como procedimiento general.

Primera característica (permisibilidad).

Existen soluciones factibles de la tarea grande en los programas mejorados realizada por medio del procedimiento general aproximado  $x\{z\} \in X$ .

Demostración: Primeramente hay que verificar que la tarea central tenga solución factible. Esto surge en forma trivial, pues nosotros conocemos dos soluciones tales, que por definición son factibles.

$$/28/ \quad Y_i = [Y_i^0 = 1; Y_i^k = 0 \ (k = 1, \dots, K_i\{Z\})] \quad i = 1, \dots, n$$

$$/29/ \quad Y_i = [Y_i^0 = 0; Y_i^1 = 1; Y_i^k = 0 \ (k = 2, \dots, K_i\{Z\})] \\ i = 1, \dots, n$$

En los pasos siguientes tenemos que reconocer que  $x\{z\}$ , es la solución factible de la tarea grande.

<sup>14</sup> El paso 9 se puede complementar con la estimación de la distancia existente al óptimo. La fórmula de estimación es conocida de la literatura. Por ejemplo, ver artículo de STAHL J. IX. La fórmula de estimación de tipo Stahl fue aplicada en el Centro de Técnicas de Cálculo (NTA) en el programa de las máquinas de cálculo DW elaborado en 1967.

Por una parte: las condiciones centrales de la tarea central /22.a/ aseguran la satisfacción de las condiciones centrales de la tarea grande /1.a/.

$$/30/ \quad \sum_{i=1}^n T_i \{Z\} Y_i \{Z\}^* = \sum_{i=1}^n A_i X_i \{Z\} \leq b_0.$$

Por otra parte: basándonos en los proyectos de plan que toman parte en la tarea central, solamente se sirven programas factibles  $[b_i]$ , sin embargo, las condiciones de combinación /22.b/, aseguran que el programa mejorado se componga de sus combinaciones convexas, o sea, se satisfacen también las condiciones especiales de sector de la tarea grande /1.b/.

Segunda característica (mejoramiento).

Con el procedimiento general por aproximación, se puede construir un programa en el cual, el valor de la función de objetivo sea mayor que el del programa comparativo.

$$/31/ \quad C'X \{Z\} > C'X^0.$$

Demostración: por lo menos existe seguramente un programa conocido, el cual es más favorable que el comparativo, ese programa es el descrito en /29/, pues la utilización límite central comparativa  $U^0$  da en todos los sectores el programa óptimo de la tarea de sector /14/. De la misma manera, basándonos en la cuarta hipótesis, son factibles para esta misma tarea los programas de sector comparativos que no son óptimos.

Tercera característica (monotonía).

El valor de la función objetivo obtenido en la iteración  $z$ -ésima, no es menor que el obtenido en la iteración  $(z - 1)$ -ésima.

$$/32/ \quad C'X \{Z\} \geq C'X \{Z - 1\}.$$

Demostración: surge de forma directa (de acuerdo con el paso  $(z - 7)$ , recogidas hasta la iteración  $(z - 1)$ -ésima de la tarea central. Solamente se puede introducir el proyecto de plan nuevo obtenido en la iteración  $z$ -ésima si éste mejora el valor de la función de objetivo.

## 5.2 Características que se pueden esperar

La eficacia del procedimiento (en caso de aplicación correcta), es mucho mejor de lo que podemos garantizar matemáticamente. En los

puntos siguientes, damos a conocer algunas características que se pueden esperar pero, que no son demostrables. Cuando damos a conocer esto, no solamente tomamos en cuenta el procedimiento general descrito en el tercer capítulo, sino, también las posibilidades de complementación descritas en el cuarto capítulo. Nuestra esencia es económica, por cuanto la aplicamos con ejemplos de planificación. Nuestra argumentación sin embargo, se puede extender a otro tipo de aplicación.

#### Cuarta característica (realidad).

Los procedimientos exactos finitos y de tipo simple de la programación lineal, dentro de ellos también el procedimiento DW, (por lo menos en casos característicos algo regulares en las tareas) van recorriendo los vértices del conjunto convexo que forman parte del conjunto de soluciones factibles; saltando de un vértice a otro. Regularmente, esto es absurdo desde el punto de vista económico, hay que partir de una solución al programa sin sentido, solamente los vectores unidad toman parte en la base. Después, cuando el programa se va haciendo comprensible, todavía el valor de la función de objetivo queda muy desfavorable. Solamente al final del procedimiento iterativo llegamos a un cierto programa comprensible desde el punto de vista económico y que no resulta absurdo. También desde el punto de vista de la función de objetivo llegamos a programas bastante favorables para después de varias iteraciones, llegar al óptimo.

El procedimiento aproximado propuesto de la tarea grande, parte de uno de los puntos internos del poliedro,<sup>15</sup> y ordinariamente se termina en un punto interno. Pero ya el punto interno obtenido es «bastante bueno». Eso está garantizado por la primera y la segunda características: la situación que en base de informaciones que están fuera del modelo se puede dar por un programa comparativo más o menos lógico, que tenga sentido y que forme parte dentro de los proyectos de plan. En las iteraciones siguientes, favorece la realidad del programa, su sentido y su comprensibilidad económica, no solamente en que, como en el procedimiento DW, sean factibles los  $[b_1]$  en los proyectos de plan, sino también, por lo menos una parte de ellos, sea factible  $[u_1; b_1]$ . Además, una gran parte de los últimos se puede evaluar en base

<sup>15</sup> Desde este punto de vista la eficacia del procedimiento por aproximación (probado por cálculos experimentales), se pudiera comparar con el procedimiento de «gradientes» inicial del punto interno.

de la división central límite, lo que garantiza de nuevo la comprensibilidad y la realidad de los programas de sector. De la misma manera las informaciones que están fuera del modelo favorecen la determinación de la evaluación de límites centrales.

Quinta característica. (Mejoramiento continuo).

Es probable, aunque no demostrable, que en el caso de una terminación hábil del paso ( $z - 4$ ) no solamente no se empeora, sino en gran parte se mejore el valor de la función objetivo. Esto está basado en dos consideraciones económicas:

a) «agrupación inter-sectorial».

En el paso ( $z - 4$ ) se preparan unos proyectos de plan nuevos que con fuentes limitadas y con productos, gradualmente se va ahorrando. (Ver el punto de vista B-D). Sin embargo, junto a esto también se efectúan unos proyectos de plan, que utilizan más de esas mismas fuentes y productos. (Ver punto de vista C). Eso da lugar a la agrupación inter-sectorial en la ( $z + 1$ )-ésima. Si desde el punto de vista de la función de objetivo eso es favorable, entonces se introduce un proyecto de plan de ahorro gradual de los productos y las fuentes límites en uno de los sectores, y se puede utilizar el ahorro de cualquier sector (en este caso de otro sector) para el proyecto de plan que necesita fuentes limitadas.

b) «sustitución entre factores».

En el paso ( $z + 4$ ) se elaboran también unos proyectos de planes que exigen más del límite con holgura (ver el punto de vista A) y menos del límite escaso (ver B y D). Si eso es favorable desde el punto de vista de la función de objetivo, entonces el programa central introduce un proyecto de plan nuevo y la sustitución entre los factores. Los métodos de programación matemática exactos, y también dentro de ellos los procedimientos de descomposición exactos, en definitiva aplican principios económicos similares. Esto se hace, sin embargo, observando cualquier fuente-factor, los rendimientos diferentes de los productos (precios sombra) simultáneos, y elaborando a un mismo tiempo pequeñas correcciones para cualquier utilización (por ejemplo, el procedimiento DW corrige al mismo tiempo cualquier evaluación de condición central en la función de objetivo del cálculo del sector; el procedimiento de juegos ficticios corrige al mismo tiempo cualquier componente del vector  $u_i$ ). Frente a esto, en el procedimiento aproximado (en el paso ( $z - 4$ )) en la formación de un nuevo pro-

yecto de plan, solamente tocamos una parte de las fuentes, factores, productos, o si acaso, tocamos unos cuantos, (con correcciones de límites, con cambios de funciones de objetivo), mientras tanto en los demás no hacemos alteraciones.

Los procedimientos de descomposición exactos solamente se utilizan para indicar a las correcciones las informaciones llevadas al modelo, o sea, esas informaciones que dentro del procedimiento iterativo él las calcula, (por ejemplo, en el procedimiento DW, los precios sombra de la tarea central, en el procedimiento por juegos ficticios, los precios sombra de las tareas de sector). Frente a esto, en el procedimiento aproximado, quien lo aplica sabe, independientemente del modelo, en la tarea grande, cuáles fuentes, factores, y productos son escasos o tienen holgura y dentro de eso en algunos sectores; tomando en cuenta esto, se pueden facilitar las agrupaciones inter-sectoriales y las sustituciones entre los factores. En parte, basándonos en esto y hasta cierto punto, en las informaciones centrales algorítmicas formadas en los pasos de la iteración ( $z - 1$ ), se decide en cuáles fuentes, factores y productos se hacen correcciones en el paso ( $z - 4$ ).

Tanto la agrupación inter-sectorial como la sustitución entre factores es facilitada, si por lo menos una parte de los proyectos de plan son «extremales», por ejemplo, existe un proyecto de plan que exija probablemente mucha inversión, pero que en forma extraordinaria ahorra fuerza de trabajo; otro proyecto el cual es probable que utilice fuerza de trabajo, sin embargo, extraordinariamente poca inversión. Sean los proyectos de plan correspondientes a la división límite central, los cuales en forma extremal, den preferencia a algunos sectores eficaces en la división de las fuentes en detrimento de los demás sectores. (Este tipo de programa extremal se puede elaborar fácilmente con el símbolo de los pares de vectores apropiados  $[u_i; g_i]$  y con la generación de proyectos de plan adecuados óptima  $[u_i; b_i; g_i]$ ). Se puede dar, que los proyectos de plan extremo no tengan ponderación cercana al 1, sin embargo, se pueden presentar con ponderación positiva en el programa mejorado. La existencia de ellos facilita que la tarea central cada vez en forma más elástica «revuelva» la asignación inter-sectorial más eficaz y la mejor combinación de los factores.

Sobre la cuarta característica ya recalcamos que hace falta un número necesario de «sentido común» para los proyectos que se acercan a la asignación acostumbrada. Sin embargo, junto a estos en la idea expuesta

anteriormente, es necesario, en interés de la preparación cada vez más rápida de una «mezcla» ventajosa para los proyectos de plan extremales, generados, unilateral y final.

En relación con el mejoramiento del programa, damos a conocer algunos apuntes sobre el detenimiento del cálculo. Esto, inevitablemente, será una decisión arbitraria, para lo cual, quien la aplique, al ponerla en práctica nuevamente, se puede apoyar en las informaciones fuera del modelo.

De una parte, basándose en las experiencias y en los conocimientos prácticos, es probable, que el mejoramiento  $Dz$  obtenido en la función de objetivo y en relación con el programa comparativo, resulte mucho o poco. En correspondencia con esto, se toma en cuenta, tanto el valor absoluto, como el valor relativo en el mejoramiento, de conformidad y de acuerdo al programa comparativo, teniendo en cuenta asimismo, el ritmo de cada iteración por separado.<sup>16</sup>

De otra parte, toma en cuenta el «precio» de una nueva iteración, que dimensiones de fuerza mentales y materiales requieren las soluciones de las iteraciones siguientes, o sea, si es necesario en la tarea actual, para las iteraciones siguientes, utilizar la capacidad de las máquinas computadoras y de los planificadores o sería más factible en lugar de eso, comenzar la solución de una tarea nueva, terminar con las primeras iteraciones en las variantes del programa nuevo.

Sin tener que establecer una descripción general, se puede decir que: dentro del marco del procedimiento aproximado, no es recomendable hacer más de cinco a diez iteraciones. Hasta ese momento, en mayor grado, se gastan las ideas heurísticas de los usuarios en la práctica. Si queremos llegar más lejos en el mejoramiento del programa, entonces, es más apropiado volver al procedimiento exacto, en el sentido del período 4.2 y responsabilizarnos con las lentas pero seguras inversiones de convergencia. Aquí quisiéramos apartarnos del derecho de

<sup>16</sup> Ya señalamos, que al aplicar el procedimiento DW-exacto, podemos estimar la distancia que nos separa del óptimo. De acuerdo a nuestra experiencia, sin embargo, la fórmula de estimación que da el límite superior, para aún obtener un mejoramiento, se sub-estiman el mejoramiento obtenido y sobre-estima el que queda por obtener.

Por eso no esperamos mucha utilidad de él, en su lugar, para el que lo aplica, en la práctica, dice mucho más el mejoramiento obtenido, en comparación con el programa comparativo.

nominación de «procedimiento aproximado». En la literatura, frecuentemente se utiliza esta denominación para unos algoritmos que no alcanzan en un número finito de pasos la solución exacta de una tarea, pero que convergen hacia la solución exacta y que en el caso de un número de iteraciones «a gusto pueden aproximarse a la solución con precisión». Sin embargo, la denominación «aproximado», no está rígidamente ocupada y por eso es permisible que nosotros, la utilicemos en un sentido elástico, para un procedimiento en el cual, solamente se cumplen las características descritas en el Capítulo 5.

Sexta característica (posible interpretación de los proyectos de plan).

En el procedimiento DW-exacto original, está clara la significación del programa óptimo, sin embargo, en las iteraciones intermedias, los proyectos de plan obtenidos no tienen ninguna significación económica marcada, como tampoco, ningún símbolo propio para conocerla.

Frente a esto, en el procedimiento aproximado tratamos, que en cada proyecto de plan exista algún tipo de característica económica autónoma y un «perfil» marcado. Por ejemplo, «un programa de ahorro de trabajo vivo, junto al marco de inversiones holgadas», o un «ahorro de dólares para asignarlos a inversiones nacionales», etc., etc. En la determinación de los marcos característicos especiales de esos proyectos de plan, toma parte el paso ( $z - 4$ ) y de nuevo juegan un importante papel las informaciones externas al modelo que posean los usuarios.

En base a esto, se percibe claramente, cuáles son los pasos meritorios que debemos dar en la modificación de las restricciones y en los cambios de las funciones de objetivo, y de esta manera dar el «perfil» del proyecto de plan.

Unido a esto, también garantiza que no solamente el resultado final del programa mejorado  $x\{z\} = X\{z\} \cdot Y\{z\}^*$  se puede analizar en forma económica directa.

Fundamentando lo dicho hasta ahora, resumamos en qué relaciones utiliza el procedimiento aproximado las informaciones fuera del modelo:

- a) En la construcción del programa comparativo que esté entre los proyectos de plan.
- b) En la determinación de las particiones de limitantes centrales.

- c) En la designación de los pares de vectores  $[u_i; g_i]$  que sirven para la formación de los nuevos proyectos de plan, también la agrupación inter-sectorial racional así como, la sustitución racional entre factores, son todos favorecidos.
- d) En la formación del «perfil de los proyectos de plan».
- e) En la evaluación del plus-producto alcanzado en comparación con el programa comparativo, y unido a esto, en el detenimiento del cálculo.

Una de las tareas de las investigaciones que servirían para el mejor desarrollo del método descrito en el artículo, serían: nuevas ideas, elaboración de consejos para el aceleramiento del mejoramiento de programas, y una terminación más eficaz en los pasos heurísticos.

### 5.3 Experiencias prácticas

En el procedimiento aproximado elaboramos algunos cálculos experimentales pequeños. Además, en una ocasión lo empleamos a un problema mayor en la práctica, en el marco de la programación de la economía nacional del año 1966-70.

En la tarea grande, en total tomaron parte 2 055 restricciones y 2 424 variables de actividad (sin incluir las variables artificiales). A la solución exacta de la tarea le faltaron las condiciones de técnicas de cálculo necesarias, o de forma directa, o sea, si hubiéramos querido resolver el problema sin descomposición, el cálculo hubiera sido demasiado lento. Eso por una parte, hubiera requerido un tiempo de máquinas muy alto y demasiados gastos; por otra, hubiera elevado el peligro de errores de cálculo y con esto la exactitud del resultado final.

En los epígrafes 3 y 4 del artículo, aplicamos el procedimiento aproximado. Esto nos dio la posibilidad de calcular en total 22 variantes del plan, o sea, junto a los pares de vectores  $[b, c]$  determinamos el programa mejorado de 22 diferentes  $x$  z.

Ya en las primeras iteraciones, sistemáticamente llegamos a unos programas en los cuales obtuvimos ponderación positiva  $t_1^0$  comparativo, los proyectos de plan óptimos de vector  $t_1^1$  y unido a estos otros proyectos de plan.

Un considerable mejoramiento del valor de la función objetivo, muestran los programas mejorados en comparación con el programa comparativo; algunos ejemplos:

- a) El programa máximo del consumo de la población asegura un 5,2% más que el programa comparativo.
- b) El programa mínimo de utilización de trabajo vivo ahorra un 6%, en comparación con el requerimiento de personal del programa comparativo.
- c) El programa óptimo del balance de divisas capitalistas mejoró en 136 millones de dólares la balanza de dólares del país, en comparación con el programa comparativo.

Los incrementos considerables de los productos mencionados, los obtuvimos de manera tal, que no gastamos las posibilidades intrínsecas del procedimiento por aproximación. Relativamente, elaboramos pocos proyectos de plan, hicimos pocas iteraciones, pues el tiempo nos apuraba. En caso de nuevos cálculos similares y como causa de los experimentos y con una organización del trabajo más eficaz, nosotros podríamos aplicar el procedimiento aproximado más eficientemente.

#### 5.4 Sobre la autorización de los procedimientos aproximados

Utilizamos la oportunidad, donde dimos a conocer el procedimiento concreto descrito en el artículo, para hacer algunas observaciones sobre la autorización de la aplicación de los métodos aproximados en las tareas de planificación y económicas.

De ninguna manera quisiéramos ideologizar nuestra situación apretada. Así por ejemplo, en la programación de la economía nacional del año 1966-70, nosotros hubiéramos aplicado con mayor gusto el procedimiento exacto para la tarea dada, pero el problema verdadero no es ese, sino, el siguiente —bien conocido para todos los programadores—:

Supongamos que ya hemos resuelto el carácter matemático del modelo y quedémonos en el caso hasta ahora tratado, queremos efectuar una programación lineal. En este caso no es la dimensión del modelo la que está dada, sino (en un país dado, en un tiempo dado, o para un grupo de investigación determinado), que están dados los límites de técnicas de cálculo. La velocidad y capacidad de memorias de las máquinas computadoras con que contamos, y la esfera de gastos y el tiempo-máquina que puede utilizarse, son las que determinarían el límite que por el procedimiento exacto, darían la dimensión de la tarea de programación lineal por resolver. El dilema del programador del modelo es:

—O se satisface con esa medida, o si quiere un modelo mayor, tiene que satisfacerse en lugar de con la solución exacta, con la solución por aproximación.

En los dos casos, damos concesión en detrimento de la exactitud. En el último caso es evidente. Es conocido ese punto de vista, el cual solamente ese tipo de imprecisión está dispuesto a tomar en cuenta, así como unilateralmente desaprobado. Sin embargo, no sería correcto olvidarse de la otra relación. La creación del modelo en sí es también «procedimiento por aproximación», todo el modelo es una réplica simplificada e imprecisa de la realidad. Mientras más factores dejemos de tomar en cuenta, cada vez que estrechemos más las posibilidades de escoger, cada vez que agreguemos más (o sea, sumemos en forma directa cosas que no se pueden sumar), siempre será más impreciso el modelo en dos sentidos. Por una parte, el programa factible de un modelo agregado, a lo mejor no se puede cumplimentar en la realidad, pues no satisface toda una serie de condiciones limitantes existentes, pero que no están dichas. Por otra parte, es posible que el programa óptimo exacto de un modelo agregado sea sub-óptimo en la realidad, pues entre las variables no se tomaron en cuenta aquellas alternativas reales que en el programa óptimo de un modelo más detallado, a lo mejor, podrían estar presentes.

En el cálculo elaborado con los modelos, se llevaron a cabo dos procesos. Primeramente, la realidad infinitamente complicada, la transformamos en un problema matemático, después, ese problema matemático lo solucionamos. La respuesta del programador del modelo es: en qué modelo se es más preciso, en detrimento de la precisión del otro proceso.

Ese es un problema «general» y no solamente está relacionado con las actuales dificultades de técnicas de cálculo en Hungría. Si mañana tuviéramos máquinas 10 veces más amplias que las que hay hoy, de nuevo nos preguntaríamos: ¿Nos satisfacemos o no, con que la tarea resuelta aún ayer, con el procedimiento aproximado, lo resolvamos en forma exacta o seguimos hacia adelante, en la construcción del modelo; con un modelo de mayor magnitud, en el cual reflejemos la realidad en forma más rica? (Por ejemplo: elaboremos en lugar de planificación dinámica de un periodo, la de varios periodos). Por eso solamente, continuemos con la ayuda de procedimientos de cálculos aproximados.

Ese dilema no tiene una solución válida, general y única. En la práctica, lo más factible es andar por los dos caminos paralelamente. Podríamos elaborar modelos más agregados y en los mismos, realizar cálculos exactos, así como, elaborar modelos más desagregados y en ellos realizar cálculos por el procedimiento aproximado. En el experimento de los métodos de programación matemática del plan quinquenal húngaro, precisamente eso fue lo que hicimos: Con el procedimiento exacto, calculamos un modelo de programación lineal de más o menos  $80 \times 100$  y con el procedimiento aproximado, un modelo de más o menos  $2000 \times 2500$ . Los resultados de los dos tipos de modelo se pueden comparar: se pueden utilizar para la inspección recíproca de los dos.

En fin de cuentas llegamos a un problema más amplio de la planificación matemática, el cual aquí, solamente tocamos de pasada: la relación de las máquinas computadoras y la persona como planificador. (Entendido como planificador «vivo»).

En la literatura sobre la simulación se ha extendido la expresión «máquina-hombre». Los experimentos que llaman así son los que en una parte de las operaciones experimentales, son elaborados por una máquina computadora basándose en algoritmos pre-fijados, sin embargo, las otras partes son improvisadas por las personas que toman parte en el experimento, analizando mientras tanto, los resultados obtenidos en la máquina. En analogía con esto, en el caso del procedimiento aproximado se puede hablar de planificación «máquina-hombre». Esto lo dimos a conocer en el esquema expuesto en el tercer epígrafe de las inter-relaciones entre los círculos y los rectángulos.

Debemos tener presente, que no solamente en este caso es que se trata de eso. Ese tipo de cooperación algorítmica, operaciones mecánicas y heurísticas, intuitiva, entre las actividades improvisadas del hombre en gran escala, son características de la planificación matemática. Aún en el caso de la aplicación de procedimientos exactos, también son muchas las ideas heurísticas, en la creación del modelo antes del cálculo, la intuición, en la estimación subjetiva en parte de los datos, entre el trabajo, las series de cálculos en la designación de los análisis de sensibilidad, y por fin, en la evaluación de los resultados, análisis y aporte de la decisión real.

## 6. PARA LA INTERPRETACION DEL PROCEDIMIENTO: CONFLICTO Y COMPROMISO

Para los algoritmos de programación matemática y en especial para los procedimientos de descomposición, sistemáticamente se puede dar una interpretación económica, la cual analiza el procedimiento, tanto como el modelo abstracto formal de fundamentación de la decisión. El rasgo común de cualquier interpretación es que, no sale a relucir con esa exigencia que formaliza todos los rasgos fundamentales de la planificación y fundamentación de las decisiones. Sistemáticamente los diferentes algoritmos de la planificación hacen sobresalir solamente uno u otro momento de la fundamentación de las decisiones.

Al procedimiento por aproximación descrito en nuestro artículo, también se le puede dar una interpretación económica (es más, fuera de eso; interpretación sociológica en general). Cuando exponemos la interpretación, naturalmente, nos tenemos que separar de los problemas relacionados con las técnicas de cálculo. O sea, en esta relación no es permisible que pensemos que existe una tarea grande original a cuya solución queremos aproximarnos: que el punto de vista principal de la formación de los proyectos de plan sea facilitar el mejoramiento de la función objetivo correspondiente a la tarea grande, etc. La interpretación es la siguiente:

En todos los organismos —sea el Estado como unidad de orden administrativo; Instituto político-social; Empresa; etc.— existen 'conflictos' internos. Partes diferentes, unidades secundarias, puntos de vista propios de grupo; tienen intereses reales o presumidos y de acuerdo a esto, mantienen una postura en las cuestiones actuales. Sus puntos de vista, proposiciones y recomendaciones, muchas veces se contradicen. Por ejemplo, cada unidad secundaria quiere recibir más de las fuentes de suministro común o de organización y con menos sacrificio desea contribuir. Dentro de las unidades secundarias también diferentes grupos divergen el uno del otro en los intereses propios de la unidad secundaria. A pesar de los conflictos, en la vida común del organismo, es posible que surja algún tipo de compromiso entre los proyectos contradictorios. En la formación del compromiso, pueden jugar su papel diversos criterios, de acuerdo a los que traen la decisión superior común de cómo valorizar el interés general.

En la cuestión de los conflictos y compromisos dentro de los organismos, se ocupan mucho los sociólogos y economistas modernos, sobre todo, basándose en estimaciones empíricas.<sup>19</sup>

El procedimiento aproximado —en especial, el que fue realizado con ayuda del procedimiento por aproximación, dado por la serie de cálculos del epígrafe 4— se puede concebir, como los proyectos existentes que tienen conflictos entre sí y la formalización del proceso de formación de compromisos, obtenidos entre ellos. En dos planos existen conflictos. Por una parte, en la unidad base, dentro del *i*-ésimo sector, compiten entre sí los proyectos de planes. Eso lo consideramos, pues cada uno tiene un perfil propio marcado, como los que expresan dentro del sector las diferentes apreciaciones o puntos de vista, las distintas divergencias. En la medida que el sector represente una empresa, de esa manera, los proyectos de plan pueden significar los diversos puntos de vista de los grupos de la misma.<sup>20</sup> Por otra parte, existen conflictos entre los sectores; en la división común de las fuentes de suministros, en el mantenimiento de las cargas de las obligaciones comunes. La tarea central del procedimiento por aproximación forma un compromiso razonable entre los proyectos existentes en conflicto. Aunque sea en la vida, aquí también se forma el compromiso en el proceso iterativo. Primero nace un pre-compromiso provisional (1ra. iteración). Analizando las partes débiles de este, los que toman las decisiones, piden nuevos proyectos, luego, tomando en cuenta los mismos, tratan de alcanzar un compromiso mejor, etc.

Esta interpretación del procedimiento de ninguna manera estropea, es más hace más real esa situación que aquí no se trata de un procedimiento exacto sino aproximado. Tampoco en la realidad, de acuerdo a algún criterio estricto «óptimo», se encomiendan hacia el compromiso ese tipo de procesos. En lugar de eso, se conforman con que la decisión final sea «bastante buena» («second best»), «acceptable». En lugar de la validez estricta de un sólo criterio óptimo, mejor experi-

<sup>19</sup> Especialmente los sociólogos que se ocupan del análisis de la organización «formal»; también los representantes de la así llamada escuela «behaviorista», examinan desde este punto de vista la cuestión.

<sup>20</sup> Por ejemplo, dentro de una empresa, el departamento de finanzas propone un programa de orientación de elevación de ganancias; ventas, trata de favorecer la producción de productos demandados en mejor forma; desarrollo técnico exige la elevación acelerada de la productividad. Dentro del último, uno de los grupos de ingenieros propone la tecnología «A», el otro la «B», etc.

mentá hasta el final con varios tipos de puntos de vista de formación de compromisos lo que en caso nuestro del procedimiento formalizado, corresponde a que en esa misma tarea central, realizamos una serie de cálculos, pero con varias funciones de objetivo.

De acuerdo con nuestra opinión, el conflicto y el compromiso en la planificación en la toma de decisiones, es un momento de suma importancia. Nuestro procedimiento aproximado solamente es una de las posibles formalizaciones; por lo tanto, sería beneficioso en este sentido, experimentar más en la formación de conflictos y compromisos para la aplicación y elaboración de otros modelos matemáticos.

(Budapest, 1968, XII-16).

Publicado en Szigma, 1969, II número 1.

## BIBLIOGRAFÍA

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| <b>CYRET, R. M.<br/>MARCH, J. G.</b> | A Behavioral Theory of the Firm Englewood cliffs, 1964. Prentice Hall.   |
| <b>DANTZIG G. B.<br/>WOLFE, P.</b>   | The descomposition algorithm for linear programs. <i>Econométrica</i> , 1969 No. 4 pág. 767-778.   |
| <b>KORNAI JÁNOS<br/>LIPTÁK, T.</b>   | Kétszintű tervezés; Játélméleti modell és iteratívszámítási eljárás népgazdasági távlati tervezési feladatok megoldására. (Planificación a dos niveles: modelo de teoría de juego y procedimiento de cálculo iterativo para la solución de tareas de planificación a largo plazo de la economía nacional). Comunicados del Instituto de Investigaciones Matemáticas de la Academia de Ciencias Húngara, 1962, No. 4, pág. 577-621. |
| <b>KORNAI JÁNOS</b>                  | Közelítő eljárás a kétszintű tervezéshez (Procedimiento por aproximación para la planificación a dos niveles). Informaciones de la programación de la economía nacional 1966-70 1966 No. 17.   |
| <b>KORNAI JÁNOS<br/>UJLAKI-NÉ</b>    | Összevont programozási modellalkalmazása az ötévestervezésben. (Aplicación del modelo de programación reducido en  |

**KORNAI JÁNOS**

la planificación quinquenal). Revista Económica, 1967, No. 5, pág. 552-565.

A népgazdasági szintü számítások értékelése. (La evaluación de los cálculos a nivel de la economía nacional). Informaciones de la programación de la economía nacional 1966-70, 1968 No. 29.

**MALINVAND, E.  
BACHARACH, M. O. L.**

Activity Analysis in the theory of Growth and Planning. London —New York 1967. McMillan— St. Martín Press.

**MARCH, J.  
SIMON, H. A.**

Organization New York. 1958. Wiley.

**STAHL, J.**

Az optimun értékének beeslése egy lineáris programozási feladatnál. (Estimación del valor óptimo en una tarea de programación lineal). Información Electrónica. 1966 No. 2, pág. 106-7.