Simonovits András:

Kontrollszerkesztői megjegyzés
Kornai János: Központosítás és piaci reform
című könyvének 10. fejezetének egyik tételéről

Ebben a jegyzetben Kornai János–Lipták Tamás: „A nyereségérdekeltség egyes gazdasági hatásai a szocialista vállalatokra – Matematikai elemzés" című cikke (Kornai János: *Központosítás és piaci reform*, Kalligram, Pozsony, 2013, 479–502. o.) angol eredetijének („A Mathematical Investigation of Some Economic Effects of Profit Sharing in Socialist Firms", *Econometrica,* Vol. 30 (1962), No. 1, 140–161. o.) egy tételét [vö. (55)–(56)] pontosítom, majd bizonyítását egyszerűsítem [495–496. o.].

1. Rekonstrukció

Állítás: Az $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ jelöléssel

$$\text{ha} \qquad \frac{k_r + G'(x^*)}{a_r} < Q^*, \qquad \text{akkor} \qquad x_r^* = M_r, \tag{55}$$

míg

$$\text{ha} \qquad \frac{k_p + G'(x^*)}{a_p} > Q^*, \qquad \text{akkor} \qquad x_p^* = 0. \tag{56}$$

Be kell vezetni az indexek R halmazát, amelyekre (55) áll, és az S halmazát, amelyekre az egyenlőtlenségek helyett (kivételesen) egyenlőség áll, de az x_s^*-ek maradékösszegen belüli eloszlása határozatlan:

$$\text{ha} \qquad \frac{k_s + G'(x^*)}{a_s} = Q^*, \qquad \text{akkor} \qquad \sum_{s \in S} x_s^* = x^* - \sum_{r \in R} x_r^*. \tag{$*$}$$

(Az (56) összefüggéshez tartozó indexhalmaz jelölésére nincs szükség.)

2. Az egyszerű bizonyítás

Az eredeti bizonyítás feleslegesen bonyolult, mert nem hivatkozik, hanem burkoltan újra levezeti a lokális maximum szükséges feltételét. Itt egy egyszerű bizonyítást adunk, amely hivatkozik a nevezett feltételre.

Az alapötlet a következő. Ha az $F(u)$ sima skalár–skalár függvénynek a $[0, M]$ szakaszon minimuma van u^*-ban, akkor 3 aleset lehetséges: $u^* = M$ és $F'(M) \leq 0$, $u^* = 0$ és $F'(0) \geq 0$ vagy $0 < u^* < M$ és $F'(u^*) = 0$.

A szerzőket követve csak az első alesetet bizonyítjuk, ahol $u = x_r$, $M = M_r$. Bevezetjük az

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_n), \qquad A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \qquad K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$$

jelöléseket, s az optimumban rögzítve, de nem jelölve a x_r-en kívüli változókat, külön felírjuk az $F(u) = Q(\mathbf{x}) = V(u)/W(u)$ hányadosfüggvény számlálóját és nevezőjét:

$$V(u) = K(\mathbf{x}) + G(x) \qquad \text{és} \qquad W(u) = A(\mathbf{x}).$$

Most F deriváltját a következő alakban írjuk föl:

$$\left(\frac{V}{W}\right)' = \frac{V'W - VW'}{W^2} = \frac{V'}{W} - F\frac{W'}{W}.$$

Ekkor kényelmesen felírhatjuk a jobb oldali sarokminimum szükséges feltételét:

$$0 \geq F'(u^*) = \frac{K'_{x_r}(\mathbf{x}^*) + G'(x^*)}{A(\mathbf{x}^*)} - \frac{K(\mathbf{x}^*) + G(x^*)}{A(\mathbf{x}^*)} \frac{A'_{x_r}(\mathbf{x}^*)}{A(\mathbf{x}^*)}.$$

Behelyettesítéssel és rendezéssel adódik (55).