K. J. ARROW

EGYENSÚLY ÉS DÖNTÉS

VÁLOGATOTT TANULMÁNYOK

KÖZGAZDASÁGI ÉS JOGI
KÖNYVKIADÓ

K. J. Arrow:

EGYENSÚLY ÉS DÖNTÉS

„Gazdag sokoldalúság, az eredeti gondolatok rendkívüli bősége jellemzi K. J. Arrow munkásságát. Merőben idegen tőle az a szűk specializálódás, amely sok közgazdász kutatót, köztük nem egy jelentős tudóst is jellemez... Az általános egyensúly, a hatékonyság és a decentralizálás elmélete; a bizonytalanság közgazdasági problémái; a növekedés, a technikai haladás, az intertemporális választás kérdései; a jóléti közgazdaságtan — íme néhány Arrow munkásságának fő fejezetei közül. S a felsorolt közgazdasági témákkal együtt vagy néhány művében saját tudományágán túllépve, fontos eredményekkel gazdagította a matematikát, a statisztikát, a politikai tudományt és a filozófiát is" — írja Kornai János kötetünk bevezetőjében az 1972. év közgazdasági Nobel-díjasáról, K. J. Arrow-ról.

Kenneth Joseph Arrow 1921. augusztus 23-án született New Yorkban. Felsőfokú tanulmányait New York City College-ban kezdte, majd a Columbia Egyetemen folytatta. Tanárai közé tartozott az általános egyensúlyelmélet egyik úttörője, a magyar származású, Bécsben nevelkedett matematikus, Abraham Wald. „A társadalmi választás és az egyéni értékek" című doktori disszertációja már igen fiatalon nevessé tette.

Közgazdasági kutatómunkáját a Yale Egyetemen kezdte 1947-ben. 1948—49-ben a Chicagói Egyetemen volt tanársegéd. 1950-ben kapott docensi címet a kaliforniai Stanford Egyetemen, ahol másfél évtizeden át tanított mint a közgazdaságtan és a statisztika professzora.

Az oktatás-kutatás mellett más területeken is tevékenykedett. Így 1948-ban a RAND Corporation konzultánsa, 1962-ben a Kennedy-kormány gazdasági tanácsadója volt.

K. J. Arrow

EGYENSÚLY ÉS DÖNTÉS

K. J. Arrow

EGYENSÚLY ÉS DÖNTÉS

Válogatott tanulmányok

KÖZGAZDASÁGI ÉS JOGI KÖNYVKIADÓ
BUDAPEST 1979

A tanulmányokat válogatta és a bevezetőt írta:

KORNAI JÁNOS

Fordította:

FARKAS KATALIN

SIMONOVITS ANDRÁS

SZABÓ JUDIT

A fordítást az eredetivel egybevetette:

MARTOS BÉLA

SZEPESI GYÖRGY

© *Farkas K.—Simonovits A.—Szabó J. 1979*
Hungarian translation

ISBN 963 220 828 5

KÖZGAZDASÁGI ÉS JOGI KÖNYVKIADÓ
KIADÁSÉRT FELEL: KERESZTES TIBOR IGAZGATÓ
79-1037 — SZEGEDI NYOMDA
K-3981
BUDAPEST, 1979
SZERKESZTÉSÉRT FELEL: DR. FÉBÓ LÁSZLÓ
SZERKESZTETTE: PATKÓS ANNA
MŰSZAKI VEZETŐ: BÜCHLER ALFRÉD
MŰSZAKI SZERKESZTŐ: VÁGÓ MAGDOLNA
A VÉDŐBORÍTÓT ÉS KÖTÉSTERVET KÉSZÍTETTE: GINÁCS LÁSZLÓ
FORMÁTUM: B/5; TERJEDELEM 36,2 (A/5) ÍV MELLÉKLETTEL
PÉLDÁNYSZÁM: 2600; BETŰTÍPUS: NEW TIMES
KG—3047—k—7982

Tartalomjegyzék

Kornai János: Bevezető 7

I.
EGYENSÚLY ÉS PIAC

K. J. Arrow—G. Debreu: Az egyensúly létezése versenygazdaságban *(Szabó Judit)* 21
K. J. Arrow: A gazdasági egyensúly *(Farkas Katalin)* 49
K. J. Arrow—L. Hurwicz: Az erőforrás-elosztás decentralizálása és számítási eljárásai *(Simonovits András)* 73
K. J. Arrow: Általános gazdasági egyensúly: cél, vizsgálati módszerek, kollektív választás *(Farkas Katalin)* 131

II.
NÖVEKEDÉS ÉS INTERTEMPORÁLIS PROBLÉMÁK

K. J. Arrow—M. Kurz: A közületi beruházás hozama és az optimális költségvetési politika *(Simonovits András)* 161
K. J. Arrow: Az igazságos megtakarítás Rawls-féle elve *(Simonovits András)* 177
K. J. Arrow—T. Harris—J. Marschak: Optimális készletpolitika *(Simonovits András)* 191
K. J. Arrow: Az egyetemi oktatás rostáló szerepe *(Szabó Judit)* 213

III.

TERMELÉS ÉS TECHNIKAI HALADÁS

K. J. Arrow—H. B. Chenery—B. S. Minhas—R. M. Solow: Helyettesítés a tőke és a munka között és a gazdasági hatékonyság *(Szabó Judit)* 235
K. J. Arrow: A gazdasági jólét és a feltalálást szolgáló erőforrások elosztása *(Farkas Katalin)* 283
K. J. Arrow: A termeléssel szerzett tudás jelentősége a gazdasági elmélet számára *(Szabó Judit)* 299
K. J. Arrow—D. Levhan—E. Sheshinski: Termelési függvény a gépjavítási feladathoz *(Szabó Judit)* 321

IV.

BIZONYTALANSÁG, INFORMÁCIÓ ÉS ORGANIZÁCIÓ

K. J. Arrow: Döntés kockázat vállalásával: a különböző elméleti irányzatok *(Szabó Judit)* 335
K. J. Arrow: Információ és gazdasági viselkedés *(Farkas Katalin)* 367
K. J. Arrow: Napirendi kérdések a szervezetekben *(Farkas Katalin)* 383
Arrow műveinek bibliográfiája időrendi sorrendben 401

Bevezető

Gazdag sokoldalúság, az eredeti gondolatok rendkívüli bősége jellemzi K. J. Arrow munkásságát. Merőben idegen tőle az a szűk specializálódás, amely sok közgazdász kutatót, köztük nem egy jelentős tudóst is jellemez, aki szinte egész életén át ugyanazt a témát variálja. Az általános egyensúly, a hatékonyság és a decentralizálás elmélete; a bizonytalanság közgazdasági problémái; a növekedés, a technikai haladás, az intertemporális választás kérdései; a jóléti közgazdaságtan — íme néhány Arrow munkásságának fő fejezetei közül. S a felsorolt közgazdasági témákkal együtt, vagy néhány művében saját tudományágán túllépve fontos eredményekkel gazdagította a matematikát, a statisztikát, a politikatudományt és a filozófiát is.

Kötetünk összeállításakor igyekeztünk érzékeltetni Arrow gondolkodásának sokoldalúságát. Megpróbáltunk ízelítőt adni alkotó tevékenységének ha nem is valamennyi, de legalábbis a legfontosabb területeiről. Lehetőleg olyan műveket közöltünk, amelyben maga a szerző vezeti be az olvasót az új ismeretekbe, maga ad összefoglaló áttekintést a fő gondolatokról. Felesleges és szerénytelen vállalkozás lenne most itt, a bevezetőben további összevonással kísérletezni: még kivonatosabb szemelvényeket adni az amúgy is szemelvényes anyagból, összefoglalni az összefoglalásokat. Az előszó nem tudja és nem is akarja megtakarítani az olvasó számára maguknak a műveknek az áttanulmányozását és önálló értékelését — azt a rendkívül erős koncentrációt igénylő szellemi fáradtságot és örömöt, amivel a tanulmányozás együtt jár. Nem törekszem arra, hogy átfogó értékelést adjak Arrow egész munkásságáról. Ehelyett inkább csak néhány személyes megjegyzésre szorítkozom. Először észrevételeket fűzök az *általános egyensúlyelmélettel* és a *társadalmi választás elméletével* foglalkozó tanulmányokhoz. Ha Arrow valamennyi munkájának színvonala magas hegyvonulathoz hasonlítható, az említett két témakörhöz adott hozzájárulásai még e hegyláncból is óriás csúcsokként emelkednek ki. Utána pedig szeretném megrajzolni Arrow *tudományos arcképének* néhány vonását.

Az általános egyensúlyelmélethez

Az általános egyensúlyelmélet modern formája összefonódott *Arrow* és *Debreu* nevével. A tudomány története számos példát szolgáltat arra, hogy az ilyen névadás bizonyos fokig önkényes, hiszen egy-egy nagy teljesítmény érett formában való megszületését sok kísérlet, félig érett eredmény előzi meg, amelyek nélkül az létre sem jöhetett volna. S mégis, rendszerint mindig kimutatható valamilyen sajátosan nagy jelentőségű hozzájárulás, ami indokolja: miért keresztelik el a szóban forgó felfedezést éppen egyik vagy másik tudósról. Ez a helyzet az Arrow—Debreu modellel is.

Ebben az esetben olyan szellemi áramlatról van szó, amelynek eredetét két évszázadra, *Adam Smith*ig vezethetjük vissza. Száz évvel később jutott el *Walras* odáig, hogy megalkossa a nagyszámú eladót és vevőt koordináló „láthatatlan kéz" első átfogó matematikai modelljét. Walras munkájában már ott vannak a nyolcvan évvel későbbi Arrow—Debreu modell legfontosabb elemei — de a matematikai formalizmus még nem eléggé egzakt, a logikai építmény még nincsen eléggé szigorúan megszerkesztve. Ettől kezdve számos kutató tett újabb és újabb kísérleteket a walrasi problémák megoldására. Kiemelkednek közülük két nagy magyar származású matematikus, *Wald Ábrahám* és *Neumann János* munkái, *Cassel* svéd, *Hicks* angol, *Samuelson* és *Koopmans* amerikai közgazdászok eredményei. Arrow-val és Debreu-vel egyidőben, de tőlük függetlenül alkotott rokon modellt és bizonyított hasonló tételeket *Lionel McKenzie* amerikai kutató. És mégis, e sok előzmény, rokon munka ellenére teljesen jogosnak tűnik, hogy a modern általános egyensúlyelmélet *Arrow—Debreu elmélet*nek neveztessék. Arrow és Debreu először egymástól függetlenül kezdték el kutatásaikat, majd egyesítették erőiket és közösen publikálták azt a tanulmányt, amely az általános egyensúlyelmélet „kanonikus modelljévé" vált.[1] Azóta száz és száz egyensúlyelméleti modell keletkezett, de mindegyikről kimutatható, hogy az Arrow—Debreu modell mutációja.

Az Arrow—Debreu modell az évszázados múltú kutatás tökéletesen érett, tömör, logikailag kristálytiszta összefoglalása. Ez a tömörség és tisztaság teszi alkalmassá arra, hogy a további kísérletek és kutatások kiindulópontja, leggyakrabban idézett hivatkozási forrása legyen. A kötetünkben közölt tanulmány, Arrow Nobel-előadása röviden áttekinti a *modell szerkezetét:* a gazdasági életnek mely szereplői jelennek meg ebben, melyek e szereplők viselkedésének szabályosságai, milyen a rendszer információs struktúrája.[2] Arrow és Debreu megfogalmazták azokat a *kérdéseket*, amelyekre modellük segítségével válaszolni kívánnak — és, mint ismeretes, a kérdés megfogalmazása tulajdonképpen még fontosabb egy elmélet életében, mint az első válaszok, amelyeket a kérdésre megadnak. Arrow tanulmányai, valamint Debreu-vel,

[1] Ezt a találó jelzőt *Weizsäcker* adta abban a tanulmányában, amelyet a Nobel-díjat odaítélő bizottság felkérésére írt Arrow munkásságának értékelésére [11].

[2] Az általános egyensúlyelmélet legfontosabb, legszélesebb áttekintést adó tankönyve *Arrow—Hahn* [1] munkája. Magyar nyelvű bevezetőként szolgálhat *Hegedűs—Zalai* [3] könyve.

Hurwiczcal és másokkal közösen írott munkái először azt a kérdést tisztázzák: *létezik-e* a matematikai modell adott szerkezete mellett a piacnak olyan állapota, amelyben a decentralizált koordinációs folyamat résztvevői kölcsönösen egymáshoz igazítják keresletüket és kínálatukat, és ezzel együtt létezik-e olyan árrendszer, amely ezt a koordinációt szabályozza. Az egzisztenciabizonyítások után kerül sor annak vizsgálatára: milyen feltételek mellett *stabil* a piac walrasi egyensúlya? Emellett kezdettől fogva összekapcsolódott az egyensúly létezésének és stabilitásának elemzése az egyensúly *minősítésével, megítélésével.* Vajos *hatékony-e* (efficiens-e) az a gazdálkodás, amely walrasi egyensúly mellett megy végbe? Mennyiben elégíti ki a *társadalmi jólét* meghatározott követelményeit? Eleget tesz-e legalább az elemi jóléti követelménynek, a *Pareto-optimalitás* elvének?[3]

Az Arrow—Debreu modellből kisarjadzott modern általános egyensúlyelmélet alkotja a neoklasszikus közgazdasági gondolkodás elméleti magvát. A neoklasszikus közgazdaságtant, s ezen belül is az általános egyensúlyelméletet heves támadások érték az utóbbi évtizedekben.[4] Bírálták — az elmélet síkján — feltételezéseinek és kérdésfeltevéseinek életidegenségét. Bírálták — a politika és ideológia síkján — az elmélet társadalmi sterilitását, az elvonatkoztatást a társadalmi osztályok és csoportok összeütközéseitől, a tulajdonviszonyoktól, a jövedelemelosztás problémáitól és így tovább.

Magam is az általános egyensúlyelmélet bírálói közé tartozom. Azt a kritikát, amelyet „Anti-Equilibrium" c. könyvemben kifejtettem, most is jogosnak vélem. Nem akarom ezen a helyen megismételni az ott előadottakat. Felvetődhet a kérdés: vajon nem következetlen magatartás-e, hogy könyvemben élesen kritizálom a modern általános egyensúlyelméletet és ugyanakkor e kötet válogatójaként mégiscsak előmozdítom ugyanennek az elméletnek a terjedését?

Véleményem szerint ez nem következetlenség. Nem kívánom, hogy az „Anti-Equilibrium" bármely olvasója gondolkodás nélkül higyjen nekem, vagy a neoklasszikus elmélet bármely bírálójának. Ismerje meg első kézből a megbírált elméleteket. Szembesítse őket saját maga a bírálatokkal — amelyek egyébként maguk sem egyöntetűek, hanem sokféle szemszögből kritizálnak —, és utána alakítsa ki önálló

[3] A walrasi piac akkor van Pareto-optimális állapotban, ha már nem változtatható meg oly képpen, hogy legalább egy fogyasztó jóléte növekedjék anélkül, hogy más fogyasztóké ne romolna. Adott rendszerben általában végtelenül sokféle Pareto-optimális állapot létezik, a vagyon és jövedelem különféle lehetséges eloszlásainak megfelelően.

[4] A bírálók sorában kiemelkedő szerep jutott az angliai Cambridge közgazdászainak, akik *Ricardo, Marx, Keynes, Kalecki* és *Sraffa* elméleteire támaszkodva fejtették ki gondolataikat. (Lásd pl. *Káldor* [5] cikkét az egyensúlyelmélet irrelevanciájáról, vagy összefoglalásképpen *Joan Robinson* és *Eatwell* [8] tankönyvét.)

Az USA-ban *M. Hollis—E. Neill* [4] és *B. Ward* [10] munkáira hívjuk fel a figyelmet a neoklasszikus iskolát támadó radikális bírálatok közül.

A magyar nyelvű irodalomból *Erdős Péter* [2] könyvét (II. fejezet) és *Mátyás* [7] elmélettörténetét emeljük ki.

saját véleményét. A tudományos igazságnak nincsen szüksége a közlési monopólium adta oltalomra. Ehelyett az olvasó értelmében és ítélőképességében kell megbíznunk. Az ellentétes tudományos álláspontok ütköztetése megkönnyíti az igazság kiderítését; fejleszti a közgazdászok — és elsősorban a fiatalok, a diákok — problémameglátását és önálló gondolkodását.

Ez már önmagában is elegendő érv lenne Arrow egyensúlyelméleti műveinek magyar nyelvű publikálására. De túl ezen a nevelő hatáson, s túl a probléma személyes vonatkozásain, felelnünk kell arra a kérdésre: mi lehet a walrasi elmélet megismerésének jelentősége a mai magyar közgazdasági gondolkodás formálásában? A teljesség igénye nélkül emelem ki néhány fontos funkcióját.

1. A walrasi közgazdasági elmélet rendkívül mélyen behatolt minden mai közgazdász gondolkodásába. Azok is, akik más iskolához tartoznak, sőt éppenséggel élesen ellentétes nézetet vallanak, azokra is hat a neoklasszikus iskola. Ha másképp nem, fogalmi rendszerével, amelynek sok elemét valamennyien használjuk, kérdésfeltevéseivel, amelyekre magunk is keressük a választ, tételeivel, amelyek — ha másra nem — de legalábbis cáfolatra ingerelnek.

Ha valamilyen elmélettel nem értünk egyet, akkor a szembeszállás legolcsóbb formája a negligálás. Az ember az ilyesféle semmibevételt látva még abban sem biztos, vajon valamely elmélet elvetése mögött nem az húzódik-e meg, hogy az illető „bíráló" egyszerűen műveletlen; sajnálta a fáradságot a rivális elmélet megismerésére, vagy nem is volt képes megérteni. Nem lehet művelt, szakmáját komolyan értő közgazdász az, aki nem ismeri alaposan az általános egyensúlyelméletet és nem tisztázza alapos önvizsgálattal, hogyan is viszonyul ehhez az elmélethez. Nem nyegle „elvetésre", hanem felkészült, kritikus és konstruktív *meghaladásra* van szükség.

A magam részéről nem tudom elfogadni azt a nézetet, amely szerint a walrasi elmélet összefoglaló, átfogó, totális univerzális gazdasági rendszerelmélet lenne. (Mellesleg: Arrow munkái sohasem ültetik erre a magas trónusra az általános egyensúlyelméletet.) Nagyon *speciális* elmélet ez, amelynek tételei csak meghatározott kikötések mellett igazolhatók. Létezik azonban a piaci jelenségeknek olyan szűkebb köre, amelynek megértését elősegíti. Ez külön is indokolja, hogy — elmélettörténeti szerepén túlmenően — megtalálja helyét a közgazdaságtan magyarázó elméletei között.

2. A walrasi rendszer, abban a determinisztikus alakjában, ahogy az első Arrow—Debreu modellekben megjelenik, a tökéletes alkalmazkodás világa. Minden döntéshozó szigorúan következetes magatartást tanúsít, ami preferenciarendezésének meghatározott tulajdonságaiban (tranzitivitás stb.) jut kifejezésre. Az akciók azonnal alkalmazkodnak a jelzésekhez; nincsen súrlódás, nincsen késlekedés. Az információkat kizárólag az árak közvetítik. A tökéletes alkalmazkodás eredményeképpen a walrasi egyensúly állapotában nincsen sehol és semmiben túlkereslet.

A valóság sohasem ilyen „tökéletes". Mégis, ez a tiszta elméleti építmény, éppen „tökéletessége" folytán, alkalmasnak látszik arra, hogy *absztrakt referenciakeretként* szolgáljon. A walrasi rendszer, s ennek kitüntetett állapota, a walrasi piaci egyensúly

hasonló szerepet játszhat, mint a fizikában az abszolút fagypont.[5] Minden valóságos fizikai test hőmérséklete magasabb az abszolút fagypontnál, amely semmiféle valóságos hűtéssel el nem érhető. Ez a csak gondolatilag létező — de ugyanakkor az elmélet síkján jól definiált — abszolút fagypont alkalmas kiindulópontja egy mérési skálának. Hasonlóképpen a valóságos gazdasági rendszerek találóan jellemezhetők azzal, hogy — egyik vagy másik ismérvüket tekintve — milyen messze vannak a walrasi rendszertől, illetve a walrasi egyensúlyi állapottól. Milyen gyakori és mennyire intenzív a hiány a különböző piacokon; mekkora az erőforrások kihasználatlansága, a termékekből képződött felesleg; mekkora az alkalmazkodási folyamatokat fékező súrlódás; mekkora szerep jut a nem árjellegű információknak és így tovább.

3. Arrow és vele együtt az általános egyensúlyelmélet sok más kiváló művelője munkaképes *elemzési eszközöket* dolgozott ki. A konvex halmazok elmélete, fixponttételek, a matematikai programozás dualitási tételei, differenciálegyenlet-rendszerek stabilitásának vizsgálata, az optimális folyamatok elmélete stb. csupán néhány példa arra a sokféle matematikai formalizmusra, amelyet ez az iskola a matematikából átvett és a közgazdasági elemzés céljaira felhasznált és interpretált. Ugyanezek az eszközök használhatónak bizonyulnak azok kezében is, akik ezeket nem a walrasi közgazdasági elmélet alapjain állva alkalmazzák. Igaz, tulajdonképpen valamennyi megtalálható közvetlenül is a matematikai irodalomban. Nem lenne azonban ildomos elhallgatni, hogy a legtöbben azok közül, akik a nem walrasi modellekhez használják ezeket a matematikai eszközöket, rendszerint a neoklasszikus iskola közvetítésével ismerték meg őket. Legalábbis azok a munkák hívták fel a figyelmet ezekre az eszközökre, s csak *ezután* nyúltak vissza az elsődleges forrásokhoz, a matematikai irodalomhoz.

4. Utolsóként említem, de a magam részéről talán legfontosabbnak érzem: a modern matematikai általános egyensúlyelmélet *kihívást* jelent azok számára, akik más úton kívánnak járni. Amikor Ricardo és Malthus vitatkozott egymással, akkor még elég volt jó érvre más jobb érvvel felelni. Attól tartok, hogy ez ma már nem elég. A neoklasszikus iskola technikai fegyverzete rendkívül korszerű és magas színvonalú. Legkiválóbb munkáikra az axiomatikus deduktív tárgyalásmód, a tételek szigorú bizonyítása jellemző. Sok fiatal közgazdász, aki már az egyetem padjaiban alaposan elsajátította a matematikai közgazdaságtant, úgy érzi: őt csak hasonló fegyverzettel felszerelt új elméletekkel lehet meggyőzni. Bármilyen hősi magatartás is, nem lehet puskával küzdeni a tank ellen.

Koopmans írta egyik tanulmányában, hogy a mai közgazdász egyik nagy dilemmája a választás a *szigor* és a *közgazdasági tartalom* között. Nos, a modern általános egyensúlyelmélet joggal marasztalható el azért, hogy sokat feláldoz a közgazdasági tartalomból a szigor kedvéért. Azok, akik a walrasi elméletet bírálják és új, jobb, a valósághoz hívebb elméletek kidolgozásán munkálkodnak, egy ideig megnyugtathatják magukat azzal, hogy amit feladtak elméleteik szigorúságában, azt megnyerték

[5] Ezt az analógiát *Siven—Ysander* [9] tanulmányából vettem át.

a jobb közgazdasági tartalomban. Előbb-utóbb azonban el kell jutni oda, hogy a közgazdasági tartalom javulása együttjárjon a tudományos szigorúsággal. Arrow-t olvasva, nem is próbálom tagadni, nehéz visszafojtani némi irigykedést. Bár már ott tartanánk, hogy arrow-i kristálytisztasággal, fegyelemmel, tömörséggel, logikai élességgel lennénk képesek leírni azokat az összefüggéseket, amelyeket a walrasitól eltérő elméletekkel próbálunk megmagyarázni.

A társadalmi választás elméletéhez

Míg az előző témakörrel, az általános egyensúlyelmélettel kapcsolatban hosszú névsor írta le Arrow elődeit, most olyan munkára térünk át, amely szinte előzmények nélkül robbant be a filozófia, a politikai tudomány és a közgazdaságtan világába. *Pigou* és *Bergson* óta elterjedt az a megnyugtató érzés, hogy értelmes feltevések mellett szerkeszthető egy „jóléti függvény" amelyet maximalizálva meghatározható a társadalom tagjainak egyéni érdekeit a lehető legjobban szolgáló cselekvési terv. Arrow nyugtalanító felfedezése kihúzta a talajt e nézet alól.

Megkísérlem igen leegyszerűsített formában körvonalazni a problémát, mielőtt rátérnék kommentárjaimra. Adott egy közösség: egy kis csoport, egy egyesület vagy egy város, vagy akár egy egész nemzet. A közösség számára *alternatív társadalmi cselekvésekre* nyílik lehetőség. A közösség tagjainak határozott *egyéni véleményük* van a társadalmi cselekvési alternatívákról. (Tehát nemcsak saját lehetséges akcióikról, hanem a társadalom alternatív cselekedeteiről is.) Ezt egyéni preferenciarendezések formájában fejezik ki. Az 1. számú egyén preferálja az *A* társadalmi cselekvést *B*-vel szemben és a *B* társadalmi cselekvést *C*-vel szemben, míg a 2. számú egyén *B*-t preferálja *A*-val szemben és *C*-t *B*-vel szemben és így tovább.

A közösségnek van egy alapszabálya, *alkotmánya*. Ha az Arrow-féle gondolatkísérlet „alkotmányát" magunk elé akarjuk képzelni, akkor ne az Aranybullára vagy a mai parlamentek által ünnepélyesen elfogadott állami alaptörvényekre gondoljunk. Nincs kizárva, de nem is okvetlenül szükséges, hogy az Arrow-féle alkotmányt jogszabályba, törvénybe foglalják. Ez egy *társadalmi folyamat*, amely az egyéni vélemények alapján választ az alternatív társadalmi cselekvések között. Gondoljunk egy elektronikus számológép számára előírt algoritmusra, utasítássorozatra. Betápláljuk a gépbe, a számítás inputjaként, az egyéni véleményeket és kijön, a számítás outputjaként, a *társadalmi döntés*, az érvényes választás az alternatív társadalmi cselekvések közül. Az alkotmány az az algoritmus, amely az „inputból" létrehozza az „outputot", az egyéni véleményekből a társadalmi döntést. „Társadalmi döntés" születhet nagy és kis közösségben, politikai, gazdasági, társadalmi, kulturális, katonai stb. kérdésekben. Társadalmi döntés lehet egy iskola tantervének megszabása a tanári karban, vagy egy futballcsapat taktikájának meghatározása a legközelebbi mérkőzésre, vagy egy ötéves terv kialakítása a népgazdaság egészére. Az „alkotmány", arrow-i értelemben, azt a folyamatot jelenti, amelyben az ilyesfajta döntés létrejön.

Mint látjuk, Arrow modelljének kategóriái rendkívül általánosak, s bármilyen társadalmi választásra alkalmazhatók.

Millióféle algoritmus, azaz „alkotmány" képzelhető el. Például kizárólag azzal törődünk, hogy minden egyes egyén melyik alternatívát tette rangsora első helyére. Utána az az alternatíva válik társadalmi döntéssé, amelyet a legtöbben tettek az első helyre. Pl. három alternatíva esetén a lakosság 40%-a első helyre tette az *A* alternatívát, s 30—30%-a a *B* és a *C* alternatívát. Lehet, hogy a lakosság 70%-a tette második helyre a *B* alternatívát — ez azonban az adott alkotmányban nem befolyásolja a társadalmi döntést.

Lássunk egy másik példát. Minden egyénnek súlyoznia kell az alternatívákat; a súlyok összege legyen 1. Például az 1. sorszámú egyén az *A* alternatívának 0,4-es súlyt ad, a *B* alternatívának 0,38-ast, a *C* alternatívának pedig 0,22-est. Az az alternatíva válik társadalmi döntéssé, amely az „összes súly" legnagyobb részét kapta. Könnyen lehet, hogy miközben *A* szerepelt a legtöbb egyénnél az első helyen, mégis „súlyozott" szavazás esetén a *B* válik társadalmilag elfogadottá.

Egy harmadik alkotmány: kizárólag a közösség meghatározott csoportjának egyéni véleménye alapján formálódik a társadalmi döntés, miközben másoké kirekesztődik a társadalmi döntési folyamatból.

A példákat azért hoztuk fel, hogy közelebb hozzák az olvasóhoz az Arrow-féle „alkotmány" absztrakt kategóriáját. Ő egyébként nem azzal foglalkozik, hogy sorra vegyen különböző alkotmánytípusokat, s összevesse őket egymással. Sokkal általánosabb szinten tárgyalja a problémát. Felteszi azt a kérdést: milyen *általános feltételeket* kell *minden* alkotmánynak kielégíteni? Ezek amolyan *minimális* elemi követelmények, amelyek teljesítése Arrow szerint okvetlenül elvárható. Ha ezeknek megfelel — attól még lehet „jó" is, „rossz" is; eleget tehet vagy kielégítetlenül hagy további, specifikusabb követelményeket, amelyekkel Arrow e munkája nem foglalkozik.

Összesen négy elemi feltételt állít fel. Közülük kettő a *választás logikájával, racionalitásával* kapcsolatos. (1) A társadalmi választásban is érvényesüljön a *tranzitivitás* elve, amely Arrow modelljében érvényre jut az egyéni preferenciarendezésekben. Vagyis ha a társadalom előnyben részesíti *A*-t *B*-vel szemben és *B*-t *C*-vel szemben, akkor nem részesítheti előnyben *C*-t *A*-val szemben. (2) A választás nem függhet olyan alternatívákra vonatkozó preferencia-rendezéstől, amelyek az éppen szóban forgó társadalmi döntés szempontjából nem relevánsak. Ha tehát most *A*, *B*, és *C* között választ a társadalom, akkor a döntés nem függhet attól, vajon melyiket preferálja *D* és *E* közül.

A másik két feltétel *politikai-etikai* jellegű. (3) Érvényesüljön (legalábbis gyenge formájában) a Pareto-elv. Ha *A* és *B* között kell választani, s a közösség egy része határozottan preferálja *A*-t *B*-vel szemben, míg a többiek közömbösek e választás tekintetében, akkor *A* váljék társadalmi döntéssé. (4) Nem érvényesülhet egyéni diktatúra. A társadalmi döntés nem egyezhet meg automatikusan a közösség egyetlen tagjának egyéni véleményével.

Önmagában mind a négy feltétel józannak tűnik. Arrow azzal lepte meg olvasóit, hogy igazolta: lehetetlen olyan alkotmányt találni, amely képes lenne kielégíteni mind a négy feltételt. Legalább egyet a négy feltétel közül meg kell sértenie.

Arrow „lehetetlenségi tétele" az adott modellen belül szigorúan bizonyított állítás: logikailag igaz volta vitathatatlan. Olyan építmény ez, amely mindenkit lenyűgöz, akinek intellektuális gyönyörűséget tud szerezni az absztrakció merészsége, az új és eredeti általánosítás, a gondolkodás fegyelme. Arrow talán elsőként használta a matematikai logika apparátusát egy közgazdasági-társadalomtudományi tétel igazolására. Amiről — a szellemi teljesítmény egyöntetű elismerése mellett — azonnal vita indult, az Arrow feltevéseinek jogosultsága. Vajon elfogadható-e a modell egyes elemeinek (az egyéni véleményeknek, a társadalmi döntési folyamatnak stb.) az a leírása, amelyre az Arrow-modell épül? Indokolt-e éppen ennek a négy feltételnek a teljesítését megkövetelni? Noha a kérdés irodalma Arrow zseniális tanulmánya óta óriásira duzzadt, és sokan álltak elő másképpen megfogalmazott modellel, más feltételegyüttesekkel, azt senki nem vonta kétségbe: itt a társadalmi döntési folyamatok valóságos belső ellentmondásaival állunk szemben. Nehéz — talán lehetetlen — összeegyeztetni a szigorú logikai konzisztenciát és a meghatározott politikai-erkölcsi kritériumok érvényesítését.

A problémának nincsen magyar irodalma. Restelkedve állapíthatjuk meg, milyen felületesen szoktunk gondolkodni a kérdésről. Valamennyien beszéltünk vagy írtunk már arról, hogy „ellentmondás van egyéni és társadalmi érdek között", vagy hogy „összehangba kell hozni az egyéni és a társadalmi érdeket", vagy hogy „a közösségi döntéseknek tükrözniök kell a közvéleményt" és így tovább. Részt veszünk testületekben, amelyek valamilyen alapszabály szerint — egyszerű szótöbbséggel vagy más eljárás alapján — határoznak. De sohasem szoktuk feltenni magunknak a kérdést: mit is jelent ez a kifejezés: „társadalmi érdek?" Pontosan milyen mechanizmusok — az Arrow-féle kifejezésmóddal: milyen „alkotmányok" — alakítják ki a társadalmi döntéseket? Milyen viszonyban áll a társadalmi döntés az egyéni véleményekkel? Melyek a társadalmi döntési folyamatok tulajdonságai, milyen feltételeket elégítenek ki, és milyen követelményeknek nem tesznek eleget? Ha szórványosan olvasható is egy-egy munka ebben a tárgykörben, a filozófia, a matematikai logika, a politikatudomány és a közgazdaságtan művelőinek nagy adóssága gyűlt fel itt.

Megkockáztatnék egyetlen észrevételt az Arrow-féle lehetetlenségi tétellel kapcsolatban. Úgy gondolom: a kérdés külföldi irodalma eléggé egyoldalúan megmaradt a kérdés absztrakt elméleti vizsgálatánál. Sokan összpontosítják arra figyelmünket, hogy olyan értelmes feltételegyüttest találjanak, amely végül is kielégíthető. Holott érdemes nagy figyelmet fordítani az Arrow-modell és a belőle levezetett tétel *tapasztalati ellenőrzésére* is. Vajon a *valóságos* társadalmi döntések milyen mértékben elégítik ki az Arrow-féle négy feltételt (vagy más, a helyükbe állítható, illetve mellékük sorolható további feltételeket)?

Az elméleti tétel — kellő átfogalmazás után — megfigyelhető, mérhető, tapasztalati úton ellenőrizhető hipotézisként fogalmazható meg. Magam sohasem végeztem

módszeres adatgyűjtést ebben a témakörben, bár — elsősorban a tervezés körében — adódtak szórványos tapasztalataim. Ezekből azt a következtetést szűrném le, hogy a valóságos társadalmi döntési folyamatok ténylegesen kielégítetlenül hagyják az Arrow-féle feltételegyüttest.

Külön is kiemelném az (1) feltételt, amit Arrow „kollektív racionalitásnak" nevez. A magam részéről kétségbevonom, hogy az *egyéni* viselkedés szigorúan „racionális" a szó neoklasszikus értelmezésében. Az egyéni akciók sorozatában is megfigyelhető az inkonzisztencia, a tranzitivitás elvének és a „racionális viselkedés" más posztulátumainak gyakori megsértése. És — ha e jelző egyáltalán fokozható — a *társadalmi* döntések még kevésbé konzisztensek. Sokszor megtörténik, hogy valamely testület ma előnyben részesíti *A*-t *B*-vel szemben, holnap *B*-t *C*-vel szemben, s végül holnapután *C*-t *A*-val szemben. Az egymást követő, s egymással összehasonlítható döntések sorozatát megfigyelve *ingadozást* — jó esetben kísérletezgetést, rosszabb esetben pedig egyszerűen következetlenséget — tapasztalhatunk.

E megjegyzésem inkább csak sejtésnek tekinthető; igazolása módszeres megfigyelést igényelne. Hasznos lenne, ha Arrow társadalmi választási elméletének első magyar nyelvű publikálása a probléma alapos elméleti és tapasztalati vizsgálatára késztetné társadalomtudományunkat.

Arrow tudományos arcképéhez

Már az eddig elmondottakból is kirajzolódott Arrow tudományos arcképének néhány vonása. Ezt szeretném kiegészíteni, részben munkáinak tanulmányozása, részben pedig személyes benyomások alapján. Abban a szerencsében részesültem, hogy 1968-ban néhány hónapot Arrow meghívására az ő kaliforniai intézetében dolgozhattam, s ott módom volt munka és beszélgetések közben is megismerni őt mint tudóst, mint tudományos vezetőt és mint embert.

Ismeretes az a tudós típus, aki nagyon kevés kérdéssel foglalkozik, de azzal mélyen, alaposan. És ismerjük a másik fajta „féltudós" típust, az univerzális dilettánst, aki ugyan sokféle kérdéshez nyúl, de mindegyikhez felületesen. Arrow azok közé a ritka kivételek közé tartozik, aki képes sok témával foglalkozni, s mindegyikkel mélyen, alaposan, eredeti módon. Azért képes erre, mert intellektusa különlegesen gyors és intenzív. Nemigen találkoztam még olyan emberrel, akire inkább ráillett volna a szólás: *vág* az esze. Beszélgetés közben nem könnyű követni. Igen gyorsan beszél, s még így is úgy érzi, aki hallgatja: gondolatai még gyorsabbak, s szavai alig képesek lépést tartani a gondolatok áradatával.

Tanulmányai között nem is egy *rendkívül elvont* elemzést végez. A spekulatív, deduktív szellemi munka kiegészítésül azonban újra és újra visszatér a *mindennapi élethez közelálló, aktuális, gyakorlati kérdésekhez*. Tanulmányt ír az egészségügyről és ipari készletekről, az állami beruházások gazdaságossági számításairól és az egyetemi oktatás problémáiról. Munkáinak nagyrészét a matematika nyelvén fogal-

mazza meg, de képes mindenki számára érthető, egyszerű nyelven is kifejezni gondolatait. Noha nem vesz részt politikai küzdelmek első vonalában, nem tartja magát távol a közügyektől. Ott van azok között, akik tiltakoznak az USA vietnami beavatkozása ellen, vagy szót emelnek a négerekkel szembeni faji megkülönböztetés ellen.

Nemcsak kutató tudós, de *nevelő* is. Sokféle formában adja át tudását. Egykori diákjai közül nem is egy ma már híres művelője a matematikai közgazdaságtannak. Intézetébe rendszeresen hív meg amerikai és külföldi kutatókat, akikre megtermékenyítőleg hatnak az Arrow-val és munkatársaival folytatott beszélgetések. Gyakran szervez konferenciákat, szemináriumokat, amelyek hosszú időn át messzeható erjedést visznek a közgazdaságtudományba.

Arrow magatartásában nyomát sem látni a „nagy tudós" öntetszelgésének. Humor és játékos irónia hatja át. Amikor elolvasta az „Anti-Equilibrium" első kéziratát, némi aggodalommal készülődtem az erről folytatandó beszélgetésre. Sajátos érzés Arrow-val társalogni — az Arrow—Debreu modell bírálatáról. A beszélgetés azonban hamar eloszlatta a szorongás érzését. Arra biztatott, hogy okvetlenül publikáljam munkámat, sőt rábeszélt: semmiképpen se tegyem simábbá és diplomatikusabbá stílusát. Említette, hogy előreláthatólag kb. az én munkámmal egyidőben jelenik meg majd *Frank Hahn*nal közösen írott tankönyve. Utóbbiról öngúnnyal jegyezte meg: ez feltehetően díszes síremlék lesz az általános egyensúlyelmélet sírdombja felett... S amikor a kézirat első, majd átdolgozott változatát gondosan elolvasta, számos konstruktív tanácsot adott, hogyan lehetne pontosabbá tenni a fogalmazást, elkerülni a félreértéseket. Arrow-nak ezek a gesztusai követendő mintául szolgálhatnak arra, hogyan kell az ellenvéleményt nemcsak elviselni, de még nagyvonalúan biztatni és támogatni is.

Őszintén remélem, hogy Arrow munkái élénkítően hatnak majd a hazai közgazdasági gondolkodásra. Biztos vagyok benne, hogy a szerző annak örülne a legjobban, ha megtudná: Magyarországon nemcsak tanulmányozzák műveit, de vitatkoznak is róluk.

Budapest, 1979. január

Kornai János

IRODALOM

[1] *Arrow, K. J.—Hahn, F.:* General Competitive Analysis. San Francisco, Holden-Day. 1971.

[2] *Erdős, P.*: Bér, profit, adóztatás. Közgazdasági Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[3] *Hegedüs M.—Zalai E.*: Fixpont és egyensúly a gazdasági rendszerekben, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 1979.

[4] *Hollis, M.—Nell, E.*: Rational Economic Man: A Philosophical Critique of Neo-Classical Economics. London—New York, Cambridge University Press, 1975.

[5] *Kaldor, N.*: The Irrelevance of Equilibrium Economics, Economic Journal. 82 évf. 1972. 1972. 1237—1255 old.

[6] *Mátyás A.*: A modern polgári közgazdaságtan története. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1973.

[7] *Kornai J.*: Anti-Equilibrium. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1971.

[8] *Robinson, J.—Eatwell, J.*: An Introduction to Modern Economics. London, Macmillan, 1973.

[9] *Siven, C. H.—Ysander, B. C.*: „Kornai János: Anti-Equilibrium", könyvbírálat, Swedish Journal of Economics, 1973, 75. évf. 315—319. old.

[10] *Ward, B.*: What's Wrong with Economics. New York, Basic Books, 1972.

[11] *Weizsäcker, C. C.*: Kenneth Arrow's Contribution to Economics , Swedish Journal of Economics, 1974, 74. évf. 488—502 old.

I.

EGYENSÚLY ÉS PIAC

Az egyensúly létezése versenygazdaságban[*1]

A. Wald modellt dolgozott ki a termelésre, valamint a cserére, és mindkettőben bebizonyította az egyensúly létezését. Cikkünkben a termelés, a csere és a fogyasztás *közös* modelljében adjuk meg az egyensúly létezésének bizonyításait. Ezenkívül Wald feltevéseinél lényegesen gyengébb megszorításokat tettünk a termelők technológiáira és a fogyasztók ízlésére. Végül, az elvont gazdaságnak általánosított játékként való felfogása lehetővé tette a bizonyítások szerkezetének egyszerűsítését

BEVEZETÉS

L. Walras [24] volt az első, aki szimultán egyenletek megoldásaként írta fel a gazdasági rendszer állapotát valamely időpontban. Ezek az egyenletek a fogyasztók jószágkeresletét és a termelők jószágkínálatát, valamint az egyensúly feltételét, azaz valamennyi piacon a kereslet és kínálat egyenlőségét fejezik ki. Walras feltette, hogy a fogyasztók hasznosságuk a termelők nyereségük maximalizálására törekednek, és a tökéletes verseny viszonyai uralkodnak, abban az értelemben, hogy a termelők és fogyasztók a kiadásokban és bevételekben szereplő árakat saját döntéseiktől függetleneknek tekintik. Walras azonban nem adott bizonyító erejű levezetést egyenleteinek megoldhatóságára.

A megoldások létezésének vizsgálata fontos mind a leíró, mind a normatív közgazdaságtan szempontjából. A leíró oldalt tekintve, az a nézet, hogy a versenymodell — legalábbis bizonyos célokra — elfogadhatóan pontos leírása a valóságnak, egyben előfeltételezi a modell egyenleteinek konzisztenciáját. Ily módon azon feltételek meghatározása, amelyek mellett a versenyegyensúly egyenleteinek van megoldása, egyik próbája a modell empirikus használhatóságának.

Feltehetően ugyanilyen jelentős a kapcsolat a versenyegyensúly megoldhatósága és a normatív vagy jóléti közgazdaságtan kérdései között is. Jól ismert, hogy a fogyasz-

* (Társszerző: *Gerard Debreu*) Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, Vol. 22., No. 3., July 1954. 265—290. old.

[1] A tanulmányt felolvasták az Ökonometriai Társaság találkozóján, Chicagóban, 1952. december 27-én. A szerzők munkájukat az „Office of Naval Research" részére készítették, szerződéseik száma: N6onr—25 133 (NR—047—004) és Nonr—358(01) (NR—047—006).

tói preferenciákra és a termelési lehetőségekre tett megfelelő feltételezések mellett, az erőforrások elosztása a versenyegyensúlyban Pareto értelmében optimális (azaz nincs a javaknak és erőforrásoknak olyan újraelosztása, amely képes valamely résztvevő helyzetét úgy megjavítani, hogy ezzel egyetlen másik résztvevő sem károsul), és megfordítva, az erőforrások bármely Pareto-optimális elosztása létrehozható versenyegyensúly révén. (Lásd pl. K. J. Arrow [1], G. Debreu [4] és azok hivatkozásait.) A normatív közgazdaságtan szempontjából tehát szintén alapvető a versenyrendszer egyensúlyának létezése.

A kérdés tanulmányozásához először is a szokásosnál gondosabban kell megadni a versenygazdaság pontos feltételeit. E tanulmány fő eredménye két tétel, amelyek rendkívül általános feltételek mellett mondják ki az egyensúly létezését. Nagy vonalakban az első tétel azt állítja, hogy ha a résztvevők mindegyike valamennyi áruból pozitív kiinduló készlettel rendelkezik, akkor létezik a versenyegyensúly. A második tétel kimondja a versenyegyensúly létezését, ha a gazdaságban van néhány olyan munkafajta, amelyek kielégítik a következő két feltételt: 1. minden egyes egyén legalább az egyik ilyen munkafajtából képes pozitív mennyiséget kínálni; és 2. minden ilyen munkafajtának pozitív a hasznossága a keresett áruk termelésében. Főképpen a második tétel feltételeitől remélhető, hogy a valóságos helyzetek széles körére teljesülnek, bár nem fognak fennállni például akkor, ha a termelés szerkezetében nincs kellő helyettesíthetőség.

Tanulmányunk feltevései számos szempontból gyengébbek A. Wald [23] feltevéseinél, és közelebb állnak a valósághoz, mint azok. Modellünk, eltérően Wald modelljeitől, összefüggő rendszert ad a termelésre és a fogyasztásra, amely figyelembe veszi a jövedelmek körkörös áramlását. Az egzisztencia bizonyítása is egyszerűbb. Ez a tanulmány nem vizsgálja sem a versenymegoldás egyértelműségét sem annak stabilitását. A stabilitás tanulmányozása megkövetelné a versenypiac dinamikájának és az egyensúly definíciójának specifikálását is.

A felhasznált matematikai eszközök halmazelméletiek. Központi fogalom az elvont gazdaság, a játék fogalmának általánosítása.

1. A VERSENYEGYENSÚLY ELSŐ EGZISZTENCIATÉTELE

1.0. Ebben a fejezetben a versenygazdaság egy modelljét írjuk le, és bizonyos feltevéseket fogalmazunk meg a gazdaság termelői és fogyasztói egységeire. Definiáljuk e gazdaságban az egyensúly fogalmát, és kimondunk egy egzisztenciatételt erre az egyensúlyra.

1.1. Feltesszük, hogy véges számú különböző áru van (az összes szolgáltatásokat is beleértve). Minden egyes áru megvásárolható, illetve eladható valamely meghatározott helyen (véges számú különböző hely van) és valamely meghatározott jövőbeli időpontban (véges számú jövőbeli időpont van). Céljaink érdekében ugyanazt az árut két különböző helyen vagy két különböző időpontban két különböző árunak fogjuk

tekinteni. Ily módon véges számú különböző áru van (ahol az áru fogalmát kiterjesztettük, hogy tartalmazza a térbeli és időbeli különbségeket is). Legyen az áruk száma l; és a h jelöli a különböző árukat; h 1-től l-ig vehet fel értékeket.

1.2.0. Az árukat vagy legalábbis néhányukat a *termelőegységek*ben (vállalatoknál) termelik. A termelőegységek számáról feltételezzük, hogy egy véges szám, n; j-vel jelöljük a különböző termelőegységeket. A termelési folyamat technológiai természetéről bizonyos alapvető feltevéseket teszünk; de mielőtt ezeket kimondanánk, megadunk néhány vektor- és halmazjelölést.

1.2.1. $x \geqq y$ jelentése: $x_h \geqq y_h$ minden h komponensre;

$x \geqq y$ jelentése: $x \geqq y$, de $x \neq y$;

$x > y$ jelentése: $x_h > y_h$ minden h komponensre.

R^l — az l-dimenziós euklideszi tér, azaz az összes l-komponensű vektor halmaza.

0 az a vektor, amelynek összes komponense 0.

$\{x|\ \}$, ahol az üres helyet valamely, x-re vonatkozó kijelentés tölti ki, azon x-ek halmaza, amelyekre a kijelentés igaz.

$\Omega = \{x | x \in R^l,\ x \geqq 0\}$

Vektorok bármely A halmazára legyen $-A = \{x | -x \in A\}$.

Vektorok bármely A_ι halmazára ($\iota = 1, \ldots, \nu$), legyen

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} A_\iota = \left\{ x | x = \sum_{\iota=1}^{\nu} x_\iota, \text{ valamely } x_1, \ldots, x_\nu \text{ értékekre, ahol } x_\iota \in A_\iota \right\},$$

1.2.2. Minden j termelőegység számára adva van a lehetséges termelési tervek Y_j halmaza. Y_j-nek egy y_j eleme R^l-beli vektor, amelynek h-adik komponense, y_{hj} jelöli ki az e tervnek megfelelő kibocsátást a h-adik áruból. A felhasználásokat negatív komponensekkel adjuk meg. Legyen $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$; akkor Y elemei fogják össze a termelési szektornak mint egésznek a lehetséges felhasználás—kibocsátás terveit. Az Y_j halmazokról a következő feltevéseket tesszük:

I.*a* *y_j az R^l tér zárt konvex részhalmaza, és tartalmazza* 0*-át* ($j = 1, \ldots, n$).

I.*b* $Y \cap \Omega = 0$.

I.*c* $Y \cap (-Y) = 0$.

Az I.*a* feltétel nem növekvő volumenhozadékot jelent, ugyanis ha $y_j \in Y_j$ és $0 \leqq \lambda \leqq 1$, akkor $\lambda y_j = \lambda y_j + (1-\lambda) 0 \in Y_j$, mert $0 \in Y_j$ és Y_j konvex. Ha feltennénk a lehetséges termelési vektorok összeadhatóságát is, akkor Y_j konvex kónusz lenne, azaz állandó volumenhozadék érvényesülne. Ha viszont feltételezzük, hogy a vállalat által felhasznált termelési tényezők közül egynéhány nem kapható meg a piacon, és ezért nem jelenik meg az áruvilágban, akkor a termelési lehetőségek vektorai, csak az áruvilághoz tartozó komponenseket tekintve, nem fogják kielégíteni az össze-

adhatósági axiómát[2]. Y_j zártsága annyit jelent, hogy ha az y_j-hez tetszőlegesen közel levő vektorok Y_j-ben vannak, akkor y_j is ott van. Természetes, hogy $0 \in Y_j$, mivel egy termelőegység bármikor megszűnhet. Meg kell jegyezni, hogy a termelőegységek listájának nemcsak a meglevő vállalatokat kell tartalmaznia, hanem azokat is, amelyek — alkalmas árak mellett — beléphetnek a piacra.

Az I.*b* kimondja, hogy nem létezhet olyan, legalább egy pozitív komponenst tartalmazó vektor, amelynek legalább egy negatív komponense ne lenne. Azaz, felhasználás nélkül lehetetlen bármit is termelni.

Az I.*c* kizárja két olyan termelési vektor lehetőségét, amelyek kiegyenlítik egymást, abban az értelemben, hogy az egyik kibocsátásai pontosan megegyeznek a másik felhasználásaival. Az I.*c* legegyszerűbb igazolása az a megjegyzés, hogy bármely termelési tevékenység igényel valamilyen munkát, miközben a munkát nem lehet termelőegységekben előállítani. Ha $y \in Y$ és $y \neq 0$, akkor $y_h < 0$ néhány h-ra, ahol h munkafajtát jelöl, tehát $-y_h > 0$ (itt y_h az y vektor h-adik komponense). Mivel munkát nem lehet termelni, $-y$ nem tartozhat Y-ba.[3]

Mivel az árukat időben ugyanúgy megkülönböztetjük, mint fizikai tulajdonságaik szerint, azok a beruházási tervek, amelyek a jövőbeli vásárlásokat és eladásokat jelentik, benne foglaltatnak a termelés általunk használt modelljében.

1.2.3. Az eddigi feltevések a termelés *technológiai* oldalához kapcsolódnak. A tökéletes verseny szokásos feltevései mellett a termelés *gazdasági* hajtóereje a profitmaximalizálás adott áraknál. A tökéletes verseny egyik sajátsága feltétlenül a következő:

1. feltétel: y_j^* maximalizálja a $p^* y_j$ értéket az Y_j halmazon, minden j-re.

A csillagok itt az egyensúlyi értékeket jelölik és p^* az egyensúlyi árvektor.[4] Ez a feltétel az első azok sorában, amelyek együttesen definiálják majd a *versenyegyensúly* fogalmát.

1.3.0. A termeléshez hasonlóan *fogyasztóegységek* létezését is feltételezzük, ezek általában a családok vagy egyének, de az intézmények mint fogyasztók is ide tartoznak. A fogyasztóegységek száma m; a különböző fogyasztóegységeket i-vel fogjuk jelölni. Bármely i fogyasztóegységre a fogyasztását jelentő R^l-beli vektort x_i-vel jelöljük. Ennek h-adik komponense, x_{hi} adja meg, mennyit fogyaszt az i-edik fogyasz-

[2] A közgazdasági elméletben a saját vállalati tényezők létezése a csökkenő volumenhozadék szokásos igazolását adja. Lásd a vitát a „szabadon adagolt javak"-ról: *B. G. Hart* [9] 4., 38. old.; valamint *J. R. Hicks* [10] 82—83. old.; *P. R. Samuelson* [18] 84. old.

[3] A termelésre itt tett feltételek általánosításai a „lineáris programozás" feltételeinek. Feltételrendszerünk szoros rokonságban van *T. C. Koopmans* [12] művének feltételeivel. Például az I.*b* a Koopmans-féle „Eldorádó lehetetlensége" feltétel, az I.*c* az „Irreverzibilitás"; (lásd [12], 48—. 50. old.).

[4] Bármely két u, v vektorra az uv jelölés azok belső szorzatát, tehát a $\sum_h u_h v_h$ értéket jelenti. Mivel y_{hj} értéke a kibocsátásokra pozitív, a felhasználásokra negatív, azért $p^* y_j$ az y_j termelési terv profitja a p^* árak mellett.

tó a h-adik áruból. A fogyasztás mértéke valamennyi árura szükségképpen nemnegatív, kivéve a munkát, amelyet az egyének kínálnak. A munkafajták kínált mennyisége felfogható mint negatív „fogyasztás", ezért $x_{hi} \leqq 0$, ha h munkafajtát jelöl. Legyen $\mathscr{L}$ azon áruk halmaza, amelyek munkafajták. Bármely $h \in \mathscr{L}$ esetén feltételezhetjük, hogy a kínált mennyiségnek van felső korlátja, azaz x_{hi}-nak alsó korlátja, hisz például egy egyén nem kínálhat napi 24 óránál több munkát.

II. *Az i-edik egyén ($i=1, \ldots, m$) részére rendelkezésre álló fogyasztási vektorok X_i halmaza zárt, konvex részhalmaz R^l-ben, és alulról korlátos, azaz van olyan ξ_i vektor, hogy $\xi_i \leqq x_i$ minden $x_i \in X_i$ esetén.*

Az X_i halmaz az illető fogyasztó összes olyan fogyasztási vektorát tartalmazza, amely elképzelhető számára, tekintet nélkül a jövedelmi korlátaira. A lehetetlen árukombinációk, mint például 24 óránál nagyobb munkamennyiség kínálata egy nap alatt, vagy az életfenntartáshoz nem elegendő kombinációk ki vannak zárva X_i-ből.

1.3.1. Mint ahogy az megszokott a gazdasági elméletben, feltesszük, hogy az egyén preferenciarendezésének megfelelően választ a fogyasztási kombinációk adott halmazából, és ehhez a preferenciarendezéshez tartozik egy hasznossági indikátorfüggvény, $u_i(x_i)$ úgy, hogy $u_i(x_i) \geqq u_i(x_i')$ akkor és csak akkor, ha x_i preferált vagy közömbös x_i'-höz képest az i-edik egyén számára.

III.*a* *$u_i(x_i)$ folytonos függvény X_i-n.*

III.*b* *Bármely $x_i \in X_i$ vektorhoz létezik $x_i' \in X_i$, hogy $u_i(x_i') > u_i(x_i)$.*

III.*c* *Ha $u_i(x_i) > u_i(x_i')$ és $0 < t < 1$, akkor $u_i[tx_i + (1-t)x_i'] > u_i(x_i')$.*

A III. *a* feltevés szokásos a fogyasztói kereslet elméletében. Rendszerint ama feltétel magától értetődő következményének tekintik, hogy a fogyasztói döntéseket egy preferenciarendezésnek megfelelően hozzák. Ez a következtetés azonban nem pontos. Valójában egy folytonos hasznossági indikátorfüggvény létezése az euklideszi tér X_i részhalmazán — amit rendszerint adottnak tekintenek — a következő feltevéssel ekvivalens: minden x_i'-re az $\{x_i | x_i \in X_i$ és x_i' preferált vagy közömbös x_i-hez képest$\}$ és az $\{x_i | x_i \in X_i$ és x_i preferált vagy közömbös x_i'-hez képest$\}$ halmazok (X_i-ben) zártak; (lásd *G. Debreu* [6]). Ez a feltevés a preferenciareláció egyfajta folytonosságát jelenti.

III. *b* felteszi, hogy nincs telítődési pont, nincs olyan fogyasztási vektor, amelyet az egyén minden másiknál többre értékel. Meg kell jegyezni, hogy ez a kikötés gyengíthető annak kimondásával, hogy a fennálló technikai viszonyok és erőforráskorlátok mellett nincs telítődési pont. Az átalakított feltétel formális alakja:

III′. *b* *Bármely $x_i \in \hat{X}_i$ vektorhoz van olyan $x_i' \in X_i$, hogy $u_i(x_i') > u_i(x_i)$,*

amihez $\hat{X}_i$ jelentését a 3.3.0. alpontban fogjuk megadni.

III. *c* megfelel annak a szokásos feltételnek, hogy a közömbösségi felületek konvexek abban az értelemben, hogy az $\{x_i | x_i \in X_i$ és $u_i(x_i) \geqq \alpha\}$ halmaz bármely rögzített α szám esetén konvex.

Az utolsó kijelentés, amely $u_i(x_i)$ *kvázikonkávitását* mondja ki, valóban benne van a III. *c*-ben (de nyilvánvalóan gyengébb annál). Mert tegyük fel, hogy x^1-re és x^2-re $u_i(x^n) \geqq \alpha$ $(n=1, 2)$ és $0<t<1$. Legyen $x^3 = tx^1 + (1-t)x^2$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $u_i(x^1) \geqq u_i(x^2)$. Ha a szigorú egyenlőtlenség áll, akkor a III. *c*-nek megfelelően $u_i(x^3) > u_i(x^2) \geqq \alpha$. Ha pedig $u_i(x^1) = u_i(x^2)$, tegyük föl, hogy $u_i(x^3) < u_i(x^2)$. Ekkor a III. *a* szerint találhatunk olyan x^4-et, amely x^3 és x^1 szigorú konvex kombinációja, és $u_i(x^3) < u_i(x^4) < u_i(x^1) = u_i(x^2)$. Az x^3 pont pedig kifejezhető x^4 és x^2 szigorú konvex kombinációjaként; és mivel $u_i(x^4) < u_i(x^2)$, a III. *c*-ből következik, hogy $u_i(x^3) > u_i(x^4)$, ami ellentmond az előző mondatban kifejtett egyenlőtlenségnek. Tehát az $u_i(x^3) < u_i(x^2)$ feltevés hamis, azaz $u_i(x^3) \geqq u_i(x^2) \geqq \alpha$ igaz.

Valójában a fogyasztói kereslet elméletében rendszerint egy valamivel erősebb megszorítást tesznek, mint $u_i(x_i)$ kvázikonkávitása, nevezetesen azt, hogy $u_i(x_i)$ *szigorúan* kvázikonkáv, ami azt jelenti, hogy ha $u_i(x_i) \geqq u_i(x_i')$ és $0<t<1$, akkor $u_i[tx_i + (1-t)x_i'] > u(x_i')$. Ez ekvivalens annak kimondásával, hogy a közömbösségi felületeknek nincsenek lineáris részei, ami most már azzal ekvivalens, hogy az árak és jövedelmek bármilyen együttesére a keresleti függvény — amely adott árak és jövedelem mellett megadja a maximális hasznosságú fogyasztási vektor komponenseit — egyértékű. A szigorú kvázikonkávitás nyilvánvalóan *erősebb* kikötés, mint a III. *c*.[5]

1.3.2. Feltesszük azt is, kogy az *i*-edik fogyasztó egység rendelkezik indulókészlettel a különböző árukból, amelyeket a ζ_i vektorba foglalunk, valamint szerződés szerinti követelése van a *j*-edik termelőegység profitjának α_{ij} hányadára, valamennyi *j*-re.

IV. *a* $\zeta_i \in R^l$; *és valamely* $x_i \in X_i$ *vektorra* $x_i < \zeta_i$;

IV. *b* $\alpha_{ij} \geqq 0$ *minden i, j-re;* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$ *minden j-re.*

A ζ_{hi} komponens jelenti az *i*-edik fogyasztó indulókészletét a *h*-adik áruból. Ebbe belefoglalhatjuk a *h*-adik áruban fizetendő adósságokat is, az *i*-nek fizetendő adósságokat hozzáadjuk ζ_{hi}-hez, az általa fizetendőket pedig levonjuk. Ily módon valamely $h \in \mathcal{L}$ esetén ζ_{hi} csak a megfelelő munkafajtában fizetendő adósságok mértékében fog különbözni 0-tól. (Nem szükségszerű, hogy az áruadósságok kiegyenlítsék egymást az egész gazdaságra vonatkozóan, szerepelhetnek itt a külföldieknek vagy külföldiektől járó adósságok, feltéve, hogy azokat valamely áruban kell kifizetni.)

A IV. *a* második fele értelemszerűen azt állítja, hogy valamennyi fogyasztó fogyaszthat induló készleteiből valamely alkalmas módon, és még mindig marad

[5] Megjegyzéseinket összefoglalva, a szigorú kvázikonkávitásból következik III. *c*, míg III. *c* maga után vonja a kvázikonkávitást. Annak megmutatásához, hogy a szigorú kvázikonkávitás valóban erősebb feltevés III. *c*-nél, csupán egy példát kell adnunk olyan hasznossági függvényre, amely a III. *c*-t kielégíti, de nem szigorúan kvázikonkáv. Az $u_i(x_i) = \sum_{h=1}^{l} x_{hi}$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal.

pozitív készlete az *összes* áruból, amelyek a piacon áruba bocsáthatók.[6] Ez a feltétel nyilvánvalóan irreális. Mindamellett az, hogy ez vagy valami hasonló feltevés elengedhetetlen az egzisztenciatétel érvényességéhez, rámutat egy fontos elvre: az egyensúlyhoz szükséges, hogy valamennyi egyénnek legyen némi készlete vagy felkínálható munkaszolgáltatása, amelynek az egyensúlyban pozitív az ára. A IV. *a* fennállásakor ez azzal biztosított, hogy egy egyén képes minden áruból valamennyit kínálni, és az áruk közül legalább az egyik értékes lesz az egyensúlyban (abban az értelemben, hogy 0-nál nagyobb ára lesz, mivel ott legalább egy áru ára pozitív lesz, amint azt az árrendszerről a későbbiekben — az 1.4.-ben — tett feltevések biztosítják. A *2. tételben* sokkal gyengébb ilyenfajta feltevéssel fogunk élni.

1.3.3. A fogyasztási vektor kiválasztásakor a legfőbb gazdasági indíték a fogyasztási vektorok hasznosságának maximalizálása, mégpedig azok közül a fogyasztói vektorok közül, amelyek a jövedelmi korláton belül maradnak, vagyis amelyeknek piaci áron vett költsége nem haladja meg az egyén jövedelmét. A jövedelem három forrása: bérek, bevételek az induló árukészlet és az áruban kifejezhető követelések egy részének eladásából, valamint osztalékok a termelőegységek profitjából. Ennek az elvnek bizonyára érvényesnek kell lennie az árak és profitok egyensúlyi értékére.

2. *feltétel:* x_i^* *maximalizálja az* $u_i(x_i)$ *értékét az*

$$\{x_i | x_i \in X_i,\ p^* x_i \leqq p^* \zeta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*\} \text{ halmazon.}$$

Ugyanúgy, mint az *1. feltétel* az 1.2.3.-ban, ez is a versenyegyensúlynak egy feltétele. Mivel a kifejtett munkát definíció szerint az x_i negatív komponensei jelentik, azért a $p^* x_i$ az árukra fordított kiadásoknak a bérjövedelem feletti részét adja. A $p^* \zeta_i$ kifejezés az eredetileg rendelkezésre álló áruk eladásából származó bevételeket fejezi ki. A $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*$ jelöli az i-edik fogyasztó egységnek az osztalékokból származó bevételét.

1.4.0. Hátra van még az árrendszernek és a piaci egyensúly jelentésének megtárgyalása.

3. *feltétel:* $p^* \in P = \left\{ p | p \in R^l,\ p \geqq 0,\ \sum_{h=1}^{l} p_h = 1 \right\}$.

A *3. feltétel* lényegében azt a követelést fejezi ki, hogy az árak nemnegatívak és nem lehet mindegyikük nulla. A p^* vektort az általánosság megszorítása nélkül normalizálhatjuk, megkövetelve, hogy a koordinátáinak összege 1 legyen, hiszen valamennyi összefüggés, amit felírunk, p-ben (elsőfokú) homogén.

1.4.1. Az *1.* és *2. feltétel* a termelő-, illetve fogyasztóegységek egyensúlyának feltételei adott p^* mellett. Ennélfogva az egyes áruk kereslete és kínálata a p (nem szükségképpen egyértékű) függvényeként meghatározott, ha p-t változtatjuk, és

[6] Ez a feltétel ugyanazt a szerepet játssza, mint *J. Neumann* egyik feltevése a termelés egy dinamikus modelljével foglalkozó tanulmányában [16], ti., hogy valamennyi áru belép valamennyi termelési folyamatba vagy mint felhasználás, vagy mint kibocsátás.

ugyanakkor utasítjuk a termelő- és fogyasztóegységeket, viselkedjenek úgy, mintha a közölt p egyensúlyi lenne. Egy áru piacát rendszerint akkor tekintik egyensúlyban levőnek, ha ezen áru kínálata és kereslete megegyezik; emellett figyelembe kell vennünk azt a lehetőséget, hogy nulla árnál a kínálat nagyobb, mint a kereslet. Ez a szabad jószág klasszikus esete.

Legyen

$$x = \sum_i x_i, \quad y = \sum_j y_j, \quad \zeta = \sum_i \zeta_i, \quad z = x - y - \zeta.$$

A z vektor komponensei a kínálat feletti túlkeresletet mutatják (beleértve mind a termelt, mind az eleve meglevő kínálatot).

4. feltétel: $z^* \leqq 0$, $p^* z^* = 0$.

A *4. feltétel* az előző bekezdésben tárgyaltakat foglalja össze. Nézzük most vázlatosan a klasszikus „kereslet—kínálat törvénye" dinamikáját. (Lásd: [18], 263. old) Eszerint egy áru ára emelkedik, ha a kereslet meghaladja a kínálatot, esik, ha a kínálat haladja meg a keresletet. Az egyensúly tehát összeegyeztethetetlen azzal, hogy bármelyik piacon is túlkereslet legyen, hiszen ilyenkor az ár egyszerűen emelkednék. Így az egyensúlyra vonatkozó *4. feltétel* első része jogosult. A kínálat keresleten túli többlete lefelé hajtja az árakat, de a *3. feltétel*nek megfelelően egyetlen ár sem csökkenhet 0 alá. Tehát lehetséges, hogy valamely h árura $z_h^* < 0$ legyen, de csak ha $p_h^* = 0$. Mivel $p_h^* \geqq 0$ minden h esetén, és $z_h^* \leqq 0$ minden h esetén, a $p^* z^* = \sum_h p_h^* z_h^*$ nempozitív kifejezések összege. Ez az összeg akkor és csak akkor lehet 0, ha valamennyi h-ra $p_h^* z_h^* = 0$, azaz vagy $z_h^* = 0$, vagy $z_h^* < 0$ és $p_h^* = 0$. A *4. feltétel* ezért pontosan a kívánt egyensúlyi feltételeket foglalja össze.[7]

1.4.2. Az előző pontban kimondatlanul feltettük, hogy egy pozitív árral rendelkező termék esetében a fogyasztó egység teljes induló készlete kínálatot képez a piacon, azzal a termékkínálattal együtt, amely a termelő- és fogyasztóegységek profit-, illetve hasznosságmaximalizálásából adódik (ebben az összefüggésben a fogyasztóegység fogyasztása a saját készletéből ugyanolyan mennyiségben jelent piaci kínálatot, mint keresletet).

Ez nyilvánvaló, ha megjegyezzük, hogy az egyének teljes *potenciális* jövedelmüket elköltik, minthogy nincsen telítődési pont (és mivel a modell az egyén teljes gazdasági jövőjét felöleli). Pontosabban, III. *b* megmutatja, hogy létezik olyan x_i', amelyre

$$u_i(x_i') > u_i(x_i^*),$$

ahol x_i^* az x_i egyensúlyi értéke. Legyen t egy tetszőlegesen kicsi pozitív szám; III. *c* szerint $u_i[tx_i' + (1-t)x_i^*] > u_i(x_i^*)$. Azaz x_i^* bármely környezetében van X_i-

[7] Az a nézet, hogy néhány árunak szabad jószágnak kell lennie, mivel kínálatuk mindig meghaladja keresletüket, a határhaszon-elmélet eredetéig nyúlik vissza, lásd *Menger* [13], 98—100. old. *Schlesinger* [10] ismerte fel először, hogy az áregyensúly feltételeinek a 4. feltételben megfogalmazott alakja döntő fontosságú a Walras-féle egyensúlyi egyenletek megoldásának egzisztenciájához.

nek x_i^*-nál jobb pontja. A *2. feltétel*ből:

$$p^* x_i^* \leqq p^* \zeta_i + \sum_j \alpha_{ij} p^* y_j^*.$$

Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség szigorúan áll. Akkor ki tudjuk választani X_i-nek egy olyan pontját, amelyre az egyenlőtlenség még mindig áll, és amely jobb x_i^*-nél, ami ellentmond a *2. feltétel*nek.

(1) $$p^* x_i^* = p^* \zeta_i + \sum_j \alpha_{ij} p^* y_j^*.$$

Az i-edik egyénnek ahhoz, hogy elérje az egyensúlyi fogyasztási tervét, feltétlenül meg kell kapnia a jobb oldalon álló teljes jövedelmet. Ezért nem tarthat meg semmit a h-adik áru induló készletéből, valamennyit piacra kell bocsátania, ha $p_h^* > 0$.

1.5.0. *Definíció: Vektorok egy* $(x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)$ *halmazát versenyegyensúlynak mondjuk, ha kielégíti az 1—4. feltételeket.*

1.5.1. *Tétel: Bármely gazdasági rendszerben, amely kielégíti az I—IV. feltevéseket, van versenyegyensúly.*

2. SEGÉDTÉTEL AZ ELVONT GAZDASÁGOKRÓL

2.0. Ebben a fejezetben az *elvont gazdaság* fogalmát vezetjük be, amely a *játék* fogalmának egy általánosítása, és megadjuk az egyensúly egy definícióját. Kimondunk egy segédtételt az egyensúly létezésének feltételeire az elvont gazdaságban. A segédtétel központi jelentőségű tanulmányunk tételeinek bizonyításában.

2.1. Legyen adva v számú részhalmaz R^l-ben; $\mathfrak{A}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, v)$. Legyen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_v$, azaz $\mathfrak{A}$ a rendezett $a = (a_1, \ldots, a_v)$ vektor v-sök halmaza, ahol $a_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, v$. Tegyük fel, hogy valamennyi ι-ra létezik egy $\mathfrak{A}$-n definiált f_ι valós függvény. Legyen

$$\overline{\mathfrak{A}}_\iota = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota-1} \times \mathfrak{A}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_v,$$

azaz a $\bar{a}_\iota = (a_1, \ldots, a_{\iota-1}, a_{\iota+1}, \ldots, a_v)$ rendezett vektor-$(v-1)$-esek halmaza, ahol $a_{\iota'} \in \mathfrak{A}_{\iota'}$ minden $\iota' \neq \iota$-re. Legyen $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ egy függvény, amely valamennyi $\bar{a}_\iota \in \overline{\mathfrak{A}}_\iota$-hoz $\mathfrak{A}_\iota$ egy részhalmazát rendeli. Ezek után az $[\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_v, f_1, \ldots, f_v, A_1(\bar{a}_1), \ldots, A_v(\bar{a}_v)]$ sorozatot *elvont gazdaság*nak nevezzük.

2.2. E definíció indoklásához tekintsük először azt a speciális esetet, amikor az $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ függvények konstansok, azaz $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ az $\mathfrak{A}_\iota$-nek az $\bar{a}_\iota$-től független rögzített részhalmaza, és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $A_\iota(\bar{a}_\iota) = \mathfrak{A}_\iota$. Ekkor a következő értelmezés adható: van v számú egyén; a ι-dik az $\mathfrak{A}_\iota$ bármely a_ι elemét választhatja, $a_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$; és miután a döntések megtörténtek az ι-dik egyén kézhez kap

$f_\iota(a)$ összeget, ahol $a=(a_1, \ldots, a_\nu)$. Ebben az esetben az elvont gazdaság nyilvánvalóan egy játékra redukálódik.

Egy játékban az egyes játékosokat megillető kifizetés függ az összes játékos stratégiájától, de az egyes játékosok választható stratégiáinak tartománya független a többi játékos által választott stratégiától. Az elvont gazdaság ily módon a játék egy általánosításaként jellemezhető, amelyben egy résztvevő döntése befolyásolja az összes többinek mind a kifizetését, mind a döntési tartományát.

A gazdasági rendszer absztrakt modelljének kidolgozásakor a fogyasztó speciális helyzete miatt van szükség erre az általánosításra. Az ő „cselekvéseit" alternatív fogyasztási vektoroknak tekinthetjük, amelyeket azonban egy jövedelmi korlát határol be, mégpedig az, hogy a kiválasztott javaknak az uralkodó árakon vett költsége nem haladhatja meg a fogyasztó jövedelmét. Igen ám, de az árakat és esetleg jövedelmének egyes vagy összes komponensét más résztvevők döntései határozzák meg. Így a fogyasztó számára, aki a gazdasági rendszer egyik résztvevője, az $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ függvény nem tekinthető konstansnak.

2.3. *J. F. Nash* [14]-ben bevezette a játék *egyensúlyi pont*jának formalizált fogalmát.[8] A definíció könnyen kiterjeszthető az elvont gazdaságra (lásd: *Debreu* [5], 888. old.).

Definíció: a^* *az* $[\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu, f_1, \ldots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \ldots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$ *egy egyensúlyi pontja, ha* $a_\iota^* \in A_\iota(\bar{a}_\iota^*)$ *és* $f_\iota(\bar{a}_\iota^*, a_\iota^*) = \max_{a_\iota \in A(\bar{a}_\iota^*)} f_\iota(\bar{a}_\iota^*, a_\iota)$, minden $\iota = 1, \ldots, \nu$-re.

Tehát egy egyensúlyi pontot az a tulajdonság jellemez, hogy abban valamennyi résztvevő maximalizálja bevételét azon cselekvések halmazán, amelyet a többi résztvevő döntései megengednek számára.

2.4. Megismétlünk néhány definíciót az [5]-ből (888—889. old.). Az $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ *gráf*ja az $\{a | a_\iota \in A_\iota(\bar{a}_\iota)\}$ halmaz. Ez általánosítja a függvény gráfjának szokásos definícióját az $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ többértékű függvényekre.

Az $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ függvényt *folytonos*nak mondjuk $\bar{a}_\iota^0$-ban, ha minden $a_\iota^0 \in A_\iota(\bar{a}_\iota^0)$ vektorra és minden $\bar{a}_\iota^0$-hoz konvergáló $\{\bar{a}_\iota^n\}$ sorozatra van olyan $\{a_\iota^n\}$ a_ι^0-hoz konvergáló sorozat, hogy $a_\iota^n \in A_\iota(\bar{a}_\iota^n)$ minden n-re. Ha $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ egyértékű függvény, ez a definíció a folytonosság szokásos definíciójával egyezik meg.

2.5. *Segédtétel:* Ha $\mathfrak{A}_\iota$ *minden* ι*-ra kompakt és konvex, és ha* $f_\iota(\bar{a}_\iota, a_\iota)$ *folytonos a* $\mathfrak{A}$ *halmazon és kvázikonkáv*[9] a_ι*-ben minden* $\bar{a}_\iota$*-ra, és ha* $A(\bar{a})$ *folytonos függvény és gráfja zárt halmaz, és ha az* $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ *halmaz konvex és nem üres minden* $\bar{a}_\iota$*-ra, akkor az* $[\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu, f_1, \ldots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \ldots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$ *elvont gazdaságnak létezik egyensúlyi pontja.*

[8] Valójában a fogalmat *A. A. Cournot* [3] alkotta meg egy oligopolisztikus gazdaság speciális esetére. (Lásd 80—81. old.)

[9] A kvázikonkávitás definícióját lásd az 1.3.1. alpontban.

E segédtétel általánosítása *J. F. Nash* [14]-ben található tételének, amely játékokra mondja ki az egyensúlyi pont létezését. Emellett speciális esete az [5]-ben található tételnek, ha azt a 889. oldalán levő megjegyzéssel együtt nézzük.[10]

3. AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA

3.1.0. Definiálni fogunk egy elvont gazdaságot, amelynek egyensúlyi pontjai a versenyegyensúly valamennyi tulajdonságával rendelkeznek. $m+n+1$ számú résztvevője lesz: az m fogyasztóegység, az n termelőegység és egy fiktív résztvevő, aki az árakat megválasztja, és akit *piac*nak nevezhetünk.

Bármelyik i fogyasztó egységre legyen $\bar{x}_i$ egy pont az

$$X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_m \times Y_1 \times \ldots \times Y_n \times P$$

halmazban, azaz $\bar{x}_i$ magában foglalja komponensként az $x_{i'}$ $(i' \neq i)$, az y_j $(j=1, \ldots, n)$ és a p vektorokat. Definiáljuk

$$A_i(\bar{x}_i) = \left\{ x_i | x_i \in X_i,\ px_i \leqq p\zeta_i + \max\left[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} py_j\right] \right\}.$$

Ezek után tanulmányozni fogjuk a következő elvont gazdaságot:

$$E = [X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, P, u_1(x_1), \ldots, u_m(x_m), py_1, \ldots, py_n, pz, A_1(\bar{x}_1), \ldots$$
$$\ldots, A_m(\bar{x}_m), Y_1, \ldots, Y_n, P].$$

Vagyis, az első m résztvevő mindegyike — az egyes fogyasztóegységek — választ egy x_i vektort az X_i halmazból, mégpedig olyat, ami az $x_i \in A_i(\bar{x}_i)$ megszorítást kielégíti. A választás $u_i(x_i)$ eredménnyel jár. A következő n számú résztvevő — a termelőegységek — közül a j-edik az y_j vektort választja az Y_j halmazból, amit a többi résztvevő döntése nem korlátoz, és ez számára py_j eredménnyel jár. Az utolsó résztvevő, a piac, p-t választja a P-ből (a döntést itt sem befolyásolja a többi résztvevő döntése), és pz összeget kap. A z-t itt ugyanúgy, mint az 1.4.1. alpontban, az x_i $(i=1, \ldots, m)$ és az y_j $(j=1, \ldots, n)$ vektorok segítségével definiáljuk. Az X_i, Y_j és P tartományokat rendre az 1.3.0., 1.2.2., és 1.4.0. alpontokban definiáltuk.

3.1.1. Az E elvont gazdaságnak csak két eleme kíván külön magyarázatot. Az egyik a piac nevű résztvevő kifizetési függvénye. Vegyük észre, hogy a z-t az x_i

[10] Ennek belátáshoz elég megjegyeznünk, hogy egy kompakt, konvex halmaz szükségképpen összehúzható poliéder (az összehúzható poliéder definícióját az [5] megadja a 887—888. oldalakon), és hogy az $A_i(\bar{a}_i)$ gráfjának kompaktsága következik a zártságából, amit itt feltételeztünk, és az $A_i(\bar{a}_i)$ gráfját tartalmazó $\mathfrak{A}$ kompaktságából, ami miatt korlátos is, valamint, hogy az $\{a_i | a_i \in A_i(\bar{a}_i),\ f(\bar{a}_i, a_i) = \max_{a_i' \in A_i(\bar{a}_i)} f_i(\bar{a}_i, a_i')\}$ halmaz bármely $\bar{a}$ esetén konvex és ezért összehúzható halmaz, ha $f_i(\bar{a}_i, a_i)$ kvázikonkáv a_i-ban.

és az y_j határozza meg. Tegyük fel, hogy a piac nem egy pillanat alatt maximalizál, hanem adottnak véve a többi résztvevő döntéseit, úgy választja meg az árakat, hogy saját bevételét növelje. Adott z-re pz lineáris függvénye p-nek, ami úgy növelhető, hogy p_h-t azokra az árukra, amelyekre $z_h > 0$ növeljük, és amelyekre $z_h < 0$ csökkentjük (feltéve, hogy p_h még nem 0). Ez viszont pontosan a klasszikus „kereslet—kínálat törvénye" (lásd az 1.4.1. alpontot), és így a piac nevű résztvevő motivációja megfelel a versenyegyensúly egyik elemének. Ez az intuitív megjegyzés mindamellett nem teszi jogosulttá még a piac bevételének *sajátos* megválasztását. Ennek igazolását a 3.2. pontban adjuk meg.[11]

3.1.2. Az $A_i(\bar{x}_i)$ definíciójában az $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p y_j$ kifejezést a $\max\left[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p y_j\right]$ helyettesíti. Tetszőlegesen megválasztva p és y_j vektorokat (a megfelelő P, illetve Y_j tartományon belül) lehetséges, hogy az $\left\{x_i | x_i \in X_i,\ p x_i \leqq p\zeta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p y_j\right\}$ halmaz üres. E nehézség elkerülésére kell a jelzett helyettesítés. Mivel valamely $x_i' \in X_i$ esetén, $\zeta_i \geqq x_i'$ (az 1.3.2. alpont IV. *a* feltevése szerint), $p\zeta_i \geqq p x_i'$, és

$$p\zeta_i + \max\left[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p y_j\right] \geqq p\zeta_i \geqq p x_i',$$

ezért $A_i(\bar{x})$ nem üres.

Természetesen meg kell mutatni, hogy ez a változtatás nem befolyásolja az *egyensúlyi helyzet*et. Az E-egyensúly definíciója szerint (lásd a 2.3. pontot) y_j^* maximalizálja $p^* y_j$-t az $y_j \in Y_j$ feltétel mellett (a csillagok jelölik az E-egyensúlyi értékeket). Az I. *a* feltevés szerint (lásd 1.2.2. alpontot) $0 \in Y_j$, tehát speciálisan

$$p^* y_j^* \geqq p^* = 0. \tag{1}$$

A IV. *b* feltevés miatt $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^* \geqq 0$, és $\max\left[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*\right] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*$. Következésképp

$$A_i(\bar{x}_i^*) = \left\{x_i | x_i \in X_i,\ p^* x_i \leqq p^* \zeta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*\right\}.$$

Az E elvont gazdaság egyensúlyi pontjának és a fogyasztó egység kifizetésének definíciójából következik:

(2) Az E elvont gazdaság kielégíti a *2. feltétel*t.

3.2. Mielőtt bemutatnánk az egyensúlyi pont létezését E-re, megmutatjuk, hogy egy ilyen egyensúlyi pont az 1.5.0. alpontban vett értelemben is versenyegyensúly. Már láttuk, hogy a *2. feltétel* teljesül, emellett az *1.* és *3. feltétel*ek teljesülése azonnal következik az egyensúlyi pont definíciójából és a kifizetések alakjából.

Az 1.4.2. alpontban bemutattuk, hogy az ott levő (1) egyenlet következik a *2. feltétel*ből, amelynek fennállását itt már bizonyítottuk, valamint a III. *b*, III. *c*

[11] Ehhez a piaci kifizetéshez hasonló fogalom található *G. Debreu* [4] 11. 12. részében.

feltevésekből. Összegezzünk i szerint és vegyük figyelembe, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$ a IV. *b* feltételből. Akkor z definíciójából

(1) $$p^* z^* = 0.$$

Legyen δ^h az a vektor, amelynek minden komponense 0, kivéve a h-adik helyen állót, ami 1. Ez esetben $\delta^h \in P$ (lásd az 1.4.0 alpontban a *3. feltételt*). Ily módon az egyensúlyi pont definíciója szerint

$$0 = p^* z^* \geqq \delta^h z^* = z_h^*,$$

vagyis:

(2) $$z^* \leqq 0.$$

Az (1) és a (2) együtt a *4. feltételt* adja meg. Ezzel megmutattuk, hogy E bármely egyensúlyi pontja kielégíti az *1—4. feltételt* és ezért versenyegyensúly. A fordított állítás is nyilvánvalóan igaz.

3.3.0. A 2.5. pontban kimondott segédtétel sajnos közvetlenül nem alkalmazható E-re mivel a döntési halmazok nem kompaktak.

Legyen

$\hat{X}_i = \{x_i | x_i \in X_i$ és léteznek $x_{i'} \in X_{i'}$ vektorok minden $i' \neq i$ indexhez, és $y_j \in Y_j$ vektorok minden j indexhez úgy, hogy $z \leqq 0\}$.

$\hat{Y}_j = \{y_j | y_j \in Y_j$ és léteznek $x_i \in X_i$ vektorok minden i indexhez, és $y_{j'} \in Y_{j'}$ vektorok minden $j' \neq j$ indexhez úgy, hogy $z \leqq 0\}$.

$\hat{X}_i$ lenne az i egyén rendelkezésére álló fogyasztási vektorok halmaza, ha teljes szabályozó hatalma lenne a gazdaság felett, de az erőforrás-korlátokat figyelembe kellene vennie. $\hat{Y}_j$ értelmezése hasonló. Be akarjuk bizonyítani, hogy minden ilyen halmaz korlátos. Az világos, hogy egy $x_i^* \in E$-egyensúlynak az $\hat{X}_i$ halmazhoz, és egy $y_j^* \in E$-egyensúlynak az $\hat{Y}_j$ halmazhoz kell tartoznia.

3.3.1. Tegyük fel, hogy $\hat{Y}_1$ nem korlátos. Akkor léteznek olyan y_j^k, x_i^k sorozatok, amelyekre

(1) $$\lim_{k \to \infty} |y_1^k| = \infty, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j^k \geqq \sum_{i=1}^{m} x_i^k - \zeta, \quad y_j^k \in Y_j, x_i^k \in X_i.$$

Legyen

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi_i.$$

Akkor a II. feltevésből $\sum_{i=1}^{m} x_i^k \geqq \zeta$, és így

(2) $$\sum_{j=1}^{n} y_j^k \geqq \xi - \zeta.$$

Legyen $\mu^k = \max_j |y_j^k|$; elég nagy k-ra $\mu^k \geqq 1$ lesz. Az I. *a* feltevésből $(1/\mu^k) y_j^k + (1 - 1/\mu^k)\, 0 \in Y_j$. Az (1)-ből és a (2)-ből következik

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j^k/\mu^k) = (\xi - \zeta)/\mu^k; \quad y_j^k/\mu^k \in Y_j, \quad \text{ha} \quad k \text{ elég nagy;} \tag{3}$$

$$\lim_{k \to \infty} \mu^k = \infty; \quad |y_j^k/\mu^k| \leqq 1.$$

Az utolsó állításból adódóan választható egy olyan $\{k_q\}$ részsorozat, hogy valamennyi j esetén

$$\lim_{q \to \infty} y_j^{k_q}/\mu^{k_q} = y_j^0. \tag{4}$$

A (3)-ból, (4)-ből és az Y_j zártságából (lásd az I. *a* feltevést) következik

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^0 \geqq 0 \quad \text{és} \quad y_j^0 \in Y_j. \tag{5}$$

Az (5)-ből $\sum_{j=1}^{n} y_j^0 \in Y$. Az I. *b* feltevésből $\sum_{j=1}^{n} y_j^0 = 0$, azaz bármelyik adott j-re:

$$\sum_{j \neq j'} y_j^0 = -y_{j'}^0. \tag{6}$$

Mivel $0 \in Y_j$ minden j-re, mind a bal oldal, mind y_j^0, Y-hoz tartozik. A jobb oldal tehát mind Y-hoz mind $(-Y)$-hoz hozzátartozik, és így I. *c* miatt $y_j^0, = 0$ bármely j' esetén. A (4)-ből ekkor az következik, hogy $|y_j^{k_q}| = \mu^{k_q}$ egyenlőség legfeljebb véges sok q-ra állhat fenn rögzített j mellett. De ez ellentmondás, mert μ^{k_q} definíciója miatt ennek az egyenlőtlenségnek legalább egy j esetében valamennyi q-ra fenn kell állnia, tehát valamelyik j mellett végtelen számú q-ra. Bebizonyítottuk, hogy $\hat{Y}_1$ korlátos. Ugyanezzel az érveléssel

$$\hat{Y}_j \text{ korlátos minden } j\text{-re.} \tag{7}$$

3.3.2. Legyen $x_i \in \hat{X}_i$. Definíció szerint

$$\xi_i \leqq x_i \leqq \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i' \neq 1} x_{i'} + \zeta, \quad (x_{i'} \in X_{i'},\ y_j \in Y_j). \tag{1}$$

Megint csak definíció szerint következik, hogy $y_j \in \hat{Y}_j$ minden j-re, és $x_{i'} \geqq \xi_{i'}$.

$$\xi_i \leqq x_i \leqq \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i' \neq i} \zeta_{i'} + \zeta, \quad (y_j \in \hat{Y}_j).$$

A 3.3.1. alpont (7) kijelentése miatt a jobb oldal korlátos.

$$\hat{X}_i \text{ korlátos minden } i\text{-re.} \tag{2}$$

3.3.3. Ezért továbbmenve, kiválaszthatunk egy c pozitív valós számot, amelyre a $C = \{x \,|\, |x_h| \leqq c$ minden h-ra$\}$ kocka a *belsejében* tartalmazza az összes $\hat{X}_i$ és $\hat{Y}_j$ halmazt. Legyen $\tilde{X}_i = X_i \cap C$, $\tilde{Y}_j = Y_j \cap C$.

3.3.4. Bevezetünk egy új elvont gazdaságot, $\tilde{E}$-t, amely ugyanolyan, mint a 3.1. pontban definiált E, de itt az X_i helyén $\tilde{X}_i$, az Y_j helyén $\tilde{Y}_j$ szerepel. Az $A_i(\bar{x}_i)$ halmaz (lásd 3.1.0. alpontot) megfelelője legyen $\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$. A következőkben igazoljuk, hogy az új elvont gazdaság a segédtétel összes feltételét kielégíti.

A II. és az I. *a* fennállása miatt X_i és Y_j zárt konvex halmazok, C halmaz egy kompakt konvex halmaz, ezért $\tilde{X}_i$ és $\tilde{Y}_j$ kompakt konvex halmazok. P nyilvánvalóan kompakt és konvex.

Egy fogyasztó egységet tekintve III. *a* és III. *c* biztosítja, hogy $u_i(x_i)$ folytonos és kvázikonkáv (lásd az 1.3.1. alpont tárgyalását). Egy termelőegységet vagy a piac elnevezéssel illetett résztvevőt tekintve a folytonosság triviális, és a kvázikonkávitás fennáll bármely lineáris függvényre.

Egy termelőegység, illetve a piac számára Y_j, illetve P konstans, és ezért triviálisan folytonos, a gráf zárt burka egyszerűen az $\mathfrak{A}=\tilde{X}_1\times\ldots\times\tilde{X}_m\times\tilde{Y}_1\times\ldots\times\tilde{Y}_n\times P$ zárt burka. Az Y_j és P halmazok bizonyosan konvexek és nem üresek.

Egy fogyasztóegység számára az $\tilde{A}_i(x_i)$ halmazt egy, az x_i-ben lineáris egyenlőtlenség definiálja (3.1.0.), és így feltétlenül konvex. Minden egyes i-re x_i' legyen a következő tulajdonságú: $x_i'\leqq\zeta_i$, $x_i'\in X_i$ (lásd a IV. *a* feltevést); és legyen $y_j'=0$. Mivel $\sum_{i=1}^{m}x_i'-\sum_{j=1}^{n}y_j'-\zeta\leqq 0$, $x_{i'}\in\tilde{X}_i$ minden i-re definíció szerint, és ezért $x_i'\in C$. A 3.1.2. alpontban bemutattuk, hogy $x_i'\in A_i(\bar{x}_i)$ minden $\bar{x}_i$-re, mivel $\tilde{A}_i(\bar{x}_i)=[A_i(\bar{x}_i)]\cap C$, $\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$ tartalmazza az x_i' vektort, tehát nem üres.

Mivel a jövedelmi korlát egy gyenge egyenlőtlenség a két folytonos függvény között, világos, hogy az $\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$ gráfja zárt.

3.3.5. Csak annak bizonyítása maradt hátra, hogy $\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$ folytonos.

Megjegyzés: Ha $p\zeta_i>\min_{x_i\in\tilde{X}_i}px_i$, *akkor* $\tilde{A}_i(x_i)$ *folytonos az* $\bar{x}_i=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,p)$ *pontban.*

Bizonyítás: Legyen $r_i=p\zeta_i+\max\left[0,\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}py_j\right]$. Ha $\bar{x}_i^k$ konvergál $\bar{x}_i$-hez, $\lim_{k\to\infty}p^k=p$, $\lim_{k\to\infty}r_i^k=r_i$. Tekintsünk egy $x_i\in\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$ pontot, ekkor

$$x_i\in\tilde{X}_i,\quad px_i\leqq r_i. \tag{1}$$

a) Ha $px_i<r_i$, akkor $p^kx_i<r_i^k$ minden elég nagy k-ra és $x_i\in\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$. Ezek után elég $x_i^k=x_i$-t választani, minden elég nagy k-ra. (Lásd a folytonosság definícióját a 2.4. pontban.)

b) Ha $px_i=r_i$, válasszuk x_i'-t a megjegyzésben foglalt hipotézisnek megfelelően úgy, hogy $x_i'\in\tilde{X}_i$, $px_i'<p\cdot\zeta_i\leqq r_i$. Elég nagy k esetében $p^kx_i'<r_i^k$. Definiáljuk $x_i(\lambda)=\lambda x_i+(1-\lambda)x_i'$, és tekintsük azon λ értékek halmazát, amelyekre $0\leqq\lambda\leqq 1$ és $x_i(\lambda)\in\tilde{A}_i(x_i^k)$. Mivel $\tilde{X}_i$ konvex, $x_i(\lambda)\in\tilde{X}_i$. Így vagy

$$p^k[\lambda x_i+(1-\lambda)x_i']\leqq r_i^k,$$

vagy

$$\lambda\leqq(r_i^k-p^kx_i')/(p^kx_i-p^kx_i').$$

Megjegyezzük, hogy elég nagy k-ra a nevező pozitív, mivel $px_i = r_i > px_i'$. A legnagyobb, a felsorolt feltételeket kielégítő, λ ekkor:

$$\lambda^k = \min [1, (r_i^k - p^k x_i')/(p^k x_i - p^k x_i')].$$

Elég nagy k-ra $\lambda^k > 0$. Így $x_i(\lambda^k) \in \tilde{A}(\bar{x}_i^k)$ minden elég nagy k-ra. Továbbá

$$\lim_{k\to\infty} r_i^k = r_i = \lim_{k\to\infty} p_i^k x_i, \quad \text{így} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda^k = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty} x_i(\lambda^k) = x_i.$$

$\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$ folytonosságát tehát bebizonyítottuk.

Ha a IV. *a* feltevés fennáll, akkor a megjegyzés feltétele triviálisan igaz minden $p \in P$ és $y_j \in \tilde{Y}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ esetén.

3.4.0. Az $(x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)$ egyensúlyi pont létezését az $\tilde{E}$ elvont gazdaságra ezzel bemutattuk. A következőkben bebizonyítjuk, hogy ez a pont az E elvont gazdaságnak szintén egyensúlyi pontja, abban az értelemben, ahogy azt a 3.1. pontban leírtuk. A fordított állítás helyessége nyilvánvaló. Ily módon a versenyegyensúly *ekvivalens* lesz egy $\tilde{E}$-egyensúllyal (lásd a 3.2. pont végét).

3.4.1. Az I. *a* feltevésből és a C definíciójából (3.3.3.) következik, hogy $0 \in \tilde{Y}_j$ valamennyi j indexre. Ezért úgy, mint a 3.1.2. alpontban:

$$\max \left[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*\right] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*.$$

Az $\tilde{A}_i(\bar{x}_i)$ definíciójából

$$p^* x_i^* \leqq p^* \zeta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*.$$

Összegezzünk i szerint; ekkor $p^* x^* \leqq p^* \zeta + p^* y^*$, másképpen $p^* z^* \leqq 0$. Rögzített z^* esetén p^* maximalizálja pz^*-t, minden $p \in P$-re; a 3.2. pontban kifejtett érveléshez hasonlóan innen következik az, hogy

(1) $$z^* \leqq 0.$$

Az (1)-ből és a 3.3.0. alpontban szereplő definíciókból következik, hogy $x_i^* \in \hat{X}_i$, $y_j^* \in \hat{Y}_j$ minden i-re és j-re, és a 3.3.3. miatt az x_i^* és az y_j^* C *belső* pontjai.

Tegyük fel, hogy valamely $x_i' \in A_i(\bar{x}_i^*)$ esetén $u_i(x_i') > u_i(x_i^*)$. III. *c* szerint $u_i[tx_i' + (1-t)x_i^*] > u_i(x_i^*)$, ha $0 < t < 1$. De elég kis t-re a $tx_i' + (1-t)x_i^*$ a C-ben fekszik. Mivel $tx_i' + (1-t)x_i^* \in A_i(\bar{x}_i^*)$, az utóbbi halmaz konvexitása miatt $tx_i' + (1-t)x_i^* \in \tilde{A}_i(\bar{x}_i^*)$ elég kis t-re, ami ellentmond annak, hogy x_i^* egyensúlyi érték $\tilde{E}$ számára.

(2) Az x_i^* maximalizálja az $u_i(x_i)$ értéket, minden $x_i \in A_i(\bar{x}_i^*)$-re.

Tegyük fel, hogy valamely $y_j' \in Y_j$ esetén $p^* y_j' > p^* y_j^*$. Ekkor $p^*[ty_j' + (1-t)y_j^*] > p^* y_j^*$, $0 < t < 1$ esetén. Mint az előző részben, a konvex kombináció $\tilde{Y}_j$-ben fekszik elég kis t-re, ami ellentmond y_j^* egyensúlyi jellegének $\tilde{E}$-ben.

(3) Az y_j^* maximalizálja $p^* y_j$-t, minden $y_j \in Y_j$-re.

Az, hogy p^* maximalizálja pz^*-ot $p \in P$-re, közvetlenül következik az $\tilde{E}$ egyensúlyi pontjának definíciójából, mivel a p értékek tartománya a két elvont gazdaságban ugyanaz.

Megmutattuk tehát, hogy $(x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)$ az E számára is egyensúlyi pont, tehát — mint a 3.2. pontban láttuk — versenyegyensúly. Az *1. tételt* ezzel bebizonyítottuk.

4. A VERSENYEGYENSÚLY MÁSODIK EGZISZTENCIATÉTELE

4.0. Mint ezt az 1.3.2. alpontban megjegyeztük, a IV. *a* feltevés, amely gyakorlatilag azt állítja, hogy a fogyasztóegység valamennyi áruból eladásra alkalmas pozitív indulókészlettel rendelkezik, teljesen irreális és feloldásra szorul. A *2. tétel* megteszi ezt a lépést, de különböző további feltevések és a bizonyítás bonyolódása árán. A továbbiakban az I—III. feltevéseket megőrizzük. A *2. tétel* többi feltevését a következőkben adjuk meg.

4.1. A IV. *a* feltevést a következővel helyettesítjük:

IV′. *a* $\zeta_i \in R^l$; *valamely* $x_i \in X_i$ *esetén* $x_i \leqq \zeta_i$; *és legalább egy* $h \in \mathcal{P}$*-re* $x_{hi} < \zeta_{hi}$.

A $\mathcal{P}$ halmaz pontos definícióját a 4.4. pontban adjuk majd meg; röviden szólva: e halmaz a munka azon fajtáiból áll, amelyek mindig termelékenyek. A IV′. *a* gyengébb a IV. *a)* feltevésnél, mert ebben csak annyit teszünk fel, hogy az egyén képes legalább egy termelékeny munkafajtát eladásra felkínálni. A IV′. *a* és IV. *b* feltevéseket együtt IV′.-vel jelöljük.

4.2. Legyen $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$

V. *Létezik olyan* $x \in X$ *és* $y \in Y$, *hogy* $x < y + \zeta$.

V. feltevés kimondja, hogy a gazdasági rendszer a fogyasztási és termelési vektorok megválasztásával megszervezhető úgy, hogy minden áruból túlkínálat legyen.

4.3. Mint a 3.2. pontban, δ^h itt is a pozitív egységvektor lesz az R^l h-adik tengelyén. Bármely $\lambda > 0$ esetén az $x_i + \lambda\delta^h$ vektor az x_i vektorhoz képest λ mennyiségű növekedést valósít meg a h-adik áruból, mialatt az összes többi áru fogyasztása változatlan marad.

Definíció: Legyen $\mathcal{D}$ az áruk egy olyan halmaza, hogy ha $i = 1, \ldots, m$, $x_i \in X_i$, $h \in \mathcal{D}$ fennállnak, akkor van olyan $\lambda > 0$ amelyre $x_i + \lambda\delta^h \in X_i$ és

$$u_i(x_i + \lambda\delta^h) > u_i(x_i).$$

$\mathcal{D}$ az olyan áruk halmaza, amelyeket minden fogyasztó, mindig szívesen megvásárol (keresett áruk).

VI. *A* $\mathcal{D}$ *halmaz nem üres.*

A VI. feltevés az 1.3.1. alpontban megadott III. *b* erősebb formája. Ugyanúgy, ahogy ott megjegyeztük, a VI. is gyengíthető, ha csupán azt állítjuk, hogy csak a valamennyi fogyasztási vektor szerint keresett és a fennálló erőforrás és technikai korlátokon belül maradó áruk $\mathscr{D}'$ halmaza legyen nem üres. E gondolatot formalizálva bevezethetjük a következő definíciót:

Definíció: Legyen $\mathscr{D}'$ azon áruk halmaza, amelyekre, ha $i=1, \ldots, m$, $x_i \in \hat{X}_i$, $h \in \mathscr{D}'$, akkor van olyan $\lambda>0$, amelyre $x_i+\lambda\delta^h \in X_i$, és

$$u_i(x_i+\lambda\delta^h) > u_i(x_i).$$

Ekkor a VI. helyébe tehetjük:

VI'. *A $\mathscr{D}'$ halmaz nem üres.*

4.4. *Definíció:* Legyen $\mathscr{P}$ azon áruk halmaza, amelyekre ha $y \in Y$ és $h \in \mathscr{P}$, akkor *a)* $y_h \leqq 0$ és *b)* valamelyik $y' \in Y$ és minden $h' \neq h$ esetén $y'_{h'} \equiv y_{h'}$, és legalább egy $h'' \in \mathscr{D}$-re $y'_{h''} > y_{h''}$.

VII. *A $\mathscr{P}$ halmaz nem üres.*

A VII. feltevésnek a bizonyításban kulcsszerepe lesz. Értelmezésünkben a $\mathscr{P}$ halmaz bizonyos munkafajtákat tartalmaz. Az *a)* rész egyszerűen azt biztosítja, hogy nincs olyan munkafajta, legalábbis $\mathscr{P}$-ben nincs, amelyet termelőegység termelhetne. A *b)* rész azt állítja, hogy ha valamely „termelékeny" munkafajta felhasználása korlátozatlan, akkor legalább egy keresett áru (egy áru $\mathscr{D}$-ből) termelése növelhető, mégpedig úgy, hogy a többinek a kibocsátása nem csökken, és a szóban forgó munkafajtától eltekintve a felhasználások nem nőnek.

Egy eset, amelyre a VII. feltevés nem igaz, az állandó technológiai koefficiensű gazdaság esete, ahol, ha a termelés egy adott típusú munkát igényel, akkor ehhez — közvetlenül vagy közvetve — néhány kiegészítő tényező is szükséges. Ebben az esetben intuitív módon könnyű végiggondolni, hogyan válik az egyensúly lehetetlenné. Adottnak véve az egymással komplementáris kapcsolatban levő erőforrások rendelkezésre álló kiinduló mennyiségét[12], az alkalmazható munkamennyiségnek lesz egy maximuma, olyan értelemben, hogy a munkaerő további növelése már egyetlen áru kibocsátását sem növeli. Mármost, mint ismeretes, a munka kínálata felfelé vagy lefelé mozoghat, ahogy a reálbérek változnak (lásd *L. Robbins* [17]), és általában véve meglehetősen rugalmatlan a reálbérek változására. Nevezetesen, ahogy a reálbérek nulla felé tartanak, a kínálat nem válik szükségképen nullává. Ellenkezőleg, ahogy a reáljövedelmek csökkennek, jóllehet az ellenérték egyre kisebbé válik, az egyre égetőbb kielégítetlen szükségletek mégis a nagyobb munkakínálat irányába hajtanak. Ezért teljesen elképzelhető, hogy a munkakínálat minden pozitív reálbér esetén meghaladja a maximálisan alkalmazható munkások számát, azaz a vállalatok keresletét. Ezért pozitív reálbérek esetében nem lehet egyensúly. Ha nulla a reálbér, az eltérés ellenkező irányú, ott a kereslet változatlanul pozitív, míg a kínálat nulla, így ismét nem lesz egyensúly. Az érvelés kritikus pontja az, hogy a munka kínálati görbéje a nullához tartó reálbérek esetén szakadásos.

[12] Ilyen komplementáris erőforrás lehet a föld, bizonyos ipari folyamatokban fontos nyersanyagok vagy az induló tőkefelszerelés.

A VII. feltevés kizárja a korlátozó tényezők minden olyan helyzetét, amely mellett, a keresett árukban kifejezve, valamennyi munkafajta határtermelékenysége nulla. Összevetve egyrészt a IV'.*a* feltevéssel, másrészt a VI. feltevéssel, a VII. feltevés biztosítja, hogy bármely egyén képes olyan árut kínálni, amely legalábbis közvetett módon értékes.

Megjegyezzük, hogy a VII. feltevés teljesül, ha van olyan termelési folyamat, amely kiegészítő ráfordítások közreműködése nélkül termel keresett árut valamely munkafajtából. A háztartási munka vagy más személyi szolgáltatás eshet ebbe a kategóriába.[13]

Legyen $\hat{Y}=\{y \mid y\in Y$, minden i-re van olyan $x_i\in X_i$, hogy $z\leqq 0\}$. Megjegyezzük, hogy a VII. feltevés hathatósan gyengíthető a következő módon (ugyanúgy, ahogy a VI. gyengíthető volt a VI'. alakban):

VII'. *A $\mathscr{P}'$ halmaz nem üres,* ahol $\mathscr{P}'$ a következőképpen definiált:

Definíció: Legyen $\mathscr{P}'$ azon áruk halmaza, hogy ha $h\in\mathscr{P}'$ és

a) $y\in Y$, akkor $y_h\leqq 0$,

b) $y\in\hat{Y}$, akkor valamelyik $y'\in Y$ és minden $h'\neq h$ esetén $y'_{h'}\geqq y_{h'}$, mialatt legalább egy $h''\in\mathscr{D}$ esetében $y'_{h''}>y_{h''}$.

Vegyük észre, hogy a III. *b*, a VI. és a VII. *egyidejűleg* gyengíthető a III'. *b*, a VI', és a VII'. alakokká.

4.5. *2. tétel: Egy gazdasági rendszerben, amely kielégíti az I—III., IV'. és V—VII. feltevéseket, létezik versenyegyensúly.*

5. A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA

5.0. Legyen π a $\mathscr{P}$ elemeinek száma. Bármely ε, $0<\varepsilon\leqq 1/2^{\pi}$ számhoz definiáljuk a következő halmazt.

$$P^{\varepsilon}=\{p \mid p\in P,\ p_h\geqq\varepsilon \text{ minden } h\in\mathscr{P}\text{-re}\}.$$

IV'. *a* miatt választhatunk olyan $x_i\in X_i$ vektort, hogy $x_{hi}\leqq\zeta_{hi}$ minden h-ra és $x_{h'i}<\zeta_{h'i}$ legalább egy h'-re. Bármely $p\in P^{\varepsilon}$ vektort véve

$$p(\zeta_i-x_i)=\sum_h p_h(\zeta_{hi}-x_{hi})\geqq p_{h'}(\zeta_{h'i}-x_{h'i})>0$$

vagyis

(1) van olyan $x_i\in X_i$, hogy $px_i<p\zeta_i$.

5.1.0. A *2. tétel* bizonyításának fő vonala hasonló lesz az *1. tétel*éhez. Azt kívánjuk megmutatni, hogy az E elvont gazdaság egyensúlyi pontja, ahogy azt a 3.1.0. al-

[13] Az olyan egyensúlytalanság és így az olyan munkanélküliség, amely VII. feltevés megsértése révén következik be az ún. „strukturális munkanélküliség" körébe tartozik.

pontban definiáltuk, létezik. Mint a 3.2. pontban láttuk, egy ilyen egyensúlyi pont versenyegyensúlyt definiál. Először is az E gazdaságot az E^ε

$$[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots Y_n, P^\varepsilon, u_1(x_1), \ldots, u_m(x_m), py_1, \ldots, py_n, pz, A_1(\bar{x}_1), \ldots$$

$$\ldots, A_m(\bar{x}_m), Y_1, \ldots, Y_m, P^\varepsilon]$$

gazdasággal helyettesítjük. Nyilvánvaló, hogy E^ε ugyanaz, mint E, csak az ártartomány a P^ε halmazzá zsugorodott. Elsőnek azt mutatjuk meg, hogy az E^ε gazdaságnak valamennyi ε esetében létezik egyensúlyi pontja; azután belátjuk, hogy valamely ε-ra E^ε-nak egy egyensúlyi pontja E-nek is egyensúlyi pontja.[14]

Ahhoz, hogy megmutassuk az E^ε egyensúlyi pontjának létezését, ugyanazt a technikát használjuk fel, amivel az *1. tétel*ben az E egyensúlyi pontjának létezését bizonyítottuk. Az okoskodás az, hogy az egyensúlyi pontnak, ha egyáltalán létezik, egy bizonyos korlátos tartományban kell elhelyezkednie. Tehát, ha az E^ε elvont gazdaságot úgy módosítjuk, hogy a cselekvési tartományokat alkalmas hiperkockákkal elmetsszük, ez nem érinti az egyensúlyi pontokat, ha ilyenek vannak. Ezzel a 2.5. pont segédtétele alkalmazhatóvá válik, és így az egyensúlyi pont létezése bizonyítható (lásd a 3.3. pontot).

5.1.1. Ez az alpont csupán heurisztikus értékű, és az előzőekben említett hiperkocka kiválasztásának megindoklására szolgál. Tegyük fel, hogy létezik az $[x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*]$ egyensúlyi pont az E^ε elvont gazdaság számára. Mivel a definíció szerint (lásd 3.1.0.-t) $x_i^* \in A_i(\bar{x}_i^*)$ minden i-re, azért

$$p^* x_i^* \leqq p^* \zeta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^*,$$

(lásd még 3.1.2.-t is). Ha i szerint összegzünk, és figyelembe vesszük, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$, a következő adódik:

$$p^* \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^* - \sum_{i=1}^{m} \zeta_i - \sum_{j=1}^{n} y_j \right) \leqq 0,$$

vagyis

$$p^* z^* \leqq 0.$$

Mivel p^* maximalizálja a pz^* értéket $p \in P^\varepsilon$-ra, az egyensúly definíciója szerint $pz^* \leqq 0$ minden $p \in P^\varepsilon$-re, azaz

$$p'_{h'} z_{h'}^* \leqq \sum_{h \neq h'} p_h (\zeta_h - x_h^* + y_h^*) \tag{1}$$

valamely h'-re.

[14] Az E^ε bevezetését a következő tény tette szükségessé: az 5.0. (1) kijelentése nem teljesülhet minden $p \in P$ esetén, és a 3.3.5. alpont *megjegyzés*ében kifejtett feltétel sem állhat minden $p \in P$ vektorra.

Vegyük észre, hogy mivel $y_h^* \leqq 0$, ha $h \in \mathscr{P}$, azért a 4.4. pont első definíciójának *a)* része értelmében is a II. feltevés felhasználásával:

$$x_h^* - y_h^* \geqq x_h^* \geqq \xi_h, \quad \text{ha} \quad h \in \mathscr{P}. \tag{2}$$

A ζ-t és ξ-t az 1.4.1., illetve 3.3.1. alpontban definiáltuk.

Bármely adott h' indexhez definiáljuk a p vektort a következőképpen: $p_h = \varepsilon$, ha $h \in \mathscr{P}$ és $h \neq h'$; $p_h = 0$, ha $h \notin \mathscr{P}$ és $h \neq h'$; $p_{h'} = 1 - \sum_{h \neq h'} p_h$. Így, ha $h' \in \mathscr{P}$, akkor $p_{h'} = 1 - (\pi - 1)\varepsilon$ (ami valóban $\geqq \varepsilon$, ha $\varepsilon = 1/2^\pi$); ha pedig $h' \notin \mathscr{P}$, akkor $p_{h'} = 1 - \pi\varepsilon$. Az (1) és a (2) következtében

$$\begin{cases} \text{ha} \quad h' \in \mathscr{P}, \quad \text{akkor} \quad [1-(\pi-1)\varepsilon] z_{h'}^* \leqq \varepsilon \sum_{\substack{h \in \mathscr{P} \\ h \neq h'}} (\zeta_h - \xi_h), \\ \text{ha} \quad h' \notin \mathscr{P}, \quad \text{akkor} \quad (1-\pi\varepsilon) z_{h'}^* \leqq \varepsilon \sum_{h \in \mathscr{P}} (\zeta_h - \xi_h). \end{cases} \tag{3}$$

Ha $0 < \varepsilon \leqq \dfrac{1}{2^\pi}$, akkor nyilván $1 - \pi\varepsilon > 0$, $1 - (\pi - 1)\varepsilon > 0$, és szükségképpen

$$\varepsilon/[1-(\pi-1)\varepsilon] < \varepsilon/(1-\pi\varepsilon).$$

Végül, minden h-ra: $\zeta_h - \xi_h \geqq 0$ a IV′. *a* és a II. miatt. Ha a (3) első egyenlőtlenségét végigosztjuk az $[1-(\pi-1)\varepsilon]$ értékkel azt kapjuk, hogy

$$z_{h'}^* \leqq \varepsilon/[1-(\pi-1)\varepsilon] \sum_{\substack{h \in \mathscr{P} \\ h \neq h'}} (\zeta_h - \xi_h) \leqq [\varepsilon/(1-\pi\varepsilon)] \tag{4}$$

$$\sum_{h \in \mathscr{P}} (\zeta_h - \xi_h), \quad \text{ha} \quad h' \in \mathscr{P}.$$

A két szélső tag között $h' \in \mathscr{P}$ esetén is fennáll ugyanez az egyenlőtlenség, amint azt a (3) második egyenlőtlenségét az $(1-\pi\varepsilon)$ értékkel végigosztva láthatjuk. De, ha $\varepsilon \leqq (1/2^\pi)$, akkor rendre azt látjuk, hogy $2\pi\varepsilon \leqq 1$, $\pi\varepsilon \leqq 1 - \pi\varepsilon$, és végül $\Pi(1-\Pi\varepsilon)$-nal osztva: $\varepsilon/(1-\pi\varepsilon) \leqq 1/\pi$. A (4)-ből:

$$z_h^* \leqq (1/\pi) \sum_{h \in \mathscr{P}} (\zeta_h - \xi_h).$$

Legyen $\zeta_h = \zeta_h + (1/\pi) \sum_{h \in \mathscr{P}} (\zeta_h - \xi_h)$, ahol ζ' az a vektor, amelynek komponensei $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$. Ilyenkor

$$x^* - y^* \leqq \zeta'. \tag{5}$$

Az egyensúlyi pont ekkor az (5) által definiált tartományba esik és a feltételek a következők: $x_i^* \in X_i$, $y_j^* \in Y_j$, $p^* \in P^\varepsilon$. Ezek pontosan megfelelnek az *1. tétel* bizonyításában az E-re vonatkozó követelményeknek, csak a ζ vektor helyén a ζ' és a P halmaz helyén a P^ε áll.

5.2.0. Folytatjuk a tulajdonképpeni bizonyítást. Definiáljuk a következő halmazokat:

$\hat{X}_i' = \{x_i | x_i \in X_i$, és minden $i' \neq i$-re létezik $x_{i'} \in X_{i'}$ és minden j-re van olyan $y_j \in Y_j$, hogy $x - y \leqq \zeta'\}$,

$\hat{Y}_{j'} = \{y_j | y_j \in Y_j$ és minden i-re létezik $x_i \in X_i$ és minden $j' \neq j$-re van olyan $y_{j'} \in Y_j$, hogy $x - y \leqq \zeta'\}$.

Ezek a definíciók azonosak a 3.3.0. alpont $\hat{X}_i, \hat{Y}_j$ definícióival, csak ζ vektor helyére ζ' került. A 3.3.0.—3.3.3. érvelései tehát változtatás nélkül megismételhetők. Tudunk választani olyan pozitív c' számot, hogy a

$$C' = \{x | |x_h| \leqq c' \text{ minden } h\text{-ra}\}$$

kocka *belsejében* tartalmazza az összes $\hat{X}_i'$ és $\hat{Y}_j'$ halmazt. Legyen

$$\tilde{X}_i' = X_i \cap C', \quad \tilde{Y}_j' = Y_j \cap C'.$$

5.2.1. Legyen az $\tilde{E}^\varepsilon$ elvont gazdaság azonos az 5.1.0. pontban szereplő E^ε gazdasággal úgy, hogy X_i helyén mindenhol $\tilde{X}_i'$ és Y_j helyén mindenhol $\tilde{Y}_j'$ áll. Legyen ily módon $\tilde{A}_i'(\bar{x}_i)$ az $A_i(\bar{x}_i)$ módosult alakja. Nem nehéz belátni, hogy a 3.3.4. érvelése teljesen alkalmazható annak bizonyítására, hogy a segédtétel követelményei, az $\tilde{A}_i'(\bar{x}_i)$ folytonosságát kivéve, teljesülnek. E folytonosság viszont azonnal következik a 3.3.5. alpont megjegyzéséből és az 5.0. pontban szereplő (1)-ből, mivel x_i benne van $\hat{X}_i'$-ben és ezért $\tilde{X}_i'$-ben is. Így az $\tilde{E}^\varepsilon$-gazdaságnak van egy egyensúlyi pontja, $[x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*]$ minden ε-ra, ha $0 < \varepsilon \leqq (1/2^\pi)$. Most megmutatjuk, hogy az $\tilde{E}^\varepsilon$ egy egyensúlyi pontja az E^ε-gazdaságnak is egyensúlyi pontja (A fordított állítás nyilvánvalóan áll.)

5.2.2. Mivel $0 \in \tilde{Y}_j$, azért

(1) $$p^* y_j^* \geqq p^* 0 = 0,$$

úgy, hogy $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y_j^* \geqq 0$, és, mint az 5.1.1. alpontban, $p^* z^* \leqq 0$, amiből arra a következtetésre juthatunk, hogy akárcsak az 5.1.1. alpont (5) egyenletében: $x^* - y^* \leqq \zeta'$. Az $\hat{X}_i', \hat{Y}_j'$ halmazoknak az 5.2.0. alpontban szereplő definíciójából következik, hogy $x_i^* \in \hat{X}_i', y_j^* \in \hat{Y}_j'$ valamennyi i és j esetén; tehát, mint ahogy abban a pontban megmutattuk

(2) $$x_i^*, y_j^* \text{ belső pontjai } C'\text{-nek.}$$

Az egyensúlyi pont definíciójából következően x_i^* maximalizálja az $u_i(x_i)$ értékét, ha $x_i \in \tilde{A}_i'(\bar{x}_i^*)$. A (2)-ből, pontosan úgy, mint a 3.4.1. alpontban, következik, hogy

(3) $$x_i^* \text{ maximalizálja } u_i(x_i) \text{ értékét, ha } x_i \in A_i(\bar{x}_i^*).$$

Ugyanilyen módon

(4) y_j^* maximalizálja $p^* y_j$ értékét, ha $y_j \in Y_j$.

Az egyensúly $\tilde{E}^\varepsilon$-beli definíciójából

(5) p^* maximalizálja pz^* értékét, ha $p \in P^\varepsilon$.

5.3.0. Tegyük fel, hogy valamely ε, $0 < \varepsilon \leqq 1/2^\pi$ esetén

(1) $p_h^* > \varepsilon$ minden $h \in \mathscr{P}'$-re:

Legyen a p vektor a P halmaz bármely eleme, $p' = tp + (1-t)p^*$, ahol $0 < t \leqq 1$. Föltételezzük, hogy $pz^* > p^* z^*$; ekkor $p' z^* > p^* z^*$. Az (1)-ből viszont $p' \in P^\varepsilon$ elég kis t esetén, ami ellentmond az előző alpontban szereplő (5) kijelentésnek. Így, ha az (1) igaz valamely ε esetén, akkor $pz^* \leqq p^* z^*$ minden $p \in P$, azaz p^* maximalizálja a pz^* értéket $p \in P$-re (és nem csupán $p \in P^\varepsilon$-re). Összevetve ezt az előző alpont (3) és (4) kijelentéseivel, igazolódott, hogy az E elvont gazdaságnak van egyensúlyi pontja, és ezért, mint azt az 3.2. pontban láttuk:

(2) Ha az (1) igaz, akkor létezik versenyegyensúly.

5.3.1. A következőkben ezért feltételezzük, hogy az 5.3.0. alpont (1) kijelentése egyetlen $\varepsilon > 0$ esetén sem igaz. Ekkor minden ε-ra, $0 < \varepsilon \leqq 1/2^\pi$

(1) $p_h^* = \varepsilon$ legalább egy $h \in \mathscr{P}$-re.

Minden ε-ra $p^* \in P$, $x_i^* \in C'$, $y_j^* \in C'$ (lásd a (2) kijelentést az 5.2.2. alpontban). P és C' kompakt halmazok. Választhatók tehát olyan konvergens sorozatok, hogy

(2) $$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0; \quad (x_1^k, \ldots, x_m^k, y_1^k, \ldots, y_n^k, p^k)$$

egyensúlyi pontja az E^{ε_k} gazdaságnak:

$$\lim_{k \to \infty} x_i^k = x_i^0; \quad \lim_{k \to \infty} y_j^k = y_j^0; \quad \lim_{k \to \infty} p^k = p^0.$$

Mivel az X_i, Y_j, P halmazok zártak, $x_i^0 \in X_i$, $y_j^0 \in Y_j$, $p^0 \in P$. Az (1) kijelentésből következik, hogy lennie kell legalább egy $h \in \mathscr{P}$-nek, amelyre $p_n^k = \varepsilon^k$ végtelen sok k-ra, és így a (2) miatt $p_h^0 = 0$ erre h indexre. A kényelem kedvéért legyen $h = 1$.

(3) $$p_1^0 = 0, \quad 1 \in \mathscr{P}.$$

Mint azt a 3.2. pontban megmutattuk, az 5.2.2. (3) kijelentése, amely a *2. feltétel,* maga után vonja a 3.2. (1) egyenletét, nevezetesen a $p^k z^k = 0$ egyenletet. Tartson a k a ∞-hez, akkor a (2) szerint

(4) $$p^k z^0 = 0.$$

Bármely rögzített y_j esetén az 5.2.2. alpont (4) kijelentése azt mondja, hogy $p^k y_j^k \geqq p^k y_j$. Tartson k a ∞-hez, akkor

$$p^0 y_j^0 \geqq p^0 y_j .$$

(5) y_j^0 maximalizálja a $p^0 y_j$ értékét, ha $y_j \in Y_j$.

5.3.2. Válasszunk ki bármely olyan $x_i \in X_i$ vektort, amelyre $u_i(x_i) > u_i(x_i^0)$. Elég nagy k esetén az 5.3.1. (2) kijelentéséből és az u_i folytonosságából következően: $u_i(x_i) > u_i(x_i^k)$. Ez az 5.2.2. (3) kijelentése szerint nem egyeztethető össze azzal az állítással, hogy $x_i \in A_i(\bar{x}_i^k)$. Tehát $p^k x_i > p^k x_i^k$. Tartson k a ∞-hez.

(1) Ha $x_i \in X_i$ és $u_i(x_i) > u_i(x_i^0)$, akkor $p^0 x_i \geqq p^0 x_i^0$

5.3.3. Ez az alpont kitérő, amelynek bizonyos jelentősége lehet a fogyasztási elmélet általános módszerei számára. Könnyen megmutatható az 5.3.2 alpont (1) kijelentéséből, hogy

(1) x_i^0 minimalizálja $p^0 x_i$ értékét az $\{x_i | x_i \in X_i,\ u_i(x_i) \geqq u_i(x_i^0)\}$ halmazon,

és hogy p^0 maximalizálja a pz^0 értékét $p \in P$ esetén.

Összevetve az 5.3.1. alpont (5) kijelentésével ezzel bemutattuk, hogy a versenyegyensúly valamennyi feltétele teljesül, csak a fogyasztóegység hasznosságának — a jövedelmi korláton belüli — maximalizálását helyettesítettük a költségek minimalizálásával, adott hasznossági szint mellett. (Hasonlítsuk össze az (1)-et a *2. feltétel*lel). A költségminimalizálás és a hasznosságmaximalizálás közötti dualitás majdnem mindenhol érvényes, pontosabban szólva a P belsejében, ahol az összes ár pozitív, érvényes, de a határán nem.

A jóléti közgazdaságtan szempontjából az elsődleges elv az, hogy adott hasznosság mellett a legkisebb költségű fogyasztási vektort kell elérni, a hasznosság maximalizálása adott költség mellett csak akkor érdekes elv, ha a kettő azonos eredményt hoz.[15] Ezzel szemben a fogyasztói viselkedést a tökéletes versenyben leíró elmélet számára természetesen a hasznosságmaximalizálás fogalma az elsődleges. Ott, ahol a dualitás érvényes, a költségminimalizálás elve jóval egyszerűbb eredményekhez vezet, példát adnak erre a Slutzky-összefüggések. Valóban, a költség minimalizálása adott hasznosság mellett lényegében egy lineáris függvény minimalizálását követeli, és a független változó értékei egy konvex halmazra szorítkoznak; a probléma matematikailag azonos a profitmaximalizálással a transzformációs feltételek mellett, így a fogyasztó és a vállalat elmélete azonossá válik.[16] Mégis, mivel hogy a dualitás nem mindig érvényes, vannak kényes kérdések, amelyeknél a hasznosság maximalizálásának elve nem helyettesíthető a költségminimalizálásának elvével.

5.3.4. Az 5.3.1. (3)-ból adódik, hogy $1 \in \mathscr{P}$. A 4.4. pont első definíciójának *b)* része következtében létezik olyan $y' \in Y$, hogy

(1) $y'_h \geqq y_h^0$ minden $h \neq 1$-re; $y'_{h'} > y_{h'}^0$ valamelyik $h' \in \mathscr{D}$-re.

[15] Lásd *K. J. Arrow* [1] 4. segédtételét (513. oldal); az azonosság feltételeit röviden áttekinti az 5. segédtétel (513—514. oldal). Ezenkívül lásd a *G. Debreu* [4], *M. Friedman* [8] műveket.

[16] *F. H. Knight* [11], és *M. Friedman* [7] (különösen a 469—474. old.) ezért azt az érvelést is megkozkáztatják, hogy a keresleti függvényeket mindenkor jobb adott reáljövedelem (vagyis hasznosság) mellett megszerkeszteni, mint adott pénzjövedelem mellett.

Itt $y^0 = \sum_{j=1}^{n} y_j^0$. Az 5.3.1. (5)-ből $p^0 y_1' \leqq p^0 y_j^0$ minden j-re. Ekkor j szerint összegezve kapjuk, hogy

(2) $$p^0 y' \leqq p^0 y^0.$$

Az (1) és az 5.3.1. (3) kijelentések segítségével:

$$p^0(y'-y^0) = \sum_h p_h^0(y_h'-y_h^0) = \sum_{h \neq 1} p^0(y_h'-y_h^0) \geqq p^0(y_{h'}'-y_{h'}^0).$$

Mivel $y_{h'}'-y_{h'}^0>0$, a (2) fennállásához $p_{h'}^0=0$ szükséges.

(3) $$p_{h'}'=0 \text{ legalább egy } h' \in \mathscr{D}\text{-re.}$$

Legyen $x_i \in X_i$, $x_i(t)=tx_i+(1-t)x_i^0$, ahol $0<t\leqq 1$. A 4.3. első definíciója következtében van olyan λ, hogy

(4) $$\lambda > 0, \quad u_i(x_i^0+\lambda\delta^{h'}) > u_i(x_i^0).$$

Mivel $x_i(t)+\lambda\delta^{h'}$ az $x_i^0+\lambda\delta^{h'}$ értékhez tart, ha t a 0-hoz tart, azért a (4)-ből következik, hogy elég kis t esetében:

(5) $$u_i[x_i(t)+\lambda\delta^{h'}] > u_i(x_i^0).$$

Ebből és az 5.3.2. (1) kijelentéséből kapjuk, hogy

$$p^0[x_i(t)+\lambda\delta^{h'}] \geqq p^0 x_i^0. \quad \text{(3)-ból viszont}$$

$$p^0(\lambda\delta^{h'}) = \lambda p_{h'}^0 = 0.$$

Minthogy $p^0[x_i(t)+\lambda\delta^{h'}]=tp^0x_i+(1-t)p^0x_i^0+p^0(\lambda\delta^{h'})$, minden további nélkül következik, hogy $p^0x_i \geqq p^0x_i^0$.

(6) $$x_i^0 \text{ minimalizálja a } p^0x_i \text{ értéket } X_i \text{ felett.}$$

Legyen X ugyanúgy definiálva, mint a 4.2. pontban. Mivel $p^0x=\sum_{i=1}^{m} p^0x_i$, a (6)-ból azonnal következik, hogy

(7) $$x^0 \text{ minimalizálja a } p^0x \text{ értéket } X \text{ felett.}$$

5.3.5. Az V. feltevéssel összhangban válasszuk meg az $x \in X$, $y \in Y$ vektorokat úgy, hogy $x<y+\zeta$. Ezután az 5.3.4. (7) kijelentését felhasználva, $p^0(y+\zeta)>p^0x \geqq p^0x^0$, vagy

(1) $$p^0y > p^0(x^0-\zeta).$$

Az 5.3.1. (4)-ből

(2) $$p^0(x^0-y^0-\zeta) = 0.$$

Ez az (1)-gyel közösen, adja:

(3) $$p^0 y > p^0 y^0.$$

Innen azonban az következik, hogy valamely j esetén $p^0 y_j > p^0 y_j^0$, míg $y_j \in Y_j$, ami ellentmondásban van az 5.3.1. (5) kijelentésével. Tehát az 5.3.1. elején tett azon feltevés, hogy valamennyi $\varepsilon > 0$ értékhez $p_k^* = \varepsilon$ legalább egy $h \in \mathscr{P}$-re, ellentmondásra vezetett, és ezért szükségképpen hamis. Az 5.3.0. (1) kijelentése tehát szükségképpen igaz, és ugyanazon alpont (2) állítása szerint a *2. tétel* bizonyítást nyert.

5.3.6. A következő tétel egy kicsit általánosabb a *2. tétel*nél, és az előbbivel gyakorlatilag azonos módon könnyen bizonyítható.

A IV′. *a* feltevés helyére a következő kerül:

IV″. *a)* $\zeta_i \in R^l$; *valamely* $x_i \in X_i$ *esetén* $x_i \leqq \zeta_i$ *és legalább egy* $h \in \mathscr{D} \cup \mathscr{P}$ *értékre* $x_{hi} < \zeta_{hi}$.

A IV″. *a)* és IV. *b)* feltevéseket együtt IV″.-nek nevezzük.

*2′. tétel. Egy gazdasági rendszerben, amely kielégíti az I—III., IV″., V. és VI. feltételeket, létezik versenyegyensúly.**

IRODALOM

[1] *Arrow, K. J.:* An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics. Megjelent: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability c. kötetben. (*Szerk.:* J. Neyman) Berkeley—Los Angeles, University of California Press, 1951. 507—532. old.

[2] *Cassel, G.:* The Theory of Social Economy. New York—Harcourt, Brace and Company, 1924.

[3] *Cournot, A. A.:* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. New York—London, The Macmillan Company, 1897.

[4] *Debreu, G.:* The Coefficient of Resource Utilization. Econometrica, 19. évf. 1951. 273—292. old.

[5] *Debreu, G.:* A Social Equilibrium Existence Theorem. Preceedings of the National Academy of Sciences, 38. kötet, 10. szám, 1952. 886—893. old.

[6] *Debreu, G.:* Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. Megjelent: Decision Processes c. kötetben, (*Szerk.:* R. M. Thrall—C. H. Coombs—R. L. Davis) New York, John Wiley and Sons, 1954.

[7] *Friedman, M.:* The Marshallian Demand Curve. Journal of Political Economy, 57. évf. 1949. 463—495. old.

[8] *Friedman, M.:* The Welfare Effects of an Income Tax and Excise Tax. Journal of Political Economy, 60. évf. 1952. 25—33. old.

* A 6. fejezetet, amely egy rövid történeti áttekintést nyújt a versenyegyensúllyal kapcsolatos kutatások történetéről, elhagytuk, mivel annak bővebb változatát az Olvasó megtalálhatja a Gazdasági egyensúly c. tanulmányban.

[9] *Hart, A. G.:* Anticipations, Uncertainty, and Dynamic Planning. Chicago, The University of Chicago Press, 1940.

[10] *Hicks, J. R.:* Érték és tőke. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1978.

[11] *Knight, F. H.:* Realism and Relevance in the Theory of Demand. Journal of Political Economy, 52. évf. 1944. 289—318. old.

[12] *Koopmans, T. C.:* Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. Megjelent: Activity Analysis of Production and Allocation c. kötetben, Cowles Commission Monograph 13. szám (Szerk.: T. C. Koopmans) New York, John Wiley and Sons, 1951. III. fejezet, 33—97. old.

[13] *Menger, C.:* Principles of Economics. Glencoe, Illinois: The Free Press, 1950.

[14] *Nash, J. F. Jr.:* Equilibrium Points in N-Person Games. Proceedings of the National Academy of sciences, 36. kötet, 1950. 48—49. old.

[15] *Neisser, H.:* Lohnhöhe und Beschäftigungsgrad im Marktgleichgewicht. Weltwirtschaftliches Archiv, 36. évf. 1932. 415—455. old.

[16] *Neumann, J. von:* Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. 8. szám, 1937. 73—83. old. angol fordítása: A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies, 13. évf. 33. szám, 1945—1946. 1—9. old.

[17] *Robbins, L.:* On the Elasticity of Demand for Income in Terms of Effort. Economica, 10. szám, 1930. 123—129. old.

[18] *Samuelson, P. A.:* Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1947.

[19] *Schlesinger, K.:* Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 6. szám, 1933—1934. 10—11. old.

[20] *Stackelberg, H.:* Zwei Kritische Bemerkurgen zur Preistheorie Gustav Cassels. Zeitschrift für Nationalökonomie, 4. évf. 1933. 456—472. old.

[21] *Wald, A.:* Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 6. szám, 1933—1934. 12—20. old.

[22] *Wald, A.:* Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 7. szám, 1934—1935. 1—6. old.

[23] *Wald, A.:* Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie. Zeitschrift für Nationalökonomie, 7. évf. 1936. 637—670. old. angol fordítása: On Some Systems of Equations of Mathematical Economics. Econometrica, 19. évf. 1951. 368—403. old.

[24] *Walras, L.:* Éléments d'économie politique pure. 4. kiadás, Lausanne, Paris, 1900.

[25] *Zeuthen, F.:* Das Princip der Knappheit, technise Kombination und Ökonomische Qualität. Zeitschrift für Nationalökonomie, 4. évf. 1933. 1—24. old.

*A gazdasági egyensúly**

Az általános egyensúly közgazdaságtudományban használatos fogalmának talán két alapvető — bár nem tökéletesen szétválasztható — oldala van: 1. a meghatározottság egyszerű fogalma — vagyis az, hogy a gazdasági rendszert leíró összefüggéseknek olyan rendszert kell alkotniuk, amely eléggé teljes a változók értékének meghatározásához, és 2. a sajátosabb fogalom, amely szerint minden összefüggés az erők egyensúlyát fejezi ki. Ez utóbbit általában úgy értik, hogy bármely összefüggés megsértése olyan erőket hoz mozgásba, amelyek az egyensúly helyreállításának irányába hatnak. (Mint később látni fogjuk, ez nem azonos a rendszer stabilitásával.) Egy bizonyos értelemben csaknem minden olyan kísérlet, amely az egész gazdasági rendszer elméletének megragadására irányul, elfogadja az általunk adott egyensúlyfogalom első felét. Az Adam Smith-féle „láthatatlan kéz" pedig a gazdasági egyensúly legalapvetőbb összefüggéseinek költői kifejezése, a profitráták kiegyenlítődéséé, ami érvényre jut a termelési tényezőknek az alacsonyabb hozamoktól a magasabb hozamok felé irányuló mozgásában.

Az egyensúly fogalma („egyenlő súly", a súlypontjában alátámasztott rúd kiegyensúlyozódó állapotára utalva) és vele együtt az erő erőhatás általi megsemmisítésének fogalma (pl. a vízszint-kiegyenlítődés) a mechanikában jóval a „Nemzetek gazdagsága" 1776. évi megjelenése előtt ismert volt, de nincs bizonyítéka annak, hogy Smith gondolatait a mechanikával vont bármilyen analógiából származtatta volna. Bármi is a fogalom forrása, az az elképzelés, hogy egy teljes rendszer működése során keletkező hatások különbözhetnek a szándékoktól, sőt ellentétbe is kerülhetnek azokkal, minden bizonnyal a közgazdasági gondolkodás legjelentősebb hozzájárulása a társadalmi folyamatok lényegének megértéséhez.

* Economic Equilibrium. Megjelent: *David L. Sills* (szerk): International Encyclopedia of the Social Science Vol. 4. kötetben. The Macmillan Company and The Free Press. 1968.

1. A FOGALOM TÖRTÉNETE

Elfogadhatjuk, hogy az általános egyensúlyelmélet megalkotója Smith, bár művének következetessége és konzisztenciája megkérdőjelezhető. Következésképp a klaszszikus közgazdaságtan későbbi módszeres kifejtői, mint pl. Ricardo, J. S. Mill és Marx, akik műveikben pótolták Smith néhány logikai hiányosságát, mind az általános egyensúlyelmélet előfutárainak tekinthetők. Ha összekapcsoljuk az egyszerű újratermelés marxi sémáját és a Tőke I. és III. kötetében kifejlesztett relatívárelméletét, megállapíthatjuk, hogy Marx — néhány vonatkozásban — formájában valóban közelebb került a modern egyensúlyi elmélethez, mint bármelyik klasszikus közgazdász, bár természetesen mindent összezavar az a kísérlete, hogy egyszerre tartsa fenn a tiszta munkaérték-elméletet és a profitráták kiegyenlítődését. Az a nézet, amelyet a klasszikus közgazdászok az általános egyensúly elvéről kialakítottak, tovább erősödött a modern átdolgozásokban (lásd pl. Samuelson [36], [37]).

Van azonban az egyensúlyelméletnek egy nagyon fontos vonatkozása, amelynek alapján egyetlen klasszikus közgazdász elmélete sem volt igazi általános egyensúlyelmélet: egyikben sem szerepeltek nyíltan a keresleti viszonyok. Kétségtelen, hogy a szisztematikusabb gondolkodók, különösen Mill és Cournot szavakban ugyan feltétlenül elismerték a kereslet szerepét és az árak keresletre gyakorolt hatását, de az alapvetően kínálatorientált klasszikus elméletbe nem integrálták a kereslet kategóriáit. A kereslet elhanyagolását megkönnyítették a kínálatról tett sajátos, egyszerűsítő feltételezések. Mai szemmel az általános egyensúlyelmélet olyan elmélet, amely valamennyi jószág és szolgáltatás mennyiségével és árával egyaránt foglalkozik. A klasszikus szerzők azonban — a nulla profit feltételezéséből kiindulva — úgy találták, hogy az árakat egy olyan összefüggésrendszer határozza meg, amelyben nem szerepelnek a mennyiségek. Ez elég világos, ha rögzített termelési koefficiensek és egyetlen elsődleges termelési tényező, a munka szerepel, mint például Smith híres szarvas—hód cseréjében. Malthus és Ricardo nagy teljesítménye, hogy megmutatták: a föld is bevonható a rendszerbe. Végül a népességre vonatkozó malthusi feltételezésekből az fakadt, hogy ha a munkaerő kínálati ára, árukban kifejezve rögzített, azáltal még a tőke ára is meghatározhatóvá vált (bár a klasszikus szerzők számára elég zavaró volt a tőke mint termelési tényező és mint jövedelemtulajdonos kettőssége, és ez bizonyos fokig az is maradt egészen napjainkig).

Egy bizonyos, meghatározott értelemben tehát a klasszikusok nem rendelkeztek valódi erőforrás-elosztási elmélettel, mivel nem tanulmányozták az árak hatását a mennyiségekre, a fordított hatást pedig tagadták. A klasszikus elmélet nem tudta megoldani sem azt a logikai problémát, amit a különböző munkafajták relatív béreinek magyarázata jelent, sem pedig azt az empirikus problémát, hogy a bérek miért emelkednek állandóan a létminimum fölé. Ebben az összefüggésben a neoklasszikus elméletben valamennyi elsődleges erőforrás azt a szerepet játssza, amit az előző elméletben csupán a föld játszott.

(Hogy méltányosak legyünk a klasszikusokkal szemben, meg kell jegyeznünk, hogy

a külkereskedelem elmélete, különösen abban a formában, ahogy Mill tárgyalta, valódi általános egyensúlyelmélet volt. De — főképpen a termelési tényezők immobilitására vonatkozó — feltevései természetesen nagyon erősen korlátozóak voltak.)

Cournot [6], őt követve Jenkin [19] és a neoklasszikus közgazdászok széles körűen alkalmazták az egyetlen piacra vonatkozó parciális egyensúlyi elemzést. Az ilyen elemzésekben a termék kereslete és kínálata kizárólag a termék saját árának függvénye; az egyensúlyi ár pedig az az ár, amely mellett a kereslet megegyezik a kínálattal. Az elemzésnek ezt a formáját vagy úgy kell tekintetünk, mint egy olyan pedagógiai eszközt, amely rendelkezik az egyváltozós összefüggések könnyű grafikus szemléltethetőségének előnyével, vagy pedig úgy, mint az általános egyensúlyi elemzés első megközelítését, amelyben a többi piacon keresztül érvényesülő visszahatásokat elhanyagoljuk.

WALRAS HOZZÁJÁRULÁSA. Az általános egyensúly gondolatának teljes felismerése kétségtelenül Walrasnak tulajdonítható [45]; bár a neoklasszikus rendszer számos elemét tőle függetlenül W. Stanley Jevons és Carl Menger dolgozta ki. Walras elemzésében a gazdasági rendszer háztartásokból és vállalatokból áll. Minden háztartás rendelkezik egy sor erőforrással, a termelésben vagy a fogyasztásban hasznosítható termékekkel, közéjük értve a különböző munkafajtákat is. A háztartások — az árak bármely adott rendszere mellett — erőforrásaiknak eladásából jövedelemre tesznek szert, e jövedelem birtokában választhatnak olyan alternatív fogyasztásicikk-kombinációk közül, amelyek költsége, az adott árak mellett, nem haladja meg jövedelmüket. Walras tehát a háztartások tetszőleges fogyasztási cikkre irányuló keresletét úgy tekintette, amely egyaránt függ a fogyasztási cikkek, és a termelési tényezők árától. A vállalatokról — legalábbis a korábbi változatokban — feltételezte, hogy rögzített termelési koefficiensekkel működnek. Ezután a fogyasztási javak kereslete meghatározta az erőforrások keresletét; a walrasi versenyrendszerben a fogyasztási javak és az erőforrások árai közti összefüggések a rögzített koefficiensek, valamint a nulla profit együttes feltevéséből adódtak. Az *egyensúlyi* árrendszer Walrasnál az árak olyan speciális halmaza, amely rögzített termelési koefficiensek vagy — általánosabban — konstans volumenhozadék feltételezése mellett, minden piacon egyenlővé teszi a keresletet és a kínálatot. Ez egyenértékű a kereslet és kínálat megegyezésével az erőforrások piacán is, olyan árak mellett, amelyeknek ki kell elégíteniük a vállalatokra vonatkozó nulla profit feltételeket. Később Walras, J. B. Clark, Wicksteed és mások általánosították a termelésre vonatkozó feltételezéseket, a termelési függvény segítségével beépítették az elméletbe az alternatív termelési eljárások lehetőségét. Ezekben az elméletekben az erőforrások árát határtermelékenységi megfontolások határozták meg.

Az egyensúlyi árrendszer létezését a meghatározandó árak és a különböző piacokon a kereslet és kínálat egyenlőségét kifejező egyenletek számának megegyezőségével próbálták bizonyítani. Mindkettő egyenlő a termékek számával, mondjuk n-nel. Walras felismerte, hogy ebben az érvelésben van két probléma, amelyek azonban

ellensúlyozzák egymást: 1. A háztartások és a vállalatok viselkedése csak a relatív árakat érinti, ezért az egyenletrendszernek valójában csak $n-1$ változója van, ezt a problémát Walras úgy oldotta meg, hogy kiválasztott egy terméket, s az szolgált *numéraire*-ként, azaz minden termék ára ebben mérődött. 2. Valamennyi háztartás jövedelmének és fogyasztási kiadásainak egyensúlyából valamint, a vállalatokra vonatkozó nulla profit feltételből következik az az elv — ami Walras törvényeként vált ismertté —, miszerint a kínálat piaci értéke nem csupán az egyensúlyi árrendszer mellett azonos a keresletével, hanem bármely árrendszer esetén; azaz a kínálat—kereslet összefüggések nem függetlenek. Ha a kínálat egyenlő a kereslettel $n-1$ piacon, akkor az egyenlőségnek fenn kell állnia az n-edik piacon is.

Walras tovább kívánt menni és lényegében elsőként tárgyalta az egyensúly stabilitását (eltekintve Mill néhány rövid, külkereskedelemmel kapcsolatos fejtegetésétől) híres, de elég nehézkes *tâtonnements* elméletében. (Szó szerint: „tapogatózás" vagy „puhatolózó cselekvés".) Kiindulásképp felvesz egy tetszőlegesen meghatározott árrendszert; ekkor egyes piacokon a kínálat meghaladhatja a keresletet és más piacokon pedig alatta maradhat (ha az árak kiinduló rendszere nem egyensúlyi, akkor a Walras-törvény szerint mindkét említett eset legalább egy piacon bekövetkezik). Tekintsük a piacokat meghatározott sorrendben. Az első piacon az ár alkalmazkodása tegye egyenlővé a keresletet és a kínálatot feltételezve, hogy a többi piacon az árak adottak; ez normálisan áremelkedést kíván —, ha eredetileg a kereslet múlta felül a kínálatot — és árcsökkenést az ellentétes esetben. Az ár változása az első piacon természetesen az összes többi piac keresletében és kínálatában is változást fog okozni. Ismételjük meg a folyamatot a második és minden további piacon. Az első kör végén az utolsó piac egyensúlyban lesz, de ez nem áll fenn szükségszerűen a többi piacok közül egyre sem, mivel az egymást követő piacokon lezajlott alkalmazkodási folyamatok megsemmisítik az előző piacon elért egyensúlyt. Walras azonban bizonyítja, hogy bármely termék kínálati és keresleti függvényét jobban érinti saját árának, mint a többi termék árának változása; ezért az első kör után a piacok közelebb lesznek az egyensúlyhoz, mint a folyamat kezdetekor, és az egymást követő körök során a kereslet és kínálat minden piacon az egyenlőség felé tart.

Világos, hogy Walras a szó szoros értelmében nem azt tételezte fel, hogy a piacok meghatározott sorrendben kerülnek egyensúlyba. Ez csak egy kényelmes mód volt annak megmutatására, hogyan képes valójában a piaci rendszer az egyensúlyi egyenletrendszer megoldására. Pontosabban kifejezve, a dinamikus rendszer alapelve, hogy az árak bármely piacon emelkednek, amikor a kereslet felülmúlja a kínálatot, és esnek az ellenkező esetben; a különböző piacokon bekövetkezett árváltozásokat szimultán módon kell elképzelni.

Végül Walrasnak volt egy még magasabbra törő célja az egyensúlyi elemzés területén: azt akarta tanulmányozni, amit ma *komparatív statikának* hívnak, azaz azokat a törvényeket, amelyek meghatározzák, hogyan változnak az egyensúlyi árak és mennyiségek, ha az alapjukat képező adatok (erőforrások, termelési feltételek vagy

hasznossági függvények) megváltoznak. De tulajdonképpen keveset tett ebben az irányban.

Walras kortársai, Edgeworth, Pareto és Irving Fischer lényegesen hozzájárultak az egyensúlyelmélet tovább fejlesztéséhez. Az egyik eredményük talán külön is említést érdemel, mert a későbbiekben jelentős kutatások tárgyává vált, ez pedig a *szerződési görbe,* amit modern terminológiával a játék magjának, core-nak nevezünk (lásd később a harmadik pontot és *Debreu* és *Scarf* [10]-t).

AZ 1930-AS ÉS AZ AZT KÖVETŐ ÉVEK FEJLEMÉNYEI. A későbbi, valóban nagy előrelépés egészen az 1930-as évekig nem következett be. Két irányzat létezett, az egyik a német nyelvű irodalomban bontakozott ki, és elsősorban az egyensúly létezésével és egyértelműségével foglalkozott, a másik — elsősorban angol nyelvű publikációkban — a stabilitással és a komparatív statikával foglalkozott. Az előbbi Cassel [5] Walras rendszerén végrehajtott egyszerűsítésének alapos vizsgálatával kezdődött el. Ez egy érdekes példa arra, hogy egy önmagában nem különösebben jelentős munka tanulmányozása is nagyon gyümölcsöző lehet. Cassel a javak két fajtáját tételezte fel: azok a termékek, amelyek a fogyasztók keresleti függvényének alkotórészei, és a termelési tényezők, amelyeket a termékek termelésében használnak fel (a közbülső termékeket nem vette figyelembe). Minden terméket állandó input-output koefficiensek mellett állítanak elő a termelési tényezőkből. A termelési tényezők kínálatát teljesen rugalmatlannak tételezte fel. Legyen a_{ij} a j-edik termék egységének előállításához felhasznált i-edik termelési tényező mennyisége; x_j a j-edik termék kibocsátása; v_i az i-edik termelési tényező kiinduló kínálata; p_j a j-edik termék ára és r_i az i-edik termelési tényező ára. Ekkor a kereslet és a kínálat egyenlőségét kifejező feltétel, valamennyi termelési tényezőre vonatkozóan a következő:

$$\sum_j a_{ij}x_j = v_i \qquad \text{minden } i\text{-re,} \tag{1}$$

míg az a feltétel, hogy minden terméket nulla profittal kell termelni, a következő:

$$\sum_i a_{ij}r_i = p_j \qquad \text{minden } j\text{-re.} \tag{2}$$

A rendszert kiegészítik a termékek keresletét áraikkal és az összes jövedelmet a termelési tényezők eladásával összekapcsoló egyenletek. Összesen tehát annyi egyenlet van, ahány ismeretlen. A Zeuthen [46], Neisser [32] és Stackelberg [39] által jóformán egyidejűleg írt három tanulmány különböző módon mutatta meg, hogy a közgazdaságilag értelmezhető egyensúly létezésének problémája mélyebb, mint az egyenletek és ismeretlenek egyenlősége. Neisser észrevette, hogy még tökéletesen valószerű a_{ij} input-output koefficiensértékek esetén is lehetnek negatívak az (1)-et és a (2)-t kielégítő árak vagy mennyiségek. Stackelberg megjegyezte, hogy az (1) teljes egyenletrendszert alkot a kibocsátásra x_j-re, mivel a v_i értékek, a termelési tényezők kínálatai adottak; viszont semmit sem tesz fel a termelési tényezők és a termékek számáról. Például, ha a termékek száma kisebb a termelési tényezőknél, akkor az (1) egyenletrendszernek általában nem lesz megoldása.

Zeuthen felülvizsgálta az (1) egyenletrendszer jelentését. Megjegyezte, hogy a közgazdászok, legalábbis Carl Menger óta, felismerték, hogy néhány termelési tényező (pl. a levegő) annyira bőven áll rendelkezésre, hogy nincs ára. Ezek a tényezők Cassel rendszerében nem részei a termelési tényezők listájának. Zeuthen azonban bebizonyította, hogy a termelési tényezők szabad és szűkös javakra való felosztását nem lehet *a priori* adottnak tekinteni. Ezért mindössze annyit lehet mondani, hogy egy termelési tényező felhasználása nem haladhatja meg a kínálatát; és ha alatta marad, akkor a tényező szabad jószág. Szimbólumokkal kifejezve, az (1)-et a következő formulával helyettesítjük.

$$(1') \qquad \sum_j a_{ij} x_j \leqq v_i;$$

ha a szigorú egyenlőtlenség áll fenn, akkor $r_i=0$. A közgazdászok egy későbbi nemzedéke számára, akik jól ismerik a lineáris programozást és általánosításait, e lépés döntő fontossága nem igényel bővebb kifejtést; az egyenlőségeket egyenlőtlenségek helyettesítik és bevezetik az ún. komplementerváltozók; maradék mennyiségek és az árak alapvető fogalmát.

K. Schlesinger bécsi bankár és amatőr közgazdász, Zeuthentől függetlenül, ugyanerre a következtetésre jutott. Ő sokkal tovább ment és intuitív módon megértette, hogy az egyenletek egyenlőtlenségekkel való helyettesítése megoldja a Neisser és a Stackelberg által felvetett problémákat is. Schlesinger ráébredt arra, hogy a kérdés szigorú vizsgálata matematikailag rendkívül összetett, és ezért Oskar Morgenstern közvetítésével megismerkedett egy fiatal matematikussal Abraham Walddal: Az eredmény az általános versenyegyensúly első szigorú elemzése volt. Wald egy sor alternatív modellben, köztük Casselében és a tiszta csere modelljében bizonyította a versenyegyensúly létezését. Eredményeit egy tanulmánysorozatban tette közzé (összefoglalóként lásd Wald [44]). A versenyegyensúlyt a Zeuthen-féle értelemben definiálta, és matematikai eszközökkel világította meg e meghatározás alapvetően fontos szerepét az egyensúly létezésének igazolásában. Wald elkezdte az unicitás tanulmányozását is. S valóban a versenyegyensúly mindkét ő általa kidolgozott — alternatív elégséges feltétele azóta az irodalom jelentős témájává vált: 1. az, hogy a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája érvényes a piaci keresleti függvényekre (valamennyi egyén keresleti függvényének összegére); vagy 2. az hogy az összes termék teljesen helyettesíti egymást (a meghatározásokat lásd később).

Wald tanulmányai matematikailag ijesztően mélyek voltak, nemcsak a kifinomult eszközök használatát tekintve, hanem a bizonyítás bonyolultságában is. Ahogy ezek fokozatosan ismertté váltak a matematikai közgazdászok körében, bonyolultságukkal és nehézségükkel valószínűleg legalább annyira gátolták a további kutatásokat, mint amennyire ösztönözték azokat. Végül is egy ezzel rokon kutatási irány, John von Neumann játékelmélete tette könnyebbé a helyzetet. (Első, alapvető tanulmányát 1928-ban publikálta, lásd Neumann és Morgenstern [43].) A játékelmélet és a gazdasági egyensúly elmélete közti történelmi kapcsolat paradox jellegű. Ebben a játék-

elmélet az egyensúlyelméletnek olyan nagymértékű általánosítása, amely vagy helyettesítheti a versenyegyensúly elvét, vagy speciális esetként magában foglalja azt. Bár a játékelmélet különlegesen ösztönzőnek bizonyult az egyensúlyelmélet fejlődésében, ez a hatás azoknak a matematikai eszközöknek a segítségével valósult meg, amelyeket az egyensúlyelmélet keretében fejlesztettek ki, noha ezeket a játékelméletben teljesen eltérő értelmezéssel használták fel. Maga Neumann dolgozta ki a játékelmélet ilyen jellegű alkalmazását a kiegyensúlyozott gazdasági növekedésről írott híres tanulmányában [42]. Ebben a modellben nem voltak keresleti függvények, csak a termelés szerepelt. A piacoknak — zeutheni értelemben — egyensúlyban kellett lenniük De ezen kívül egy második értelemben is egyensúly volt a modellben, amit *stacionárius egyensúlynak* nevezhetünk. (Lásd később a 8. pontot.) Az egyensúly létezésének igazolásához Neumann megmutatta, hogy a bilineáris alakok egy meghatározott hányadosának van nyeregpontja; ez annak a tételnek az általánosítása, amely a kétszemélyes nulla összegű játékokban az egyensúly létezését bizonyította. A játékelméletben azonban a probléma változói valószínűségek (az alternatív stratégiák választásának valószínűségei), míg az egyensúlyelméleti alkalmazásban a változók egy része az árakat, és másik része azokat a szinteket jelenti, amelyeken a termelési tevékenységeket folytatják.

Neumann nyeregponttételét Brouwer híres — a matematika topológia néven ismert ágában megfogalmazott — fixponttételének általánosításából vezette le. Neumann tételének egyszerűsített változatát néhány évvel később Shizuo Kakutani matematikus mutatta be, s Kakutani tétele gyakorlatilag minden ezt követő munka alapvető eszköze lett. Ezzel az alappal, és a lineáris programozás — ismét szorosan a nyeregponttételekhez kapcsolódó — mind matematikai, mind közgazdasági oldalának gyors fejlődésével (Geroge B. Dantzig, Albert W. Tucker, Harold W. Kuhn, Tjalling C. Koopmans és mások munkái, amelyeket egy nagy hatást kiváltó kötetben gyűjtöttek össze, lásd: Cowles Comission... [7]), valamint John F. Nash Jr. [29] munkájának hatására számos tudós ismerte fel egymástól függetlenül, hogy lehetségesek a Waldénál jóval egyszerűbb és általánosabb egzisztenciatételek. McKenzie [22], valamint Arrow és Debreu [2] tanulmányai voltak az elsők. Az ezt követő fejlődés Hukukane Nikaidônak, Hirofumi Uzawanak, Debreunek és McKenzienek tulajdonítható. (Az egyensúly egzisztenciafeltételeinek legteljesebb, rendszeres feltárása Debreu 1959. évi könyvében van; az egzisztenciatétel legáltalánosabb változata pedig Debreu 1962. évi művében található.)

Az egyensúly egzisztenciafeltételeinek kidolgozásától függetlenül az angol—amerikai közgazdaságtan behatóan tanulmányozta a komparatív statikát és az általános versenyegyensúly stabilitását. Történelmileg ez szorosan kapcsolódott a vállalatiprofit- és fogyasztóihasznosság-maximalizálás másodrendű feltételeinek elemzéséhez; amiben a legfontosabb közreműködők John R. Hicks, Harold Hotelling, Paul Samuelson és R. G. D. Allen voltak. Például Hicks [18] kifejtette, hogy az egyensúly stabilitása következményeket rejt magában a keresleti és kínálati függvények alakjára vonatkozóan az egyensúly környezetében, amiből a magatartási össze-

függések kis eltolódásának hatásai megjósolhatók, legalább a változások előjeleit tekintve. Hicks stabilitásdefinícióját Samuelson egy későbbi munkájában [35] kicserélte; azonban Hicks megmutatta, hogy az ő értelmezésében a lokális stabilitás ekvivalens egy olyan feltétellel, amely jelentős szerepet játszott a későbbi kutatásban. Legyen X_i az i-edik termék többletkereslete (kereslet mínusz kínálat); amely általában a $p_1, \ldots, p_n$ árak függvénye. Hicks stabilitásdefiníciója ekkor azonos azzal a feltétellel, hogy a $\partial X_i/\partial p_j$ elemekből álló mátrix főminorainak determinánsai pozitívak vagy negatívak annak megfelelően, hogy a bevont sorok, illetve oszlopok száma páros vagy páratlan. Az ilyen mátrixokra mint *Hicks-féle* mátrixokra fogunk hivatkozni. Hicks arra is törekedett, hogy komparatív statikai következtetéseket vonjon le arról, hogy hogyan reagálnak az árak a keresleti függvények változásaira. A jelenleg elfogadott tételek némiképp különböző premisszákból ugyanezt a következtetést vonják le. (Lásd a 6. pontot.)

A stabilitás jelenleg elfogadott definícióját Samuelson fogalmazta meg. Érvelése a következő: a definíciót olyan explicit dinamikus modellre kell alapozni, amely megadja az árak viselkedését, amikor a rendszer nincs egyensúlyban. Formalizálta Walras és legtöbb követője implicit feltevését: minden termék ára túlkeresletével arányos ütemben növekszik. Ez a feltevés egy differenciálegyenlet-rendszert határozott meg; ha minden, a rendszert kielégítő és az egyensúlyhoz eléggé közel induló pálya az egyensúlyhoz tart, akkor a rendszer stabil. Samuelson be tudta bizonyítani, hogy Hicks definíciója nem elégséges és nem is szükséges az ő definíciójához, és hogy a gazdasági rendszer stabil, ha a fogyasztásra gyakorolt jövedelmi hatások eléggé kicsik. Hangsúlyozta az általános *megfelelési elvet:* azaz, hogy a komparatív statika minden használható tételét vagy a vállalati profit, illetve a fogyasztói hasznosság maximalizálásának másodrendű feltételeiből, vagy pedig a megfigyelt egyensúly stabilitásának feltevéséből kell levezetni.

A komparatív statikával és a stabilitással foglalkozó kutatások jelenlegi szakaszát Mosak [28] és Metzler [24] munkáitól számítjuk. A hangsúly egy kicsit eltolódott Samuelson megfelelési elvétől, inkább arra törekszenek, hogy olyan hipotéziseket alkossanak a túlkeresleti függvényekről, amelyek mind a stabilitást, mind a komparatív statika bizonyos eredményeit maguk után vonják.

2. A VERSENYEGYENSÚLY LÉTEZÉSE

Tekintsünk egy n terméket tartalmazó rendszert, megfelelő $p_1, \ldots, p_n$ árakkal. Először tételezzük fel, hogy a gazdaság minden egyes szereplőjének (háztartásnak és vállalatnak) egyértelműen meghatározott kereslete vagy kínálata van minden egyes árrendszer mellett. Ha a kínálatot úgy kezeljük mint negatív keresletet, akkor a gazdaság valamennyi szereplőjének együttes nettó túlkeresletét (a kereslet többletét a kínálat felett) egy adott termékre vonatkozóan úgy kapjuk meg, hogy az egyes szereplők túlkeresletét összeadjuk; ez valamennyi ár függvénye; legyen $X_i(p_1, \ldots, p_n)$

az i-edik termék túlkeresleti függvénye. A túlkereslet egyensúly esetén nem lehet pozitív, minthogy a kielégítésére nincs mód. Továbbá, ha a túlkereslet negatív (azaz a kínálat meghaladja a keresletet), a termék szabad jószág, s árának nullának kell lennie. Formálisan, egy nemnegatív árvektor $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$ *egyensúlyt* hoz létre, ha

(3) $X_i(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n) \leqq 0$ minden i-re,

(4) $\bar{p}_i = 0$ minden olyan i-re, amelynél $X_i(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n) < 0$.

E definíció alapján a következő feltevések elégségesek az egyensúly létezéséhez:

(*H*) Az $X_i(p_1, \ldots, p_n)$ függvények (pozitív) nulladfokú homogén függvények, azaz $X_i(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n) = X_i(p_1, \ldots, p_n)$, minden $\lambda > 0$-ra és minden $(p_1, \ldots, p_n)$-re.

(*W*) $\sum_i p_i X_i(p_1, \ldots, p_n) = 0$ minden árvektorra.

(*C*) Az $X_i(p_1, \ldots, p_n)$ függvények folytonosak.

(*B*) Az $X_i(p_1, \ldots, p_n)$ függvények alulról korlátosak (azaz a kínálat mindig korlátos).

A (*H*) feltevés szokásos a fogyasztói kereslet elméletében; (*W*) Walras törvénye, amelyre az előbbiekben hivatkoztunk. A (*C*) feltevés olyan típusú, amellyel általában minden alkalmazott kutatásban találkozhatunk, bár a későbbiekben látni fogjuk, hogy szorosan kapcsolódik a preferenciák és a termelés konvexitásának feltevéséhez. A (*B*) feltevés triválisan érvényes egy tiszta cseregazdaságban, mert minden egyén véges mennyiségű cserére szánt áruval rendelkezik. Egy olyan gazdaságban, ahol termelés folyik, ez a dolog kevésbé világos. Elképzelhető egy olyan adott árvektor, amely mellett egy termelő jövedelmezőnek találhatja, hogy végtelen mennyiséget kínáljon; terveinek valóra váltása természetesen megköveteli, hogy ezzel egyidőben néhány termelési tényezőből végtelen mennyiséget keressen. Az ilyen helyzetek természetesen összeegyeztethetetlenek az egyensúllyal, de minthogy maga az egyensúly létezése a kérdés, az elemzés szükségképpen bonyolult.

A jelenleg alkalmazott bizonyítások — amelyek megmutatják, hogy a felsorolt feltevésekből a versenyegyensúly létezése következik — megkívánják Brouwer fixponttételének felhasználását. Ez a matematikai tétel azt mondja ki, hogy egy háromszög — vagy magasabb dimenziójú térben ennek megfelelő idom — önmagába való folytonos leképezésének legalább egy pontot változatlanul kell hagynia. Az érvelés a következőképpen vázolható: (*H*)-ból következik, hogy az egyensúly változatlan, ha minden árat azonos pozitív konstanssal szorzunk; ezért az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy az árak összege egy. Világos, hogy az összes nemnegatív komponensű, összegül egyet adó árvektor egy általánosított háromszöget alkot (amit szaknyelven *szimplex*nek nevezünk). Számítsuk ki a (pozitív vagy negatív) túlkeresletet minden árvektorra, azután alakítsunk ki mindegyikhez egy új árvektort, amely az eredetihez képest a pozitív túlkeresletű komponensekben magasabb és

a többiekben alacsonyabb (de nem negatív). Ezeket az új árakat azután módosítsuk úgy, hogy összegük ismét egy legyen. Ez a folyamat a szimplex önmagába való folytonos leképezését határozza meg, s így van fixpontja; egy olyan árvektor, amely változatlan marad az alkalmazkodási folyamat során. Könnyű belátni, hogy ennek az árvektornak egyensúlyinak kell lennie.

A most vázolt álláspont nem eléggé általános. Már láttuk, hogy a kínálat korlátozottságának feltevése mesterkéltnek tűnik abban az esetben, ha lehetséges a termelés. Ehhez szorosan kapcsolódik egy második probléma; indokolatlanul leszűkítettnek tűnik az a feltevés, hogy a kereslet és a kínálat egyértékűek. Gondoljunk a termelés legegyszerűbb esetére: egyetlen inputból egyetlen vele arányos output lesz. A profitmaximalizáló vállalkozó magatartása az input és az output árának arányától függ. Ha az árarány nagyobb, mint az output-input arány, akkor a vállalat veszteséges lesz, ha egyáltalán termel; ezért a profitmaximalizálási pont nulla output és nulla input, ami valóban egyértékű. Ha azonban a két arány azonos, akkor minden termelési szint nulla profitot eredményez; ezért a profitmaximalizáló vállalkozó közömbös a köztük való választásban, és a termelés kínálati függvényének és az input iránti kereslet függvényének többértékűnek kell lennie. Ha az árarány kisebb, mint az output-input arány, akkor a vállalkozó profitja úgy növekszik, ahogy tevékenységének méreteit növeli. *Nincs* olyan véges tevékenységi szint, amely mellett a vállalkozó maximalizálhatná profitját.

A versenyegyensúly általános definíciójának pontosabb kifejtéséhez a következő modell fogalmazható meg: feltételezzük, hogy létezik egy sor háztartás és vállalat; minden termelés az utóbbiakban folyik. Minden háztartás rendelkezik az induló készletek egy választékával (feltételezve, hogy ez magában foglalja a különböző fajtájú munkák kínálatát), és igényt tart a vállalatok profitjának egy meghatározott részére (ez természetesen lehet nulla is). Feltételezzük, hogy ezek az igények — minden egyes vállalatnál — pontosan kiteszik a teljes profitot (ez mint a részvényesek résztartaléka vagy mint nyereségrészesedés interpretálható). Adott termelési döntések és adott árak mellett a vállalatok profitja és az egyének induló készletének (vagyonának) értéke meghatározott, s ezzel meghatározott az egyének teljes jövedelme is. Az elérhető termékhalmazba azok a kombinációk tartoznak, amelyek értéke adott árakon nem haladja meg a jövedelmet, és amelynek komponensei nemnegatívak (vagy ennél erősebb, áraktól független feltételeknek eleget tesznek). Feltételezzük továbbá, hogy a háztartások ki tudják fejezni a különböző termékhalmazok közti preferenciákat, s hogy e preferenciák megfelelő folytonossági tulajdonságokkal rendelkeznek. A háztartások célja a legjobban preferált kombináció kiválasztása a rendelkezésre állók közül.

A vállalatok viselkedésének leírása egyszerűbb. Minden vállalathoz tartozik a lehetséges termeléskombinációk egy halmaza; a szokásoknak megfelelően a termelési kombinációkban a kibocsátások (outputok) értékei pozitívak, a ráfordítások (inputok) értékei negatívak. Rögzített árvektor mellett minden lehetséges termeléskombináció profitja meghatározott; a vállalat tehát azt a (vagy egy olyan) kombi-

nációt választja, amely maximalizálja a profitját. Jegyezzük meg, hogy nem szükségképpen egyetlen kombináció lehet profitmaximalizáló.

Valóban, például konstans volumenhozadék esetén sohasem egyértelmű a profitmaximalizáló termelési kombináció, hacsak a vállalat célja nem a teljes felszámolás. (Konstans hozadék esetén, ha bármilyen termelési kombináció lehetséges, akkor az is lehetséges, amelyet az eredeti minden elemének — mind a ráfordítások, mind a kibocsátások — megduplázásával nyerünk. Ha bármelyik kombináció pozitív profitot eredményez, a kombináció megduplázása meg fogja kétszerezni a profitot is; tehát ilyen esetben profitmaximalizáló kombináció nem lehetséges. Ennek alapján a profitmaximalizáló kombináció létezése maga után vonja, hogy a maximális profit nempozitív. Minthogy nulla profit nulla tevékenységi szint mellett mindig lehetséges, a maximumban nulla profittal kell rendelkeznünk. Vagy a profit negatív valamennyi nem nulla kombinációra, amely esetben az egyetlen optimális politika a felszámolás, vagy a profit nulla valamely nem nulla kombinációra, amelynek bármely nemnegatív többszöröse is nulla, tehát maximális profitot eredményez.)

Ebben az összefüggésben a „vállalat" tulajdonképpen termelhet nulla outputot, s ezért statisztikailag megfigyelhetetlen lehet; ilyenkor a vállalat potenciálisan képes termékek termelésére, de csak az uralkodó áraktól eltérő árrendszer mellett találná ezt nyereségesnek.

A *versenyegyensúly* tehát azt jelenti, hogy minden termékhez egy nemnegatív árat, minden háztartáshoz egy fogyasztási és minden vállalathoz egy termelési kombinációt rendelünk, mégpedig úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

a) az egyes háztartásokban, az összes rendelkezésre álló kombináció közül a kijelölt (egyensúlyi) kombináció maximális hasznosságú;

b) minden egyes vállalat számára a technikailag lehetséges összes kombináció közül az így kijelölt maximalizálja a profitot;

c) a háztartások együttes fogyasztása — minden egyes termékre — nem haladja meg az eredetileg rendelkezésre álló mennyiséget plusz az összes vállalat összes nettó termelését (a „nettó" kifejezés itt azt jelenti, hogy a vállalatok felhasználását levonjuk az adott termék kibocsátásából);

d) azoknak a termékeknek az ára nulla, amelyekből az összes fogyasztás szigorúan kisebb, mint az eredetileg rendelkezésre álló készlet plusz az összes termelés.

A „verseny" jelző arra a feltevésre utal, hogy az árakat minden háztartás vagy vállalat adottnak és döntéseitől függetlennek tekinti.

A versenyegyensúly létezésének biztosításához a következő feltevések elégségesek:

I. Minden háztartás preferenciarendezése folytonos (két kombináció közti szigorú preferencia akkor is érvényben marad, ha bármelyik egy kicsit változott), nincs telítődés (minden kombinációnál van preferáltabb); és konvex (ha egy kombináció az áruk terében egy egyenes szakasz mentén változik, akkor ennek egyik végpontja a legkevésbé preferált).

II. A lehetséges termelési kombinációk halmaza minden vállalatra vonatkozóan konvex (két lehetséges termelési kombináció bármely súlyozott kombinációja lehet-

séges) és zárt (bármely kombináció, amely lehetséges kombinációkkal közelíthető, maga is lehetséges); továbbá mindig lehetséges nem termelni és ebben az esetben inputokat nem felhasználni.

III. A társadalom mint egész számára egyetlen lehetséges termelési kombináció sem tartalmazhat kibocsátást felhasználás nélkül; (lehetséges egy kombináció a társadalom mint egész számára akkor, ha olyan termelési kombinációk algebrai összege, hogy azt az egyes vállalatok a számukra lehetséges kombinációk közül választották); van legalább egy olyan, a társadalom mint egész számára lehetséges kombináció, amely minden olyan termékből pozitív nettó termelést ad, amellyel kiinduláskor egyetlen háztartás sem rendelkezett.

IV. A gazdaság irreducibilis — a fogalmat Gale [14] és McKenzie [23] dolgozta ki — abban az értelemben, hogy bármilyen módon is osztjuk a háztartásokat két csoportba, az egyik csoport tagjainak induló vagyonában (készleteiben) bekövetkező növekedést fel lehet használni úgy, hogy lehetségessé váljék a javak egy olyan elosztása, amely mellett senkinek sem romlik a helyzete, sőt a második csoport legalább egy tagja jobb helyzetbe kerül.

Talán érdekes megfigyelni, hogy az egyedi háztartásokra és vállalatokra vonatkozó „atomisztikus" feltevések nem elégségesek az egyensúly létezésének kimondásához; szükség van „globális" feltevésekre: a III-ra és a IV-re is (bár ezek bizonyára nem kifogásolhatók). Így határt szabunk annak, az árelméletben — különösen a matematikai változatokban — meglevő burkolt irányzatnak, amely az aggregált magatartás minden tulajdonságát a gazdaság egyedi szereplőire vonatkozó feltevésekből kívánja levezetni.

A felsorolt feltevések empirikusan legsebezhetőbb részei a háztartási preferenciákra és a termelésre vonatkozó konvexitási hipotézisek. A termelésben a konvexitás kizárja az oszthatatlanságot vagy a növekvő volumenhozadékot. A fogyasztásban a konvexitás kizárja azokat az eseteket, amikor az alkotórészek kombinációi roszszabbak, mint maguk az alkotórészek; például nagyon rövid távon a whisky és gin keverékét legtöbben rosszabbnak fogják tartani, mint bármelyiket önmagában, vagy két távoli városban élni fél-fél időben rosszabb lehet, mint csak az egyikben élni. Tehát fontos ismerni, hogy ezeket a feltevéseket milyen mértékben lehet enyhíteni.

A konvexitás lényeges szerepet játszik a bizonyításban. Ez — a legegyszerűbb esetet, az egyetlen input és a vele arányos egyetlen output esetet tekintve — illusztrálható. Ahogy korábban már megjegyeztük, van az output- és inputáraknak egy olyan aránya, amely mellett a vállalkozónak közömbös a kibocsátás szintje. Ha az input kínálata adott, akkor az input és output egyensúlyi szintjei, valamint az árak is meghatározottak. Most tegyük fel, hogy a termelés csak egészértékű input szintek mellett lehetséges; ebben az esetben a termelési lehetőségek halmaza nem konvex. Ha a szóban forgó input kínálata nem egész szám, nincs mód arra, hogy a kereslet és kínálat egyenlővé váljék. Meg kell azonban jegyezni, hogy az input (és output) szintjét meg lehet úgy választani, hogy a kínálat és a kereslet közti különbség ne haladja meg a 0,5-t. Végeredményben a konvexitás biztosítja, hogy a kínálat és

a kereslet — megfelelő értelemben — folytonosak legyenek, és így alkalmazkodni tudjanak az induló készletek változó szintjéhez.

A szigorúan definiált egyensúly létezésére vonatkozó általános tételekben nem nélkülözhető a konvexitás feltevése. Farell [12] által elkezdett és Rothenberg [33], valamint Aumann [4] által továbbfejlesztett gondolatsor azonban azt sejteti, hogy a kínálat és a kereslet közti szakadék nem növekszik a gazdaság méretének növekedésével. Világosabban, ha a gazdaság minden szereplője (háztartás vagy vállalat) kis súlyt képvisel az egész gazdasághoz viszonyítva, akkor a fogyasztási és termelési kombinációk, valamint az árak alkalmas megválasztásával a kínálat és kereslet közti eltérések a gazdaság egészéhez viszonyítva kicsivé tehetők. Bizonyára valamennyi háztartás kicsi a gazdaság egészéhez képest, így az egyedi preferenciák nem konvex volta nem befolyásolja jelentősen az egyensúly létezését. Ha azonban a volumenhozadék elég széles tartományon növekvő, az azzal járhat, hogy valamely versenyző, profitmaximalizáló vállalat — ha egyáltalán termel — adott árvektor mellett túlságosan nagy lesz; ezért megvan annak a reális lehetősége, hogy az egyensúly nem létezik.

3. OPTIMALITÁS ÉS A JÁTÉK MAGVA

Bár az a nézet, hogy a versenyegyensúlyi helyzeteknek van néhány sajátos optimalitási tulajdonsága, legalább olyan régi, mint az Adam Smith-féle láthatatlan kéz, ezt az összefüggést csak nem rég tisztázták. Minthogy ez a téma a jóléti gazdaságtan körébe tartozik, csak rövid ismertetést adunk.

A termékek és erőforrások elosztása (minden háztartás és vállalat kombinációjának kijelölése) akkor *megvalósítható* (feasible), ha minden egyes benne szereplő kombináció lehetséges a megfelelő szereplő számára, és ha a kombinációkból adódó aggregátum; az összes termék nettó outputja (beleértve az eredetileg rendelkezésre álló mennyiségeket is) legalább akkora, mint a fogyasztók kereslete. Valamennyi elosztás meghatározza minden egyes háztartás fogyasztásának hasznossági színvonalát. Egy elosztást akkor *dominál* egy másik, ha az utóbbi megvalósítható, és minden egyénnek az elsőnél magasabb hasznossági szintet biztosít (az irodalomban ezt a feltételt gyakran abban bonyolultabb formában vezetik be, hogy a második elosztás mellett minden egyén legalább olyan jó helyzetben van mint az első esetén, s legalább egy egyén jobb helyzetben van; de ez a különbség csekély). Egy elosztást akkor tekintenek optimálisnak, ha megvalósítható, és egyetlen másik elosztás sem dominálja. (Ez a Pareto-féle definíció.)

A versenyegyensúlyhoz és az optimális elosztáshoz két tétel kapcsolódik, az egyik az elégségességre a másik a szükségességre vonatkozik; a két tételt nem mindig különböztetik meg az irodalomban. Itt néhány kisebb megszorítás ismertetését mellőzzük.

Elégségesség: Bármely versenyegyensúly szükségképpen optimális.

Szükségesség: Bármely adott optimális elosztás esetén van a társadalom induló

vagyonának az egyének között olyan megoszlása, hogy a szóban forgó optimális elosztás éppen az ennek az elosztásnak megfelelő versenyegyensúly, feltéve, hogy fennállnak a versenyegyensúly létezését biztosító, a 2. pontban kifejtett feltevések.

Érdemes megjegyeznünk, hogy az elégségességre vonatkozó tétel akkor is érvényes, ha a 2. pont feltevései nem állnak fenn.

Az optimalitás fogalmának meghatározása nincs tekintettel sem az árrendszerre, sem a piacok bármely kitüntetett halmazára. Az optimalitási tételek azt mondják ki, hogy bár az árrendszernek nincs szerepe az optimalitás definíciójában, mégis megfelelő feltételek mellett azonosság van az optimumok és a versenyegyensúlyi helyzetek között. Ezt az összefüggést még élesebb formában emeli ki a játék magvának (core) modern elmélete (Debreu és Scarf [10]), amely emellett hangsúlyozza a tökéletes verseny elméletében a gazdasági szereplők nagy számának speciális szerepét.

Lényegében a termelés és fogyasztás struktúrájának a 2. pontban kifejtett modelljéből indulunk ki, természetesen figyelmen kívül hagyva az árakra és jövedelmekre vonatkozó összes feltevést. A játék magvával foglalkozó elemzések azonban mind ez ideig éltek egy — a termelők és fogyasztók közti kapcsolatra vonatkozó — lényeges megszorítással. Feltételezték, hogy a háztartások bármely koalíciója számára a lehetséges termelési vektorok azonos halmaza hozzáférhető, amelyről a továbbiakban feltételezték a konstans volumenhozadékot. Tekintsünk most egy tetszőleges megvalósítható elosztást. Ezt az S koalíció (a háztartások egy halmaza) által *zároltnak* (blocked) nevezzük, ha van az S tagjai számára egy másik olyan megvalósítható elosztás (csak az általuk kollektíven birtokolt induló eszközöket felhasználva), amely mindegyiküket jobb helyzetbe hozza. Megjegyezzük, hogy a koalíció tartalmazhatja a társadalom valamennyi háztartását; erre a koalícióra vonatkozóan a zárolás fogalma a korábbi értelemben használt dominálásra redukálódik. A koalíció tartalmazhat egyetlen egyént is; ő akkor tud egy elosztást zárolni, ha csupán a saját forrásaival és az általánosan rendelkezésre álló technológiai tudással olyan kombinációt tud termelni, amelynek hasznossága magasabb, mint azé a kombinációé, amely az eredeti elosztásban neki jutott.

A játék magva mindazokat az elosztásokat tartalmazza, amelyeket egyetlen koalíció sem zárolt. A játék magvát érintő első tétel általánosítja az optimalitás elégségességére vonatkozó tételt: *Bármely versenyegyensúly a játék magvához tartozik.* Még érdekesebb e tétel sajátos fordítottja, amelyet a következőképpen lehet megfogalmazni. *Ha a 2. pontnak az egyensúly létezését biztosító feltevései fennállnak, és valamennyi egyén kicsi a gazdaság egészéhez viszonyítva, akkor a játék magvában levő elosztások mind megközelítőleg versenyegyensúlyok.* (A „kicsi" és „megközelítőleg" szavak szigorúan értelmezettek, ha alkalmasan megválasztott korlátozó feltételekre vonatkoznak.)

Néhány értelmező megjegyzésre szükségünk lesz. Először is, a játék magvának kézenfekvő értelmezése az, hogy ha a gazdasági játék szabályai bármilyen üzletkötést megengednek, akkor az az elosztás, amelyhez végül elérkeznek, benne kell, hogy legyen a játék magvában, mert máskülönben valamelyik koalíciónak mind

hatalmában, mind szándékában állna megakadályozni ezt. Ezért nagyon meglepő az a következmény, hogy az eredmény sok résztvevő számára a versenyegyensúly lesz, feltéve, hogy a 2. pont feltevései teljesültek. L. S. Shapely és M. Shubik (nem publikált írásaik) szórványos eredményei azt sugallják, hogy még nem konvexitás esetén is megközelítőleg ugyanez érvényes (azaz lehetséges, hogy a játéknak nincs magva a pontos definíció értelmében, de van egy sor olyan elosztás, amely zárolható, de a zároló koalíció részéről nagyon kicsi preferenciával). Ezért a monopólium létezésének a következő három tényező egyikétől kell függnie: 1. az egész gazdasághoz viszonyítva szűkösen rendelkezésre álló specializált képességek; 2. növekvő hozadék olyan volumen mellett, amely hasonló a gazdaság volumenéhez; vagy 3. a koalícióalakítás olyan költségei, amelyek viszonylag alacsonyak az azonos terméket termelők, és magasak a fogyasztókat és termelőket magukba foglaló koalíciók számára.

Másodszor, az a — McKenzie által felhasznált — feltételezés, amely szerint a termelési lehetőségek minden koalíció számára azonosak, alkalmas értelmezéssel nem olyan erős, mint amilyennek első pillanatra látszik. Feltételezhetjük, hogy minden vagy néhány termelési folyamat inputként „vállalkozói képességeket" vagy valamilyen speciális tehetséget kíván. Ekkor az áruk tere kiszélesedik: magában foglalja e képességeket is, amelyek a népességben nagyon egyenlőtlenül lehetnek elosztva. Azután be lehet bizonyítani, hogy a megfigyelhető változók csökkenő volumenhozadékát valójában az összes változó konstans hozadékának kombinációja eredményezi, beleértve a vállalkozói képességeket, s ez utóbbiak rögzített kínálatát is. Továbbá, a különböző koalíciók valóban nagyon különbözőképpen férhetnek hozzá a termelési lehetőségekhez, mert nagyon különbözőek képességbeli adottságaik.

4. A VERSENYEGYENSÚLY UNICITÁSA

A versenyegyensúly stabilitására és unicitására vonatkozó eredményeket csak arra az esetre ismertettük, amikor a túlkeresleti függvények egyértékűek, mint a 2. pont elején. A továbbiakban feltételezzük, hogy a (*H*), a (*W*) és a (*B*) feltevések fennállnak, illetve a (*C*)-t megszigorítjuk azzal, hogy megkívánjuk a túlkeresleti függvények differenciálhatóságát.

További feltevések nélkül az egyensúly egyértelműsége nem szükségszerű, a nem egyértelmű egyensúly példái Marshall óta ismeretesek. Egy eléggé általános unicitási tételhez a matematikai alapokat csak nemrégiben dolgozta ki Gale és Nikaidô [16], a legmegfelelőbb közgazdasági tétel még nincs teljesen feltárva. Van azonban ezen a területen egy tétel, amit érdemes itt ismertetni. Tételezzük fel, hogy van egy olyan áru, amelynek túlkereslete pozitív valahányszor az ára nulla, tekintet nélkül a többi termék árára. Egy ilyen termék kiválóan alkalmas a walrasi *numéraire* szerepére, árát 1-nek választhatjuk, mert az egyensúlyban sohasem lehet nulla (ezért pozitív lesz), és a túlkeresleti függvények homogenitásából következően bármely egyensúlyi

árvektor pozitív számmal való szorzása új egyensúlyhoz vezet. (Az áregyensúly unicitása természetesen csak egy pozitív skalár erejéig van meghatározva.) Nevezzük ezt n-edik terméknek, és az $1, \ldots, n-1$ termékek túlkeresletét tekintsük $p_1, \ldots, p_{n-1}$ függvényeinek miközben p_n értékét rögzítettük, azaz: $p_n=1$. E függvénysorozat Jacobi-mátrixa definíció szerint $(\partial X_i/\partial p_j)$ komponensekből álló mátrix, ahol i és j 1-től $n-1$-ig terjed. Ahogy az 1. pontban említettük, egy mátrixot akkor nevezünk Hicks-félének, ha főminorainak determinánsa pozitív, azaz amikor sorainak száma páros, és negatív egyébként.

Unicitási tétel 1. Ha a túlkeresleti függvények Jacobi-mátrixa — kihagyva e *numérairet* (konstansnak hagyva az árát) — Hicks-féle minden árvektorra, akkor az egyensúly egyértelmű.

E tétel egy speciális esete valójában Waldtól [44] ered. A j terméket i termék *bruttó helyettesítőjének* (gross substitution) nevezzük, ha p_j növekedése — minden más ár változatlanul hagyása mellett — megnöveli X_i-t. A (H)-ból következik, hogy ha minden termék ún. bruttó helyettesítő, akkor a túlkeresleti függvények Jacobi-mátrixa — a *numéraire*-t kihagyva — Hicks-féle. Ekkor az *1. unicitási tétel* következménye: *Ha minden termék bruttó helyettesítő, akkor az egyensúly egyértelmű.*

Végül, Wald egy teljesen eltérő elégségességi feltételt is kifejtett:

Unicitási tétel 2. Ha a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája az összes fogyasztóra fennáll, akkor az egyensúly egyértelmű.

A kinyilvánított preferencia gyenge axiómája — amit Samuelson Waldtól függetlenül dolgozott ki [34] — a következőt állítja: ha az 1. helyzetben fennálló árakon választott termékhalmaz nem drágább a 0. helyzetben fennálló árakon, mint a 0. helyzetben választott halmaz, akkor az utóbbi halmaznak az előbbinél drágábbnak kell lennie az 1. helyzetben fennálló árak mellett. Az egyén számára ez az axióma a racionális magatartás egyszerű következménye; mindkét halmaz rendelkezésére állt a 0. helyzetben, ezért azt a halmazt kellett preferálni, amelyet ebben a helyzetben választott. Ha mindkét halmaz rendelkezésre állt volna az 1. helyzetben is, akkor a kevésbé preferált halmazt nem választotta volna; ezért a 0. helyzetben választott halmaznak az 1. helyzetben a költségek miatt kellett hozzáférhetetlennek lennie. Azonban az az állítás, hogy az axióma a piac mint egész keresleti függvényeire fennáll, nem a racionális magatartás következménye, hanem egy pótlólagos feltevés, ami valójában akkor érvényes, ha az egész gazdaságban (aggregáltan) a jövedelemhatások nem túl nagyok.

5. STABILITÁS

A stabilitási probléma, ahogy azt Samuelson formalizálta, a következő: Tételezzük fel, hogy adott egy olyan tetszőleges (általában nem egyensúlyi) árvektor, amely mellett vannak nem nulla túlkeresletek, s ezek közül néhány pozitív. Feltesszük, hogy az árak a túlkereslet irányának megfelelően alkalmazkodnak, éspedig emelkednek, ha a túlkereslet pozitív, és csökkennek ellentétes esetben. Ez a következő dinamikus rendszert sugallja:

$$dp_i/dt = k_i X_i(p_1, \ldots, p_n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

azaz az árváltozások (t az időt jelöli) arányosak a túlkeresletekkel. Vegyük észre, hogy a k_i „igazodási sebességek" 1-től és egymástól különbözhetnek, és ez nem csupán az általánosságra való törekvésnek köszönhető, hanem tulajdonképpen logikai szükségszerűség. Gondos dimenzionális elemzés ugyanis megmutatja, hogy k_i az i-edik termék mértékegységének változásával változni fog. Tanulmányoztak például olyan általánosabb (nemlineáris) alkalmazkodási modelleket, amelyekben csupán azt tételezték fel, hogy dp_i/dt azonos előjelű X_i-vel.

A vizsgált rendszer egy változata — amelyet gyakran tanulmányoztak — megkülönböztet egy terméket mint *numéraire*-t és felteszi, hogy ennek ára rögzített, mondjuk 1:

$$dp_i/dt = k_i X_i(p_1, \ldots, p_n), \qquad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{6}$$

$$p_n = 1.$$

Mindkét rendszerben felmerül egy nehézség azzal kapcsolatban, hogy a szabályok megkívánhatják valamelyik ár negatívvá válását. Ez akkor történhet meg, ha néhány i-re $X_i(p_1, \ldots, p_n) < 0$ és $p_i = 0$. Minthogy a túlkeresleti függvények negatív árakra mégcsak értelmezve sincsenek, a szabályokat meg kell változtatni. Általában az (5)-öt és a (6)-ot olyan módon alakítják át, hogy megkívánja azt, hogy az árak ezek mellett a feltételek mellett ne csökkenjenek nulla szint alá, de az, hogy a szabályok ezen kikötés mellett is konzisztensek maradnak-e, bonyolult matematikai kérdés, amit csak Uzawa [40] és Morishima [26] tanulmányozott, nagyon speciális esetekre vonatkozóan.

Az (5) és a (6) által leírt differenciálegyenlet-rendszer megoldása az árak időbeli pályája, amit az induló feltételek és a rendszer specifikációja határoz meg. A stabilitás azon múlik, hogy vajon az eredményül kapott időbeni pálya konvergál-e az egyensúlyhoz, vagy nem. A globális stabilitás azt jelenti, hogy a konvergencia bármilyen induló feltételek mellett bekövetkezik; lokális stabilitás pedig azt, hogy a pálya az egyensúlyhoz elég közeli induló feltételek esetén konvergál. A jelenleg ismert legérdekesebb eredmények a globális stabilitásra ugyanúgy elégségesek, mint a lokális stabilitásra, így nem szükséges a kettőt megkülönböztetnünk.

Először is meg kell jegyeznünk, hogy egyetlen rendszer sem szükségképpen stabil, még akkor sem, ha az egyensúly létezését biztosító valamennyi feltevés teljesül:

Scarf [38] és Gale [15] mutatott erre példákat. Gale példája különösen egyszerű: Tételezzük fel, hogy két egyén és három termék van, és nincs termelés. Az 1. egyén az 1. termék kínálatával indul, a 2. egyén a 2. és a 3. termék kínálatával. Az 1. egyénnek olyan hasznossági függvénye van, amelyben csak a 2. és a 3. termék szerepel, míg a 2. egyén csak az 1. terméket akarja. Könnyű belátni, hogy létezik egyértelmű egyensúly. Tételezzük most fel, hogy az 1. egyén számára a 2. termékre vonatkozóan a Giffen paradoxon érvényes (azaz a 2. termék árának növekedése, a többi árakat változatlanul hagyva — növeli az 1. egyén keresletét). Ekkor meg lehet mutatni, hogy alkalmasan megválasztott alkalmazkodási sebességek mellett az (5) vagy a (6) rendszer megoldása messze marad az egyensúlytól.

Három különböző, Arrownak, Blocknak és Hurwicznak [1] tulajdonítható feltétel van, amelyek közül bármelyik elégséges a rendszer stabilitásához.

Stabilitási tétel 1. Ha minden termék ún. bruttó helyettesítő, akkor az (5) és a (6) rendszer egyaránt stabil.

Stabilitási tétel 2. Ha a piac kielégíti a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját, akkor az (5) és a (6) rendszer egyaránt stabil.

A harmadik tétel kifejtéséhez be kell vezetnünk a domináns diagonálissal rendelkező mátrix matematikai fogalmát. Az (a_{ij}) mátrixnak domináns diagonálisa van, ha $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ minden i-re. (A diagonális elem nagyobb súlyú, fontosabb, mint az ugyanabban a sorban levő összes többi elem.)

Stabilitási tétel 3. Ha a túlkeresleti függvények (kivéve a *numéraire*-t) Jacobi-mátrixának olyan domináns diagonálisa van, amelynek minden eleme negatív, akkor a (6) rendszer stabil.

Hogy a Jacobi-mátrixnak van-e domináns diagonálisa, függhet azoktól a mértékegységektől, amelyekben a termékeket mérik; a *3. stabilitási tétel* akkor mondja ki a stabilitást, ha egyáltalán van a mértékegységek megválasztásának olyan módja, amellyel a diagonális dominancia elérhető.

A *2. stabilitási tétel* értelmezhető úgy, hogy az időpálya folyamán lezajló jövedelemtranszferek nagyjából egymást kiegyenlítő hatást gyakorolnak a keresletre; a jövedelemhatások nem túlzottan aszimmetrikusak. A *3. stabilitási tétel* van talán legközelebb Walras kiinduló fogalmaihoz; a stabilitás akkor áll fenn, ha egy áru túlkeresletét sokkal erősebben érinti a saját árának változása, mint bármilyen más ár változása (a *numéraire* árát változatlanul tartva).

A stabilitás minden eddigi tárgyalásakor hallgatólagosan feltették, hogy nincs üzletkötés a nem egyensúlyi árakon, mert ha lenne, akkor a túlkeresleti függvények eltolódnának. (Egy másik lehetséges értelemezés az, hogy minden termék teljesen romlandó, és az egyes időszakok hasznosságai és a termelései függetlenek egymástól. Ekkor az egyik időszakban lezajló üzletkötések semmiféle hatással nem lesznek a következő időszak üzletkötéseire.) Ez a feltevés Edgeworth terminológiájában a klasz-

szikus „újraszerződés" („recontracting"), amit ő és Walras alkotott. A problémát, amit a nem egyensúlyi árakon lezajlott üzletkötések vetettek fel, azonnal felismerték, de kevéssé elemezték. Néhány mai szerző, különösen Negishi [31], Hahn és Negishi [17] és Uzawa [41], a „nem *tatônnement* stabilitás" elég ügyetlen címszava alatt vizsgálta ezt a problémát. Hogy a rendszer teljes legyen, specifikálni kell az üzletkötések természetét; mert ha a rendszer nincs egyensúlyban, vagy az eladók, vagy a vevők számára kiutalásos rendszert kell bevezetni. Ha egyszerűen feltesszük, hogy egyetlen lezajlott üzletkötés sem változtathatja meg egyetlen egyén tulajdonának értékét, akkor az ún. bruttó helyettesíthetőség megint elégséges feltételt ad a stabilitásra. Az üzletkötésekre vonatkozó még sajátosabb feltevések mellett az esetek sokkal szélesebb osztályaira mutatható meg a stabilitás.

6. KOMPARATÍV STATIKA

A komparatív statika által felvetett kérdés a következő: Mit lehet mondani a túlkeresleti függvények eltolódásának az árrendszerre gyakorolt hatásáról? Mint ahogy a kérdés természetéből már feltételezhető, csak az esetek korlátozott körére tudunk választ adni. Tételezzük fel, hogy *bináris* eltolódás ment végbe, azaz, hogy az egyik termék (mondjuk az 1.) túlkereslete minden árvektor esetén csökken; egy másik termék (mondjuk a 2.) túlkereslete ennek megfelelően nő (a 2. termék keresletnövekedésének pénzben kifejezett értéke bármely adott árvektor mellett egyenlő az 1. termék keresletcsökkenésének pénzben kifejezett értékével); és az összes többi termék túlkeresleti függvénye változatlan maradt. Az irodalomban csak egyetlen általános eredmény található (Morishima [27]), amely a következőt mondja ki: *Ha minden termék bruttó helyettesítő és a keresletben bináris eltolódás ment végbe az 1. termékről a 2. termékre, akkor az 1.-től különböző valamennyi termék ára viszonylagosan nő, vagy nem csökken az 1. árához képest, és egyetlen relatív ár emelkedése sem nagyobb, mint a 2. terméké.*

7. PARCIÁLIS EGYENSÚLY

A közgazdasági elemzések nagy része egyetlen piac egyensúlyával foglalkozik. A vizsgált termék keresletét és kínálatát egyetlen ár függvényének tekintik, és az egyensúlyt a kereslet és kínálat egyenlőségeként vagy nulla ár melletti túlkínálatként értelmezik.

A parciális egyensúlyi elemzést az általános egyensúlyi elemzés speciális esetének kell tekinteni. Az egyetlen piac létezése feltételezi, hogy a piacon forgalmazott árun kívül legalább még egy terméknek kell lennie, s az árat úgy kell megragadni, mint azt az arányt, amely mellett egy egyén a szóban forgó termékért felad valami mást. Ha valóban csak egy termék lenne a világon, nem lenne se csere, se piac.

Tételezzük fel egy pillanatra, hogy csak két termék van, mondjuk az 1. és a 2. A homogenitás miatt a keresletet és a kínálatot (ami az előzőekhez hasonlóan többértékű lehet) az 1. termék árának a 2. termék árához viszonyított aránya határozza meg, azaz az 1. termék ára a 2. termékben mint *numéraire*-ben van kifejezve. Walras törvényéből következően az 1. termék piacának egyensúlya biztosítja a 2. termék piacának egyensúlyát. Két termék esetén az 1. termék piacának parciális egyensúlyi elemzése teljesen azonos az általános egyensúlyi elemzéssel. Az előzőekben leírt minden tétel érvényes, és még egy stabilitásra vonatkozó tételt lehet kimondani (Arrow és Hurwicz [3]): Két termékre az egyensúly mindig globálisan stabil, abban az értelemben, hogy az 5. pont (5) és (6) rendszerei bármely induló ár, vagy árrendszer esetén mindig konvergálnak valamilyen egyensúlyi árvektorhoz. (Ha az egyensúlyi árvektor pozitív szorzók erejéig nem egyértelmű, akkor az az ár, amelyhez a rendszer konvergál, függni fog a kiindulóponttól.) Ezt a tételt nem mindig ismerik fel a külkereskedelmi egyensúly stabilitásának tárgyalásában, ahol az elemzés gyakran két termékre korlátozódik.

Egy kéttermékes világ elemzésének jelentős didaktikai haszna lehet mint olyan tanulmányozási módnak, amely az általános egyensúly speciális, egyszerű vázlatos ábrázolását teszi lehetővé. Megkérdőjelezhető azonban, hogy a parciális egyensúlyi elemzéseknek van-e bármiféle empirikus jelentőségük egy soktermékes világban. Választ ad a kérdésre a következő tétel, amely — egymástól függetlenül — Hicksnek [18] és Leontiefnek [21] tulajdonítható: Ha egy áruhalmaz relatív árai változatlanok maradnak, akkor a halmaz bármilyen elemzési célra úgy tekinthető, mint egyetlen összetett termék, amelynek ára a halmaz bármely elemének árával arányos, és amelynek mennyiségét úgy határozzuk meg, hogy az összetett termékre fordított kiadás (ár szorozva a mennyiséggel) egyenlő legyen a halmaz egyedi termékeire fordított kiadások összegével. Jelölésekkel: ha az $1, \ldots, m$ termékhalmaz $p_1, \ldots, p_m$ árai kielégítik a $p_i = \varrho \bar{p}_i$ feltételt ($\bar{p}_i$ állandó minden i-re, míg ϱ változhat), akkor ϱ-t az összetett termék árának és $\sum_{i=1}^{m} \bar{p}_i q_i$-t pedig az összetett termék mennyiségének tekinthetjük, ahol q_i az i-edik termék mennyisége.

A Hicks—Leontief aggregációs tétel felhasználható a parciális egyensúlyi elemzés igazolására. Tételezzük fel, hogy az 1. termék árának változása az összes többi termék relatív árát változatlanul hagyja. Ekkor, amennyiben az egyensúly zavarai csupán az 1. termék piacának sajátos okaiból következnek, a maradék termékhalmazt tekinthetjük egyetlen összetett terméknek, és így alkalmazható a parciális egyensúlyi elemzés.

Az a feltevés, hogy a többi termék relatív ára szigorúan változatlan, természetesen általában nem igaz, de sok, gyakorlati jelentőségű esetben megközelítőleg fennállhat. Az ilyen elemzések céljaira elégséges, hogy a vizsgált termék árának módosulása ne váltson ki olyan változásokat a többi termék relatív árában, amelyek visszahatva, ezen áru keresleti vagy kínálati feltételeiben jelentős eltolódásokat okoznának.

8. EGYENSÚLY AZ IDŐBEN

Az előzőekben összefoglaltuk az általános gazdasági egyensúly irodalmának központi kérdéseit, de van egy, a témához kapcsolódó fogalmi kérdés, ami rövid említést érdemel. Tekintsünk egy gazdaságot az időben, keltezett inputokkal, outputokkal és a jövőre is kiterjedő háztartási tervekkel. Mit lehet egy ilyen gazdaság egyensúlyáról mondani, és valójában mit is jelent ez a fogalom?

Van a kérdésre egy lényegretörő válasz, ami eredetileg Hicksnek tulajdonítható. Egyszerűen minden termékügyletet keltezhetünk, és két különböző időpontban a fizikailag azonos termékeket különböző termékeknek tekinthetjük. Ekkor a 2. pont formális modellje fennáll, újraértelmezhető, és így bizonyíthatjuk, hogy van az időben egyensúly. A tervezett kínálatok és keresletek a szokásos módon válnak egyenlővé.

Ez helyes és valóban fontos értelmezés. Az optimalitás problémái, a játék magva, az unicitás és a komparatív statika (amelyet talán „komparatív dinamiká"-nak kellene nevezni) minden nehézség nélkül újra kifejthetők. A stabilitási elmélet komolyabb kihívást jelent, mert az idő két különböző módon lép be az alapmodellbe és az alkalmazkodási folyamatba. Ha minden piacot jövőbeli piacnak tekintünk úgy, hogy minden alkalmazkodás egyidejűleg megy végbe, akkor nincs nehézség, de máskülönben van egy sor új probléma, amit egyelőre csak töredékes módon közelítettek meg.

Az egyszerű újrakeltezésnek azonban van egy fontos következménye, a tökéletes előrelátás (amit talán az összes jövőbeli gazdasági ügylet jelenleg létező piacokon történő meghatározásán keresztül lehet elérni). Ez a megoldás empirikusan a legkevésbé sem kielégítő, és jelentős logikai problémákat von maga után (Morgenstern [25]). Egy másik lehetőség annak feltevése, hogy minden egyénnek vannak a jövőre vonatkozó várakozásai, és hogy ezek a jelenleg megfigyelt változók folytonos függvényei. Ekkor minden periódusban lesz egyensúly, bár az egyének jövőre vonatkozó tervei általában nem fognak teljesülni.

Bármelyik szempontból nézzük is, jelentős érdeklődést váltott ki az egyensúly egy másik értelmezése, amit *stacionárius egyensúlynak* nevezhetnénk. Az időbeli egyensúly, tökéletes előrelátás esetén, minden periódusra meghatároz egy ár- és egy mennyiségvektort. Ugyanez igaz a várakozások szerint cselekvő egyének által meghatározott, egymást követő, rövid távú egyensúlyok esetén is. A kérdés a következő: Van-e ennek az időbeli sorozatnak egyensúlyi vagy stacionárius értéke? Van-e az áraknak és a mennyiségeknek egy olyan vektora, amely, ha szabályozott a kezdő periódusban, akkor egyensúlyi érték marad az összes további periódusban? Vagy; növekvő gazdaságban legalább a relatív árak és mennyiségek változatlanok maradnak-e, ha a kezdő periódusban alkalmas értékük volt? Ez tulajdonképpen a stacionárius egyensúly létezésének kérdése; az egyensúlyi pályát gyakran a *kiegyensúlyozott növekedés pályájának* nevezik. Ezt az általában vett egyensúly és a stacionárius

állapot közötti — a klasszikus közgazdaságtanban nem kifejtett — különbséget először Frisch [13] tisztázta.

A stacionárius egyensúly stabilitásának problémája különbözik az 5. pontbeli stabilitás értelmezésétől. Tételezzük fel, hogy van egy tetszőleges, kiinduló helyzet. Ekkor felmerül a kérdés: Az egymást követő periódusok egyensúlyi értékei konvergálnak-e a stacionárius egyensúlyhoz? E probléma amit nem fejtünk itt ki részletesebben a modern növekedési és tőkeelmélet centrális kérdése.

IRODALOM

[1] *Arrow, Kenneth J.—Block, Henry D.—Hurwicz, Leonid:* On the Stability of the Competitive. Equilibrium. Part 2. Econometrica, 1959. 27. 82—109. old.

[2] *Arrow, Kenneth J.—Debreu, Gerard:* Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, 1954. 22. 265—290. old.

[3] *Arrow, Kenneth J.—Hurwicz, Leonid:* On the Stability of the Competitive Equilibrium. Part 1. Econometrica 1958. 26. 522—552. old.

[4] *Aumann, Robert J.:* Existence of Competitive Equilibria in Markets With a Continuum of Traders. Econometrica, 1966. 34. 1—17. old.

[5] *Cassel, Gustav:* The Theory of Social Economy. 1918. Új, javított kiadás New York, 1932. Harcourt. A Theoretische Sozialökonomie ötödik kiadásának fordítása.

[6] *Cournot, Antoine Augustin:* Researches Into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. New York, Kelley. 1960. Először francia nyelven jelent meg. 1838.

[7] *Cowles comission for research in economics:* Activity Analysis of Production and Allocation. Proceedings of a Conference. (*Szerk.:* Tjalling C. Koopmans), New York, Wiley, 1951.

[8] *Debreu, Gerard:* Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. New York, Wiley, 1959.

[9] *Debreu, Gerard:* New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis. International Economic Review, 1962. 3. 257—273. old.

[10] *Debreu, Gerard—Scarf, Herbert:* A Limit Theorem on the Core of an Economy. International Economic Review, 1963. 4. 235—246. old.

[11] *Edgeworth, Francis Y.:* Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences. New York, Kelley, 1881/1953.

[12] *Farrell, M. J.:* The Convexity Assumption in the Theory of Competitive Markets. Journal of Political Economy, 1959. 67. 377—391. old.

[13] *Frisch, Ragnar:* On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium. Review of Economic Studies, 1935—1936. 3. 100—105. old.

[14] *Gale, David:* The Theory of Linear Economic Models. New York, McGraw-Hill. 1960.

[15] *Gale, David:* A note on Global Instability of Competitive Equilibrium. Naval Research Logistics Quarterly, 1963. 10. 81—87. old.

[16] *Gale, David—Nikaidô, Hukukane:* The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings. Mathematische Annalen 159. 1965. 81—93. old.

[17] *Hahn, Frank H.—Negishi, Takashi:* A theorem on Non-tâtonnement Stability. Econometrica, 1962. 30. 463—469. old.

[18] *Hicks, John R.:* Érték és tőke. A közgazdasági elmélet néhány alapelvének vizsgálata. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1978.

[19] *Jenkin, Fleeming:* The Graphic Representation of the Laws of Supply and Demand and Their Application to Labour. 1870. Második kötet, 76—106 oldal a Fleeming Jenkin, Papers. Literary, Scientific, etc. London School of Economics and Political Science, 1931.

[20] *Kuenne, Robert E.:* The Theory of General Economic Equilibrium, Princeton Univ. Press,-1963.

[21] *Leontief, Wastiy W.:* Composite Commoditics and the Problem of Index Numbers. Econometrica, 1936. 4. 39—59. old.

[22] *McKenzie, Lionel W.:* On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems. Econometrica, 1954. 22. 147—161. old.

[23] *McKenzie, Lionel W.:* On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market. Econometrica, 1959. 27. 54—71. old.

[24] *Metzler, Lloyd A.:* The Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions. Econometrica, 1945. 13. 277—292. old.

[25] *Morgenstern, Oskar:* Vollkommene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht. Zeitschrift für Nationalökomie 1935. 6. 337—357. old.

[26] *Morishima, Michio:* A reconsideration of the Walras—Cassel—Leontief Model of General Equilibrium. 63—76. oldal a Stanford Symposium on Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University, 1959, Mathematical Methods in the Social Sciences c. kötetben, amelynek szerkesztői Kenneth J. Arrow, Samuel Karlin és Patrick Suppes. Stanford University Press.

[27] *Morishima, Michio:* On the Three Hicksian Laws of Comparative Statics. Review of Economic Studies 27. 1960. 195—201. old.

[28] *Mosak, Jacob L.:* General Equilibrium Theory in International Trade. Bloomington, Ind. Principia, 1944.

[29] *Nash, John F. Jr.:* Equilibrium in *n*-Person Games. National Academy of Sciences, Proceedings 36. 1950. 48—49. old.

[30] *Negishi, Takashi:* On the Formation of Prices, International Economic Review 2. 1961. 122—126. old.

[31] *Negishi, Takashi:* The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article. Econometrica, 1961. 30. 635—669. old.

[32] *Neisser, Hans:* Lohnhöhe und Beschäftigungsrad im Marktgleichgewicht Weltwirtschaftliches Archiv, 1932. 36. 415—455. old.

[33] *Rothenberg, Jerome:* Non-convexity, Aggregation, and Pareto Optimality. Journal of Political Economy, 1960. 68. 435—468. old.

[34] *Samuelson, Paul A.:* A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. Economica, 1938. New Series 5. 61—71. old.

[35] *Samuelson, Paul A.:* The Stability of Equilibrium. Econometrica, 1941—1942. 9. 97—120. 10. 1—25. old.

[36] *Samuelson, Paul A.:* Wages and Interest: A Modern Dissection of Marxian Economic Models. American Economic Review 47. 1957. 884—912. old.

[37] *Samuelson, Paul A.:* A Modern Treatment of the Ricardian Economy. Quarterly Journal of Economics, 1959. 73. 1—35., 217—231. old.

[38] *Scarf, Herbert:* Some Examples of Global Instability of the Competitive Equilibrium. International Economic Review 1. 1960. 157—172. old.

[39] *Stackelberg, Heinrich von:* Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels. Zeitschrift für Nationalökomie 1933. 4. 456—472. old.

[40] *Uzawa, Hirofumi:* Gradient Method for Concave Programming. 117—126. oldal. Megjelent a *Kenneth J. Arrow, Leonid Hurwicz* és *Hirofumi Uzawa*: Studies in Linear and Non-Linear Programming c. kötetben. Stanford University Press, 1958.

[41] *Uzawa, Hirofumi:* On the Stability of Edgeworth's Barter Process. International Economic Review, 1962. 3. 218—232. old.

[42] *Von Neumann, John:* A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies, 1945. 13. 1—9. Először németül jelent meg az Ergebnisse eines mathematischen Kolloquims 8. évfolyamában, 1937.

[43] *Neumann, John von—Morgenstern, Oskar:* Theory of Games and Economic Behavior. 1944. Harmadik kiadás, New York, Wiley, 1964.

[44] *Wald, Abraham:* On Some Systems of Equations of Mathematical Economics. Econometrica, 1951. 19. 368—403. Először németül jelent meg a Zitschrift für Nationalökonomie 7. évfolyamában, 1936.

[45] *Walras, Léon:* Elements of Pure Economics: On the Theory of Social Wealth. Fordította William Jaffé. Homenwood, Ill. Irwin; London, 1954. Allen and Unwin. Először franciául jelent meg Élements d'economie politque pure címmel, 1874—1877.

[46] *Zeuthen, F.:* Das Prinzip der Kanppheit, technische Kombination und ökomische Qualität. Zeitschrift für Nationalökonomie 4. 1932. 1—24. old.

Az erőforrás-elosztás decentralizálása és számítási eljárásai[*1]

I. A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

A) Bevezetés

Ebben a műben a matematikai közgazdaságtan néhány — az erőforrások optimális elosztásával kapcsolatos — eredményét tárgyaljuk. Olyan gazdaságot vizsgálunk, amelynek céljai jól meghatározottak. Tehát föltesszük, hogy a gazdasági rendszer preferenciái beépíthetők egy olyan hasznossági függvénybe, amely az áruk kibocsátásától függ. A rendelkezésre álló elsődleges erőforrások — adott technológia esetén — bizonyos keretek közé szorítják a különböző lehetséges kibocsátási kombinációkat. Az optimális erőforrás-elosztás feladata: a termelési eljárások összes megengedett kombinációi közül annak kiválasztása, amelyik maximalizálja a gazdaság által elért hasznosságot.

Minthogy meglehetősen magas absztrakciós szinten mozgunk, a tanulmányozott gazdaság lehet a nemzetgazdaság vagy valamilyen kisebb gazdasági egység, akár egyetlen vállalat. Az a feltevés, hogy a gazdaság céljait egyetlen hasznossági függvény képviseli, leginkább az egyetlen vállalatból álló gazdaságra illik. Egy nemzetgazdaságra a feltevés kevésbé jogos, de legalább bevezetést nyújt ahhoz a bonyolultabb problémához, amelyet az okoz, hogy a különböző gazdálkodó egységek mindegyike saját hasznossági függvénye szerint ítéli meg a gazdaság működését. Nem foglalkozunk az optimum általánosabb meghatározásából adódó kényes problémákkal sem.

Az, hogy egy előírt hasznossági függvényt maximalizálva kiválasztjuk erőforrás-elosztásunkat a különböző termelési eljárások közül, matematikai probléma, amelynek megoldása minden konkrét esetben számolási feladatnak tekinthető. Mármost minden számítás — a legegyszerűbbek kivételével — a fokozatos megközelítési módszerre (successive approximations) épül. Ez egy több lépcsős eljárás, amelynek

* (Társszerző: *L. Hurwitz*) Decentralization and Computation in Resource Allocation. Megjelent: *R. W. Pfouts* (szerk.): Essays in Economics and Econometrics. University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1960. 33—104. old.

[1] Az ebben a dolgozatban leírt kutatás jelentős mértékben a RAND Corporation védnöksége alatt folyt. Szeretnénk köszönetünket kifejezni az Office of Naval Research és a Center for Advanced Study in Behavioral Sciences intézményeknek segítségükért, valamint *M. J. Beckmannak* és *W. M. Gormannak* megjegyzéseikért.

minden lépésében felhasználjuk a számítások előző lépésének eredményeit, és minden egyes lépésnél egyre jobban megközelítjük a kívánt választ. (Az osztás szokásos eljárása egy példa a fokozatos közelítések eljárására: minden kísérleti osztás eredménye újabb számjegyet ad a hányadosban és újabb osztandót a következő kísérleti osztáshoz.)

A közgazdasági tankönyvekből ismert az a felfogás, hogy a piac a kereslet és a kínálat egyenlővé tételét az egyensúlyi ár, illetve árak fokozatos megközelítésével oldja meg. Egy áru elkülönített piacán minden közelítésben megneveznek egy árat, amely mellett meghatározzák a kereslet és a kínálat különbségét. A következő lépésben e különbségnek megfelelően módosítják ezt a kísérleti árat azzal az elképzeléssel, hogy a különbség végül is eltűnik. Az ármozgásokban levő e fajta dinamika fogalma az angol klasszikus közgazdaságtanban gyökeredzik, elsősorban John Stuart Millnél, explicit megfogalmazását azonban — az összes árhoz való egyidejű közelítést — Léon Walras[2] *tatônnements* fogalmában kapta meg.

A jóléti gazdaságtan szerint — a hasznossági függvényre és a termelési eljárásokra vonatkozó bizonyos feltevések mellett (lásd a III. fejezet *A)* pontjában a feltevések részletesebb, explicitebb taglalását) — egy versenyegyensúly azonosítható egy gazdasági optimummal, s így azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a fokozatos közelítések módszere, amely megoldja a piaci egyensúly problémáját, egyben számítási módszer az optimális erőforrás-elosztás feladatának megoldásához is. Pontosan ebben a megvilágításban látta Pareto[3] e problémát, aki a piacot egy számítógéphez hasonlította. Természetesen, mihelyt az erőforrások optimális elosztásának feladatát mint szimultán egyenletek megoldását fogalmazzuk meg (olyan egyenletekre gondolunk, amelyek definiálják a versenyegyensúlyt), felmerül annak lehetősége, hogy e feladatokat inkább valamilyen centralizált eljárással — számítógép felhasználásával — oldjuk meg, nem pedig a piac segítségével. Pareto ellenezte a megoldást, mivel az egyenletek hatalmas száma lehetetlenné teszi a módszer alkalmazását. Egy teljesen centralizált szervezet a technológiára és az információkra vonatkozó olyan tárolási és feldolgozó kapacitásokat követelne, amely meghaladna minden elképzel-

[2] Lásd: *L. Walras:* Elements of Pure Economics (szerkesztette: W. Jaffé). George Allen and Unwin, London, 1954. 84—86. old. 90—91. old. 105—106. old., 169—172. old., 243—254. old. és 184—195. old. D. Patinkin gondolatébresztően elemzi a Walras-féle *tatônnements* elméletet, és hangsúlyozza központi szerepét annak kimutatásában, hogy a piac a gazdasági egyensúlyt fokozatos közelítésekkel hozza létre. *D. Patinkin:* Money, Interest, and Prices. Evanston: Illinois and White Plains; Row, Peterson and Company, New York, 1956. 377—385. old.

[3] *V. Pareto:* Manuel d'Économie Politique. (Parizs, Marcel Giard, 1927, második kiadás.), 233—234. old. Kibernetikai kifejezéssel élve, Pareto, a közgazdászok szokásos nézetét kikristályosítva, azt tartotta, hogy a piaci mechanizmus homeostatikus; amelyet a kibernetika alapítója élesen tagadott; lásd *N. Winer:* Cybernetics. John Wiley and Sons, and Hermann et Cie., New York and Párizs, 1948. 185—186. old. R. M. Goodwin szintén készített egy összehasonlítást a piac és a számológép között. *R. M. Goodwin:* Iteration, Automatic Computers, and Economic Dynamics. Metroeconomica, III., 1951. 1—7. old.

hető rendelkezésre álló kapacitást. A versenyzői eljárás ellenkezőleg, *decentralizálást*[4] valósít meg. A piaci folyamatok fokozatos megközelítési módszerének minden lépésében minden vállalat úgy módosítja kísérleti termelési tervét, hogy csak a pillanatnyi kísérleti árakat és a saját technológiájára vonatkozó ismereteit használja információként. Ugyanakkor a kísérleti árak módosítása csak az összevont kereslettől és kínálattól függ. Ezek egyszerűen az egyes vállalatok termelési (és az egyes fogyasztók fogyasztói) terveinek összegei plusz az alapvető erőforrások eredetileg létező kínálatai.

Így a vállalatok és a fogyasztók szükséges információi kizárólag saját technológiájukból, illetve hasznossági függvényükből, valamint az árakból állnak, míg az ármódosítás kizárólag az egyéni döntések összegein alapul. A decentralizálás erénye éppen az, hogy minimalizálja a gazdaság minden résztvevőjének információigényét.

Célunk itt az, hogy a korábbinál pontosabban leírjuk azt a dinamikus rendszert, amely a piaci mechanizmusból következik, hogy olyan feltételeket adjunk, amely mellett az így meghatározott erőforrás-elosztás konvergál az optimálishoz, ahol az optimalitást az egész gazdaságban egyetlenegy hasznossági függvény definiálja; valamint, hogy a piaci mechanizmus olyan módosításait tanácsoljuk, amelyek olyan esetekben is megőrzik a decentralizáltság bizonyos fokát, amikor a szóban forgó feltételek nem teljesülnek.

A módosítatlan piaci mechanizmus konvergenciafeltételei alapjában a csökkenő vagy állandó hozadék a termelésben, és az (általánosított értelemben vett) csökkenő határhaszon a javak végső fogyasztásánál. Ezen dinamikus problémák tanulmányozására többfajta matematikai eszközt használunk majd, egyeseket a játékelmélet, a lineáris és nemlineáris programozás területéről, más klasszikusabb módszereket pedig a maximalizálási problémák megoldására differenciálegyenletekkel.

A *B)* pontban történeti szempontból vizsgáljuk meg a társadalmi optimum dinamikus megközelítésének problémáját Walras első megfogalmazásától kezdve. A *C)* pontban pontosabban megfogalmazzuk erőforrás-elosztási modellünket. A II. fejezetben a felhasználandó matematikai eszközöket tekintjük át: mindenekelőtt a gradiensmódszert (más néven: a legmeredekebb felhágás módszerét), amely egy differenciálegyenlet-rendszer maximumfeladatát oldja meg; valamint foglalkozunk a feltételes szélsőértékek és a nyeregpontok kapcsolatával. A III. fejezetben a csökkenő vagy állandó hozadék melletti termelés és a szigorúan konkáv hasznossági függvény esetét tanulmányozzuk (lásd a későbbiekben az 1. *definíciót* és a csökkenő határhasznosság általánosított formájára vonatkozó feltételt). Ebben az esetben két dinamikus rendszer konvergenciáját bizonyítjuk; mindkét rendszer egy-egy piaci mechanizmus intuitív fogalmát formalizálja. A IV. fejezetben olyan eseteket mérlegelünk, ahol az eredeti piaci mechanizmusok nem konvergálnak; különös hangsúlyt helyezünk a növekvő hozadék esetére. Három módosított piaci mechanizmust java-

[4] A „decentralizáció" kifejezés egyik lehetséges definícióját e szövegösszefüggésben lásd: *L. Hurwicz:* Decentralized Resource Allocation, Cowles Commission Discussion Paper No. 2112, 1955. Lásd még a 108. old. második bekezdését később.

solunk, és megmutatjuk, hogy azok bizonyos kívánatos tulajdonságokkal rendelkeznek. Az egyik ilyen mechanizmus szorosan kapcsolódik a tökéletlen versenyhez, a másik a spekulációhoz. Azt is megmutatjuk, hogy a tisztán lineáris esetben (lineáris hasznossági függvény és állandó hozadék), ahol az eredeti piaci mechanizmusok nem konvergensek, a módosított mechanizmusok között van konvergens.

B) Történeti megjegyzések

A társadalmi optimum piaci megvalósításáról szóló közgazdasági művek legtöbbje, akár szocialista, akár kapitalista gazdasággal foglalkozik, megelégszik a statikus jellemzéssel.[5] A piaci mechanizmus dinamikus megfogalmazásához elsősorban Walras, Pareto, Taylor,[6] Lange[7] és Samuelson[8] járultak hozzá.

Ebben a tanulmányban feltesszük, hogy csak egyetlen fogyasztó van, akinek az érdeke szerint működik az egész gazdaság. Walras, Pareto, Taylor és Samuelson egyaránt a fogyasztók sokaságát tételezték fel; Lange pedig mind a két esettel foglalkozott. Fogyasztók sokasága esetén azt feltételezik, hogy minden fogyasztó azonnal maximalizálja hasznosságát, s így az árucikkek iránti kereslet az áraknak adott függvénye.

Walras explicite nem foglalkozott a szocialista gazdasággal, hanem a versenyzői rendszert számolási eszköznek tekintette, amely a társadalom maximális kielégítését valósítja meg. Ami a termelési oldalt illeti, Walras föltette, hogy minden termelési eljárás homogén lineáris.[9] Ebben az esetben a profit bármely árvektor mellett arányos a termelés terjedelmével (adjustment rule), és a határnyereségesség állandó. Walras igazodási szabálya abban az esetben, ha a gazdasági rendszer kiinduló állapota nem egyensúlyi állapot, a következő: *a)* az árváltozás előjele azonos a túl-

[5] Lásd például *A. P. Lerner:* The Economics of Control. Macmillan, New York, 1946. vagy *J. E. Meade:* Planning and the Price Mechanism. George Allen and Unwin, London, 1948.

[6] *F. M. Taylor:* The Guidance of Production in a Socialist State, American Economic Review Vo. 19. (1929), No. 1. Újranyomtatva: *B. Lippincott* (szerk.): On the Economic Theory of Socialism. University of Minnesota Press, Mineapolis, 1938. 41—54. old. különösen 50—54. old

[7] *O. Lange:* On the Economic Theory of Socialism; Review of Economic Studies, IV. No. 1. and 2. (1936—1937) újranyomtatva: *B. Lippincott* idézett mű. 57—142. old., különösen 70—98. old.

[8] *P. A. Samuelson:* Foundation of Economic Analysis. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1947. 269—275. old.

[9] Követjük Walras tárgyalását, idézett mű: 22. Lecke, amely azzal az igazodási eljárással foglalkozik, amikor fogyasztók is és termelők is fellépnek. Ebben a fejezetben Walras azt is felteszi, hogy minden eljárásnak csak egy kibocsátása van, és minden árut csak egy eljárás állít elő (azaz a rögzített termelési együtthatók feltételezése), de ez a feltevés lényegtelen számunkra. Később Walras mérlegeli azt az esetet is, amikor a termelési együtthatók nem adottak, hanem egy adott termelési függvényből költségminimalizálással származnak (383—386. old.), de soha nem egyesíti ezt a tárgyalást az igazodás korábbi tárgyalásával, amint ezt Jaffé hangsúlyozza (552—53. old.).

keresletével, *b)* minden eljárás terjedelmének változása azonos előjelű a határnyereségességével.[10]

Walras igazodási szabálya, amely a vállalatokra vonatkozik, elkerülhetetlen következménye az állandó hozadék feltételezésének. Nem lehet azt állítani, hogy egy vállalat az árak bármely adott szintje esetén azonnal maximalizálja profitját, hiszen állandó hozadék mellett a profitmaximalizáló volumen végtelen lehet, éspedig akkor, ha pozitív profit lehetséges valamilyen árszinten. Az is lehetséges, hogy minden volumen esetén nulla a profit, ekkor a profitmaximalizálás nem határozza meg a vállalat viselkedését. Végül, ha a profit minden volumennél negatív, akkor az optimális volumen nulla. Walras helyesen látta, hogy ilyen körülmények között nem írhat elő azonnali profitmaximalizálást oly módon, mint ahogy azonnali hasznosságmaximalizálást követelt meg a fogyasztónál. A késleltetett igazodás szükségszerű jellege ellenére Walras utódai rendszerint nem voltak ilyen óvatosak, és nem értették meg a sajátos igazodási problémákat, amelyek az állandó hozadékkal kapcsolatosak, egészen addig, míg a játékelmélet és a lineáris programozás fejlődése előtérbe nem helyezte őket.

Pareto nyíltan megjegyezte, hogy egy szocialista rendszernek utánoznia kellene a versenyt, hogy optimális elosztást érjen el,[11] és Walrast követve, erőteljesen hangsúlyozta a piac számítási eszköz szerepét az általános gazdasági egyensúly egyenletrendszerének megoldására. Azonban az igazodás dinamikájának leírása nála sokkal kevésbé pontos, mint Walrasnál. A *Cours*-ban (amelyet 1896-ban publikált) meglehetősen vázlatosan jelezte egyetértését Walrasnak a versenyfolyamatról adott le-

[10] *Walras:* idézett mű, 253—254. old.; a terminológiát a továbbiakban használttal összehangban változtattuk meg. Figyelmeztetni kell az olvasót, hogy Walras tárgyalása korántsem egyértelmű és értelmezésünk nem az egyedül lehetséges értelmezés. Azt az állítást követtük, amely összefoglalja a 22. leckét a *tatônnements*-ről egy termelő—fogyasztó gazdaságban. Ugyanakkor szó szerint véve az azt megelőző tíz oldalt, abban olyan igazodási eljárást ábrázol, amely csak távolról kapcsolódik az összefoglalóhoz. Egyes árakat rögzítenek, míg mások egymástól függetlenül változnak — hogy a piacot megtisztítsák; hasonlóan a volumeneket úgy módosítják, hogy minden iparban a profit nulla legyen; de a leírt igazodási eljárás az eladási áron kívül minden árat adottnak vesz. Nehéz azt hinni, hogy Walras úgy akarta volna leírni a valóságot, mintha a piacok és a vállalatok előre meghatározott sorrendben kerülnének egyensúlyba. Talán ez a nehézség vezette Goodwint (lásd idézett mű, 5. old.) arra, hogy tagadja azt, hogy Walras igazodási eljárását gyakorlatinak tekintette volna, akár a valóságra vonatkozóan, akár abban az értelemben, hogy egy szocialista gazdaság működési eszközét írta volna le. Mi viszont azt úgy gondoljuk, hogy Walras kifejtésének hiányosságait matematikai eszközeinek durvaságát okozta; ő sok piac és sok vállalat egyidejű igazodását szerette volna megmagyarázni a differenciál- (vagy differencia-) egyenlet-rendszer fogalma nélkül, és így arra kényszerült, hogy durván fogalmazzon — úgy, hogy egyes változók változnak, míg mások rögzítve maradnak.

[11] *Manuel:* i. m. 362—364. old. Egy szórakoztató nyomdahiba fordul elő, amikor a közösségi társadalomról beszél: "qui ait pour but de procurer à ses membres le *minimum* d'ophelimité" [„amelynek célja: a *minimális* ophelimitás biztosítása tagjai részére" — A fordító fordítása] (362. o.) (A szerzők kiemelése).

írásával.[12] Míg Edgeworth-szel ért egyet abban, hogy a gazdasági optimumot sokféle számítási úton el lehet érni, azt állítja, hogy Walras módszere a természetes gazdasági módszer.[13]

A későbbiekben a *Manuel* leírása terjedelmesebb, de homályosabb. A stabilitás vizsgálata feltételez egy dinamikus rendszert, amelyben az ár reagál a kereslet és a kínálat eltérésére.[14] Azonban a vállalatok kínálati függvényeinek jelentését sehol sem tisztázza. Azok számára, akik csökkenő hozadék mellett működnek, ez a szokásos profitmaximalizálási szabály; a többiek számára, inkább az „ár egyenlő az átlagköltséggel" szabály tűnik érvényesnek.[15] Az utóbbinak az igazolását azonban a szabad belépésre alapozza, amely önmagában is dinamikus folyamat, ugyanúgy mint Walrasé, és amelyet explicit módon be kellett volna vezetni.

Taylor különbséget tett az elsődleges tényezők és a termelt áruk között. Az elsődleges tényezők árainak bármely adott szintje esetén a termelt áruk árait úgy állapítják meg, hogy az ár egyenlő legyen a termelési költséggel.[16] Az így kialakult árak mellett a fogyasztói kereslet közvetve származtatja az elsődleges tényezők iránti keresletet. Ezek árai nőnek, ha a kereslet nagyobb, mint a kínálat, és csökkennek az ellenkező esetben.[17]

Taylor szabálya, amely a termelők ármegállapító mechanizmusára vonatkozik, egyáltalán nem világos. Abban a speciális esetben, amikor a hozadék állandó, nincsenek ikertermékek, és minden vállalat egy végterméket közvetlenül az elsődleges tényezőkből állít elő, Taylor szabálya egyértelmű. Azonban állandó hozadék nélkül az átlagköltség függ egy szimultán egyenletrendszertől, amelyben többek között a keresleti függvények is szerepelnek. De Taylor ármegállapítási szabálya még állandó hozadék esetén is szimultán egyenletrendszer megoldását követeli meg, ha egyes vállalatok termékét más vállalatok használják fel. Ha alternatív eljárások vannak ugyanazon áru termelésére, akkor egy minimalizálási feladat is belép.[18] A szerző nem jelzi, hogyan lehet ezeket a problémákat megoldani; bizonyára szükség volna bizonyos fokú centralizálásra abban az értelemben, hogy egy központi termelési ügynökségnek ismernie kellene legalább az összes technikai együtthatót, hogy meghatározhassa az árakat.

[12] Cours d'economie politique. I. kötet, F. Rouge, Pichon and Duncker and Humblot, Lausanne, Paris—Leipzig, 1896, 45—47. old.

[13] Uo. 25. old.

[14] *Manuel:* 223—224, 232—233. old.

[15] Uo. 177—179., 185—187. old.

[16] *Taylor:* i. m. 45. old.

[17] *Taylor:* i. m. 53. old.

[18] Ha nincs ikertermék, akkor az eljárások hatékony választása egy és ugyanaz minden keresleti-függvény-rendszerre. Lásd: *T. C. Koopmans:* (szerk.) Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Comission Monograph No. 13. John Wiley and Sons és Chapman and Hall, New York és London, 1951. VII—X, fejezet. 142—173. old. Ha van ikertermék, akkor Taylor szabálya szerint nem lehet a keresleti függvényektől függetlenül meghatározni az optimális eljárások halmazát, következésképpen az árakat sem.

Lange volt a legerősebb védelmezője annak az állításnak, hogy egy szocialista gazdaság képes megvalósítani mind az erőforrások optimális elosztását, mind a decentralizálás számítási és információs erényeit. Két igazodási modellt mutat be, az egyikben a fogyasztó szuverén, a másikban nem. A vállalat viselkedését mindkét esetben a „határköltség egyenlő az árral" elv határozza meg. Azaz adott áraknál a vállalat — feltevés szerint — megkeresi bármely adott kibocsátás minimális termelési költségét. Ezután a kibocsátást úgy határozzák meg, hogy az így számított határköltség egyenlő legyen az árral. Az elsődleges tényezők iránti kereslet függvényeit a költségminimalizálási ismérv határozza meg.

Ez a megfogalmazás nyilván azt célozta, hogy magába foglalja mind a növekvő, mind a csökkenő hozadék esetét. Az utóbbi esetben általában megfelel a következő egyetemes szabálynak: Úgy kell választani a ráfordításokat és a kibocsátásokat, hogy maximalizáljuk a profitot. Mint később látni fogjuk,[19] e szabály nem megfelelő, és helytelen a növekvő hozadék esetében. Továbbá a szabály nyilvánvalóan nem oldja meg azokat a problémákat, amelyeket az állandó hozadék esete az előbb vázolt módon okoz.

A vállalat viselkedése meghatározza a vállalatok keresleti és kínálati függvényeit. Lange első modelljében a fogyasztók keresleti függvényeit a hasznosságmaximalizálása határozza meg. Így az egész piacra meghatározottak a keresleti és a kínálati függvények, és az állam feladata, hogy az árakat a keresletnek és a kínálatnak megfelelően változtassa. Lange felismerte, hogy nem bizonyított e dinamikus folyamat feltétlen konvergenciája ahhoz az egyensúlyhoz, amely megfelel az erőforrások optimális elosztásának. A folyamat lehet, hogy egyáltalán nem konvergál, hanem a végtelenségig oszcillál, sőt, robbanásszerűen divergál.[20] Az oszcilláció elkerülése érdekében szerinte az állam árképzési szabályait kellene módosítani, például úgy, hogy figyelembe veszik az árváltozások előre látható volumenhatásait. Ezt később illusztrálni fogjuk a növekvő hozadék esetében.[21]

Lange nem határozza meg világosan a dinamikus folyamatot a második modelljében, ahol egyetlenegy hasznossági függvény van, a Központi Tervhivatalé.[22] Úgy tűnik, szerinte a Központi Tervhivatal úgy határozza meg hasznossági függvényéből a keresleti függvényeit, mintha fogyasztó volna. Ekkor az árak a korábbiakban leírtak szerint reagálnak a keresletre és a kínálatra. Nem világos, hogy a Hivatalt korlátozza-e egy „költségvetési korlát", vagy csak egyszerűen egyenlővé teszi határhasznosságát az árral.

A walrasi dinamikus rendszer Samuelson-féle jól ismert újrafogalmazása felteszi, hogy a keresleti és kínálati függvények jól meghatározottak. Szimultán dinamikus rendszere ekkor egyszerűen megfogalmazható: minden árváltozás sebessége arányos

[19] Lásd a IV. fejezet *C)* pontját.
[20] *Lange:* i. m. 43. lábjegyzet, 89—90. old.
[21] Lásd a IV. fejezet *D)*, *E)* és *F)* pontját.
[22] *Lange:* i. m. 90—93. old.

a kereslet és a kínálat különbségével. Bár a rendszer lényege megtalálható Walrasnál és Langénál, először Samuelson tette ezt explicitté, és kétségtelen, hogy ma már az előbbi kettőt is a Samuelson által készített szemüvegen át olvassuk.

A lineáris programozás fejlődése újra hangsúlyt adott az állandó hozadék okozta problémáknak. Egy tisztán lineáris gazdaságban — ahol minden eljárás állandó hozadékú és a gazdasági rendszer hasznossági függvénye lineáris, — a piachoz hasonló számítási eljárások vég nélküli oszcillációkhoz vezetnek, ahogy ezt Samuelson megmutatta.[23] Valóban, ez a probléma volt a szerzők vizsgálódásának kiindulópontja.

C) Az erőforrás-elosztási modell matematikai leírása

Legyen s-féle áru és m-féle termelési eljárás. Minden eljárás különböző terjedelemben folytatható; általában nem tesszük fel, hogy állandó hozadékúak. Legyen x_j a j-edik folyamat terjedelme, legtöbb célra x_j-t úgy képzelhetjük el, mint a j-edik eljárás kibocsátásának mennyiségét vagy kibocsátásainak valamilyen mutatószámát, ha egynél több fajta kibocsátás van. Legyen $g_{ij}(x_j)$ az i-edik áruból termelt mennyiség a j-edik eljárás esetében, ha az utóbbi mérete x_j; a negatív értékű $g_{ij}(x_j)$ ráfordítást jelent.

Az s számú árun belül megkülönböztetjük a *kívánt* (desired) áruk n-elemű alosztályát; ezek az áruk kerülnek végső felhasználásra. A megmaradó vagy *elsődleges* (primary) áruk csak azért hasznosak, mert közvetlenül vagy közvetve felhasználják őket a kívánt áruk termelésében. Legyen y_i az i-edik kívánt árunak az a mennyisége, amelyet a gazdaság a végső kereslet kielégítésére fordít — azaz, amelyet nem használnak fel egyetlen termelési eljárásnál sem. Feltesszük, hogy a gazdaság egyetlenegy hasznossági függvénnyel rendelkezik, amelynek változói a kívánt áruk végső kereslete, azaz a következő típusú függvény:

$$U(y_1, \ldots, y_n). \tag{1}$$

A termelési eljárások összesen $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j)$ mennyiséget bocsátanak ki az i-edik áruból. Emellett bizonyos áruk (elsősorban a természeti erőforrások és a munkaerő) pozitív mennyiségben állnak rendelkezésre anélkül, hogy termelnék őket. Legyen ξ_i a kezdetben rendelkezésre álló i-edik termék mennyisége, természetesen legtöbb árunál $\xi_i=0$. Az olyan elsődleges árut, amelynél $\xi_i=0$, rendszerint *közbülső* árunak nevezik, de nekünk nem lesz szükségünk arra, hogy megkülönböztessünk elsődleges és közbülső termékeket. Egy adott $(y_1, \ldots, y_n)$ végsőkereslet-vektor megengedettségéhez az szükséges, hogy elemei ne legyenek nagyobbak, mint a termelő-

[23] Samuelson ezt egy 1950-ből származó publikálatlan feljegyzésben mutatta meg. Lásd: *R. Dorfmann—P. A. Samuelson—R. Solow:* Linear Programming and Economic Analysis. McGraw Hill, New York—Torontó—London, 1958. 1. lábjegyzet, 63. old. Egy példát adunk erre a II. fejezet *D)* pontjában.

szektortól kapható és a kezdetben rendelkezésre álló mennyiségek összegei. Az is szükséges, hogy minden áruból az összes kibocsátás és az eredetileg rendelkezésre álló mennyiség együtt legalább nulla legyen. Innen

$$y_i \leqq \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) + \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) + \xi_i \qquad (i = n+1, \ldots, s). \tag{2.2}$$

Itt az ún. kívánt árukat $1, \ldots, n$ index jelöli, az ún. elsődleges árukat $n+1, \ldots, s$. Ekkor az erőforrás-elosztási feladat a következő: Válasszunk az $y_1, \ldots, y_n$ és $x_1, \ldots, x_m$ számokat úgy, hogy maximalizáljuk az $U(y_1, \ldots, y_n)$ értékét minden olyan változóegyüttesre vonatkozóan, amely kielégíti a (2) megengedettségi (feasibility) feltételeket.

Vegyük észre, hogy feltevésünkkel kizártuk az (eljárások közötti) externalitásokat, a kedvezőeket és a kedvezőtleneket egyaránt, mivel a g_{ij} ráfordítások és kibocsátások nem függnek más eljárások volumenétől, csak a j-edikétől.

Mi inkább eljárások formájában, mintsem a szokásosabb termelési függvények formájában, mutattuk be az erőforrás-elosztási modell termelési szektorát. Ebben Koopmanst[24] követjük, aki meggyőzően érvel amellett, hogy az utóbbi származtatott fogalom, amely már magában foglalja az optimalizálás bizonyos elemeit. Az eljárásokkal való megfogalmazás akkor is előnyös, ha a modellt mint egy nagy vállalaton belüli optimalizálást értelmezzük. Azonban általánosítjuk Koopmans modelljét azzal, hogy megengedünk nemlineáris g_{ij} függvényeket, így a nem állandó hozadék hatásait is tanulmányozhatjuk.

A későbbi hivatkozásokhoz megjegyezzük, hogy $y_1, \ldots, y_n$ és $x_1, \ldots, x_m$ változók — definíciójuk szerint — szükségképpen nemnegatívok.

II. A MATEMATIKAI ALAPOK

A) Néhány megjegyzés a feltétel nélküli maximumokról

1. SZÜKSÉGES FELTÉTELEK

A $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ vektor (feltétel nélküli) *maximumhelye* az $f(z_1, \ldots, z_p)$ (valós értékű) függvénynek, ha $f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) \geqq f(z_1, \ldots, z_p)$ minden lehetséges $z_1, \ldots, z_p$ értékkombinációra. Megengedhető, hogy a z_i-k nemnegatív értékekre legyenek leszűkítve, ha ez alkalmas.

[24] *T. C. Koopmans:* Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, III. fejezet az Activity Analysis c. kötetben, 33—97. old., különösen a 33—34. old.

A vizsgált modellben a feltétel nélküli maximalizálás közgazdasági példájaként tekintsük egy termelési eljárás menedzserét, mondjuk a j-edikét, aki vesz és elad árukat, számára adott $p_1, \ldots, p_n$ árakon. Ekkor profitja

$$\pi_j(x_j) = \sum_{i=1}^{s} p_i g_{ij}(x_j) \tag{3}$$

Egy versenygazdaságban a menedzser x_j-t úgy akarja választani, hogy a (3)-at maximalizálja. Természetesen ez egy olyan példa, ahol csak egyetlen változó van.

Bennünket a feltétel nélküli maximumhelyek nem elsősorban önmagukért érdekelnek, hanem a velük kapcsolatos néhány kérdés rövid taglalása illusztrációul szolgál a feltételes maximumhelyek bonyolultabb problémáihoz, amelyek számunkra lényegesebbek.

Először azt kell megjegyezni, hogy egy tetszőleges függvénynek nem biztos, hogy van maximuma. Például, ha a (3)-ban mindegyik $g_{ij}(x_j)$ lineáris, akkor $\pi_j(x_j)$ is az. (Emlékeztetünk arra, hogy amíg a menedzser eljárását vizsgáljuk, addig a p_j árak adott számok, nem pedig változók.) Ha a $\pi_j(x_j)$ lineáris függvény pozitív meredekségű, akkor π_j olyan naggyá tehető, amilyenné csak akarjuk, x_j-t megfelelően nagynak választva. Így nincs olyan véges érték, amelyet maximumnak nevezhetnénk. Még egy nemlineáris függvénynek sem biztos, hogy van maximuma.

Másodszor, megjegyzendő, hogy egy függvénynek lehet egynél több maximumhelye. Szélsőséges eset a konstansfüggvény, amelynél minden pont maximumhely; így ha a $\pi_j(x_j)$ profitfüggvény mindenütt nulla (ez a jelenség a lineáris programozásban fel is lép), akkor x_j minden értéke maximalizálja a profitot.

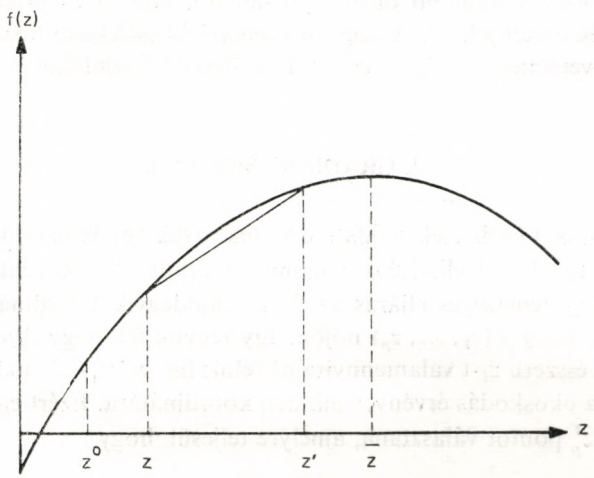
Harmadszor, a maximumot az előbbiekben minden megengedett értékegyüttesre vonatkozóan definiáltuk, amelyet gyakran *globális maximum*nak neveznek. Gyakran hasznos a *lokális maximum* gyengébb fogalmát használni olyan $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ vektor esetén, amelyre $f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) \geqq f(z_1, \ldots, z_p)$ a z_i-k minden olyan értékére, amelyek $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ valamilyen kicsiny környezetébe esnek. Egy globális maximum nyilván lokális maximum is, de ez megfordítva általában nem igaz. Ebben a munkában a „maximum" kifejezés — jelző nélkül — a globális maximumra utal.

Ha az f függvény differenciálható és van lokális maximuma, valamint ha a z_i-k előjele nincs előírva, akkor mint jól ismert, a $\partial f/\partial z_i$ parciális deriváltak minden $i=1, \ldots, p$-re 0 értékűek, ha a maximumhelyen értékeljük őket. Az f_{z_i} jelölést használjuk $\partial f/\partial z_i$-re általában és $\bar{f}_{z_i}$-t f_{z_i}-re a $\bar{z}, \ldots, \bar{z}_p$ pontban. Ekkor a lokális (következésképpen a globális) maximumnak egy szükséges feltétele, hogy $\bar{f}_{z_i}=0$, ha z_i-k előjele nincs előírva, $i=1, \ldots, p$.

Az utolsó feltétel természetesen nem elegendő még a lokális maximum meglétéhez sem, nemhogy a globális maximuméhoz. E feltétel fennáll minimumoknál is, és még olyan pontokban, amelyek sem nem maximum-, sem nem minimumhelyek.

Az a feltétel, amely a deriváltak nulla voltát mondja ki egy globális maximum elégséges feltételévé válik, ha az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvényt egy speciális osztályra szűkítjük, amely a *konkáv függvények* osztálya néven ismert. Ha csak egy változó van, akkor egy konkáv függvény olyan, hogy a változó növekedésével az érintő meredeksége soha sem nő. Egy egyváltozós függvényt *szigorúan konkáv*nak neveznek, ha a meredekség csökken, ilyen függvényt illusztrál az első ábra. Egy konkáv függvény, amely nem szigorúan konkáv, ettől csak abban különbözik, hogy a függvény görbéjének lehetnek lineáris szakaszai is. Könnyű az ábráról leolvasni, hogy $\bar{z}$ pont, ahol a derivált nulla, valóban maximum.

Az 1. ábrán látható, hogy ha két olyan pontot veszünk, mint z és z', akkor a két pont közötti függvénygörbe a két pontot összekötő szakasz felett fekszik. Ez a tulajdonság definícióként szolgálhat tetszőleges számú változó függvényének konkavitására és szigorú konkavitására.



1. ábra

1. definíció: A (valós értékű) $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény *konkáv*, ha bármely két $(z_1, \ldots, z_p)$ és $(z'_1, \ldots, z'_p)$ pontra és bármely olyan $(z''_1, \ldots, z''_p)$ pontra, amelyre $z''_i = \theta z_i + (1-\theta) z'_i$; $(i=1, \ldots, p)$, ahol θ egy 0 és 1 közötti valós szám, fennáll:

$$f(z''_1, \ldots, z''_p) \geqq \theta f(z_1, \ldots, z_p) + (1-\theta) f(z'_1, \ldots, z'_p).$$

Az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény *szigorúan konkáv*, ha utolsó állításunkban szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

Jegyezzük meg, hogy egy lineáris függvény konkáv, de nem szigorúan konkáv.

Ha a versenygazdaságban egyetlenegy termelési eljárás van, ahol a (3)-beli függvényt kell maximalizálni, akkor a $d\pi_j/dx_j = 0$ feltétel szükséges és elégséges fel-

tétele a maximalizálásnak, ha $\pi_j(x_j)$ konkáv és differenciálható. Azaz a profitmaximalizáló pont az lesz, ahol a *határnyereségesség* nulla. [Ha a $\pi_j(x_j)$ függvény nem konkáv, akkor ez nem szükségképpen igaz; ebben az esetben az a pont, ahol a határnyereségesség nulla, lehet a profitminimum pontja is.] Most pedig tegyük fel, hogy mindegyik $g_{ij}(x_j)$ függvény konkáv; ekkor könnyen belátható, hogy $\pi_j(x_j)$ szintén konkáv, hiszen a p_i árak feltehetőleg nemnegatívok. Tehát a $g_{ij}(x_j)$ függvények konkávitása biztosítja, hogy az a feltétel, hogy a határnyereségesség nulla (ár egyenlő határköltség) ekvivalens a profitmaximalizálással.

Mi annak a feltételnek a jelentése, hogy a $g_{ij}(x_j)$ függvények konkávok? Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a folyamatnak egy outputja van, mondjuk az 1. számú áru, és az eljárás méretét ez az output méri, azaz $g_{ij}(x_j)=x_j$ (megjegyezzük, hogy ez a függvény lineáris, következésképpen konkáv). Mivel a többi javak inputként szerepelnek, $g_{ij}(x_j)$ a negatívja az i-edik jószágból ráfordított mennyiségnek, ha $i>1$. Mivel $g_{ij}(0)=0$ (hiszen nulla kibocsátáshoz nulla ráfordítás elegendő), könnyen belátható, hogy a $g_{ij}(x_j)$ függvények konkávitása azt jelenti, hogy az i-edik jószágból a ráfordítás legalább olyan gyorsan nő, mint a kibocsátás, ami a nem növekvő hozadék esetét jelenti. A szigorú konkávitás csökkenő hozadékkal jár, míg a konkávitás követelménye még megengedi az állandó hozadékot is.

3. A GRADIENS MÓDSZER

Most a fokozatos közelítések módszerével tekintsük egy feltétel nélküli maximum megtalálásának feladatát, elindulva valamilyen adott első közelítésből, mondjuk $z_1^0, \ldots, z_p^0$-ből. Egy lehetséges eljárás az, hogy mindegyik koordinátát külön-külön úgy változtatjuk, hogy $f(z_1, \ldots, z_p)$ nőjön. Így tegyük fel, hogy $\partial f/\partial z_i>0$ az indulópontban. Ekkor ésszerű z_i-t valamennyire növelni; ha $\partial f/\partial z_i<0$, akkor az ellenkező igaz. Ugyanez az okoskodás érvényes minden koordinátára. Ezért egy ésszerű eljárás olyan új $z_1^1, \ldots, z_p^1$ pontot választana, amelyre teljesül, hogy

(4) $z_i^1-z_i^0$ előjele azonos $f_{z_i}(z_1^0, \ldots, z_p^0)$ előjelével, minden $i=1, \ldots, p$-re.

Ugyanez alkalmazható a $z_1^1, \ldots, z_p^1$ indulásra: Valóban, az ilyen ismétlés egy iterációs eljárás lényege. Ezért a t-edik lépésben

(5) $z_i^{t+1}-z_i^t$ előjele azonos $f_{z_i}(z_1^t, \ldots, z_p^t)$ előjelével, minden $i=1, \ldots, p$-re.

Az (5) által meghatározott módszer véges differenciákkal dolgozik. Matematikailag egyszerűbb azt feltenni, hogy a módosítás folytonosan történik, nem pedig szakaszosan, kis lépésekben, mint az (5)-ben. Ehhez $z_i^{t+1}-z_i^t$ véges differenciákat a megfelelő dz_i/dt deriváltakkal kell helyettesíteni, azaz az i-edik koordinátának a (számítási) idő szerinti változási sebességével. Az (5)-beli követelményt ekkor ezzel a feltétellel helyettesítjük:

(6) dz_i/dt előjele azonos $f_{z_i}(z_1, \ldots, z_p)$ előjelével.

Végül a legegyszerűbb mód a (6) biztosítására a következő követelmény[25]

$$dz_i/dt = k_i(\partial f/\partial z_i), \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{7}$$

ahol k_i egy pozitív állandó. A (7) reláció egy differenciaegyenlet-rendszert határoz meg; e rendszer megoldása mindegyik koordinátát mint az időfüggvényt határozza meg, és ez az igazodási folyamat egyik leírása. A (7)-re mint a *gradiens módszerre*[26] fogunk hivatkozni. A k_i állandó az *igazodási sebesség (adjusment speed)*.

Könnyű belátni, hogy az általánosság megsértése nélkül föltehetjük, hogy $k_i=1$, ehhez csak z_i mértékegységét kell megváltoztatni. Legyen ugyanis $z_i'=a_i z_i$, ekkor $dz_i'/dt=a_i dz_i/dt$, $\partial f/\partial z_i=(1/a_i)\partial f/\partial z_i$, így (7) a

$$dz_i'/dt = a_i^2 k_i(\partial f/\partial z_i').$$

összefüggésessé alakul. Választhatjuk a_i-t úgy, hogy $a_i^2 k_i=1$. Ebben az alakban — amellyel a továbbiakban leginkább foglalkozunk — a gradiens módszer a következő alakot ölti:

$$dz_i/dt = \partial f/\partial z_i. \tag{8}$$

Hogy ez a módszer elfogadható legyen, szükséges, hogy (8)-nak a megoldása konvergáljon a $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ maximumponthoz. Ha újból megnézzük az 1. ábrát intuitíve nyilvánvaló, hogy a (8) eljárás valóban $\bar{z}$-hoz konvergál; ugyanis ha z^0 indulópont $\bar{z}$ alatt van, a (8) szabály z növelésére szólít, egészen $\bar{z}$-ig, ahol a derivált nulla, de nem tovább. Általánosan a következő állítást mondhatjuk ki:

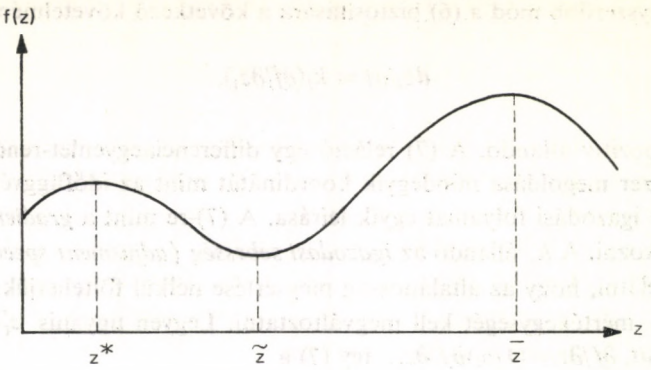
(9) Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ szigorúan konkáv függvény, akkor a (8) gradiens eljárás $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ maximumhelyhez konvergál. (Nem alapvető követelmény a szigorú konkávitás a konkávitás helyett, de a (9)-beli állítás egyébként sokkal bonyolultabb lenne.)

Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ nem konkáv, akkor előadódhatna a 2. ábra esete, ahol, ha z^0 indulópont z^* alatt vagy z^* és $\tilde{z}$ között van, akkor az eljárás a z^* lokális maximumhoz konvergál a globális maximum helyett.[27]

[25] $f_{z_i}(z_1, \ldots, z_p)$ és $\partial f/\partial z_i$ jelentése ugyanaz.

[26] Lásd *H. B. Curry:* The Method of Steepest Descent for Non-Linear Maximization Problems. Quarterly of Applied Maxthematics, Vol. 2 (1944) 258—261. old., amely a véges differencia módszerét tárgyalja; *C. H. Tompkins:* Methods of Steep Descent az *E. F. Beckenbach* (szerk.): Modern Mathematics for the Engineer c. könyvben a 18. fejezet (McGraw-Hill, New York, 1956.) 448—479. old. Rövid tárgyalását lásd még *Samuelson:* Foundation, 301—302. old. Pontosan szólva (7) csak egy speciális esete a gradiens módszernek (amelyet néha a legmeredekebb felhágás módszerének is neveznek), de mivel csak ezzel az esettel foglalkozunk, nem okoz zavart.

[27] A feltétel nélküli maximum megkeresésére szolgáló gradiens módszer általában olyan ponthoz konvergál, ahol minden derivált nulla.



2. ábra

4. A GRADIENS ELJÁRÁS EGY HATÁRESETE

Képzeljük azt, hogy a (7) egyenletben egyes k_i igazodási sebességek a végtelenhez közelednek. Ez ekvivalens azzal a kijelentéssel, hogy egyes változók, mondjuk $z_1, \ldots, z_r$ értékét azonnal olyan értékekre módosítjuk, amelyek maximalizálják f-et a megmaradó $z_{r+1}, \ldots, z_p$ adott értékeire. Ez értelmes lehet olyan helyzetekben, ahol az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény alakja olyan egyszerű a $z_1, \ldots, z_r$ változókban, hogy számítástechnikailag célszerű e változók szerinti maximumot valamilyen elég közvetlen módszerrel meghatározni. A többi változó, $z_{r+1}, \ldots, z_p$, a (7)-nek megfelelően változik, amely — a megfelelő mértékegység választásával — a (8) alakban írható, ahogy azt már bemutattuk. Az igazodási folyamat alakja ekkor

(10) adott $z_{r+1}, \ldots, z_p$-re válasszunk olyan $z_1, \ldots, z_r$-t, amelyre $f(z_1, \ldots, z_r, z_{r+1}, \ldots, z_p)$ maximális,

és

$$dz_i/dt = \partial f/\partial z_i \qquad (i = r+1, \ldots, p). \tag{11}$$

Mivel a $z_{r+1}, \ldots, z_p$ változók változnak ($z_1, \ldots, z_p$ maximumhely koordinátái általában szintén változnak,[28] azaz minden változó változik az eljárás során. Ha feltesszük, hogy az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény minden változójában konkáv, akkor szükségképpen konkáv $z_1, \ldots, z_r$-ben is, tehát (10) ekvivalens a

$$\partial f/\partial z_i = 0, \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{12}$$

összefüggéssel.

A (11) igazodási eljárás, párosítva akár a (10)-zel, akár a (12)-vel, nagyon ésszerűnek látszik, legalábbis akkor, ha a (12) számítástechnikailag jól megoldható. Az a fel-

[28] Azaz létezik egy $z_1 = z_1(z_{r+1}, \ldots, z_p), \ldots, z_r = z_r(z_{r+1}, \ldots, z_p)$ függvényrendszer, amellyel meghatározott $z_1, \ldots, z_r$ értékek kielégítik a (10)-et.

tevés, hogy egy dinamikus rendszerben egyes változók lassan módosulnak, míg más változók szinte azonnal alkalmazkodnak az előbbiekhez, nem ritka a közgazdaságtanban; később az erőforrások elosztásával összefüggésben közgazdasági magyarázatot is adunk erre.

Ennek az eljárásnak van egy nehézsége, amely bizonyos következményekkel jár az erőforrások optimális elosztásában szereplő igazodási folyamat szerkezetére. Lehetséges, hogy egyes $z_{r+1}, \ldots, z_p$ értékeknél az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvénynek nincs maximuma $z_1, \ldots, z_r$ szerint; azaz $f(z_1, \ldots, z_r, z_{r+1}, \ldots, z_p)$ korlátlanul nőhet, ha egy vagy több z_i $(i=1, \ldots, r)$ tart a végtelenhez. Ez még akkor is igaz, ha az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény szigorúan konkáv. Félreértés elkerülése érdekében legyenek, $z_{r+1}, \ldots, z_p$ értékei rendre $\bar{z}_{r+1}, \ldots, \bar{z}_p$[29], akkor az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény maximális, ha $z_i=\bar{z}_i$ $(i=1, \ldots, r)$, tehát a maximalizálási eljárás itt jól meghatározott. Ez a probléma általában nem lép fel, ha $z_{r+1}, \ldots, z_p$ eléggé közel vannak a $\bar{z}_{r+1}, \ldots, \bar{z}_p$ maximumhely koordinátáihoz, de egyébként felléphet.

Implicit módon azt is feltesszük, hogy ha van maximum, akkor csak egy maximum van.

E megszorítások mellett azonban a gradiens eljárás (11)-beli határesetének és akár a (10)-beli, akár a (12)-beli kiegészítésének ugyanazok a konvergenciatulajdonságai vannak, mint a (8) gradiens eljárásnak. A (9)-hez hasonlóan kimondhatjuk:

(13) Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ szigorúan konkáv, akkor a maximumhelyhez olyan közeli tartományban, amelyben a (12) egyenletrendszer megoldható, a (11) és a (12) összefüggések által meghatározott eljárás a $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ maximumhelyhez konvergál.

5. NEMNEGATÍV VÁLTOZÓK

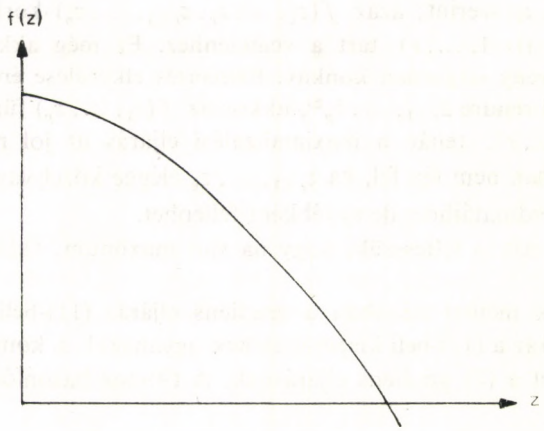
Az előzőekben feltettük, hogy a $z_1, \ldots, z_p$ változók értelmezési tartománya korlátlan (az egész valós egyenes). Azonban az I. fejezet *C)* pontjában már utaltunk arra, hogy erőforrás-elosztási feladatunkban elsősorban azt az esetet vizsgáljuk, amikor minden változónak nemnegatívnak kell lennie. Vegyük például a (3)-beli maximalizálást. Ha az x_j maximumhely pozitív, akkor a deriváltnak valóban nullának kell lennie. Tegyük fel azonban, hogy $\pi_j(x_j)$-nek nullában van a maximuma; azaz az eljárás bármilyen pozitív szintű működtetése kisebb profitot (vagy nagyobb veszteséget) ad, mint ha egyáltalán nem használnánk az eljárást. Ebből az következik, hogy a határnyereségesség nem lehet pozitív, de lehet negatív, mint azt a 3. ábra mutatja. Ugyanez a meggondolás érvényes több változó esetén.

Levonhatjuk a következtetést:

(14) $\bar{f}_{z_i} \leqq 0$ minden $i=1, \ldots, p$-re. Ha $\bar{f}_{z_i} < 0$ valamilyen i-re, akkor $\bar{z}_i=0$.

[29] Emlékeztetünk arra, hogy $\bar{z}=\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_r, \bar{z}_{r+1}, \ldots, \bar{z}_p$ az f függvény maximumhelye.

A (14) összefüggések általában csak szükséges feltételek egy lokális maximumra. Ha a szigorú egyenlőtlenség soha nem teljesül, akkor e pontban lokális minimum is lehet, mint azt az 1. alpontban láttuk. De még ha szigorú egyenlőtlenség áll is egyes változókra, de nem mindegyikre, akkor is előfordulhat, hogy a (14)-et kielégítő pont sem nem minimum, sem nem maximum. Végül, ha e pont lokális maximumhely, természetesen akkor sem szükségszerű, hogy egyben globális maximumhely is legyen.



3. ábra

Azonban a 2. alpontban láttuk, hogy a (14) összefüggések elégséges feltételt adnak globális maximumra, ha az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény konkáv, amint azt egy változó esetén az 1. és a 3. ábra mutatja.

A (8)-ban leírt gradiens folyamat szintén bizonyos módosításra szorul, ha nemnegatív változókkal foglalkozunk. Ha az eljárás valamelyik pontjában az egyik z_i változó nulla és ugyanitt $\partial f/\partial z_i < 0$, akkor az eredeti (8) gradiens eljárás szerint z_i-nek tovább kellene csökkennie. Ez azt jelenti, hogy z_i negatívvá válna, és ez értelmetlen olyankor, ha a változó szükségképpen nemnegatív. Ez történne például a 3. ábrán, ha az eljárás elérné $z=0$ pontot. Ennek elkerülése érdekében, ki kell egészíteni a (8)-at azzal a szabállyal, hogy ebben az esetben a változó maradjon nulla, azaz értéke ne változzék; $dz_i/dt=0$.

Ekkor a gradiens eljárás a következő alakot ölti:

$$dz_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z_i = 0 \text{ és } \partial f/\partial z_i < 0, \\ \partial f/\partial z_i & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{15}$$

Könnyű belátni, hogy (14) a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a (15) eljárás megálljon, azaz hogy dz_i/dt minden i-re nulla legyen. Más szavakkal: a $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ maximumhely az *egyensúlyi pontja* a (15) differenciálegyenlet-rendszernek.

A gradiens eljárás határeseténél a (14) alkalmazható $z_1, \ldots, z_r$ változókra, a (10) eljárást felhasználva nemnegatív változók esetére. Hasonlóan, a $z_{r+1}, \ldots, z_p$ változókra a (11)-et a (15) helyettesíti. Ekkor a módszer a következő alakot ölti:

$$\partial f/\partial z_i = 0;\ \partial f/\partial z_i < 0 \quad \text{csak akkor, ha} \quad z_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, r\text{-re}). \tag{16}$$

$$dz_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z_i = 0 \text{ és } \partial f/\partial z_i < 0 \\ \partial f/\partial z_i & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad (i = r+1, \ldots, p) \tag{17}$$

A gradiens módszer mindkét alakjában a konvergenciát ugyanazok a körülmények biztosítják, mint az előjel-korlátozás nélküli esetben.

Végül későbbi hivatkozás miatt megjegyezzük, hogy a minimalizáláshoz ugyanazokra a szabályokra van szükség, mint a maximalizálás esetében, az előjelek megfelelő módosításával. Így például a (14) helyett: $\bar{z}$ minimumhely, ha

$$\bar{f}_{z_i} \geqq 0 \quad i = 1, \ldots, p\text{-re}; \quad \text{ha} \quad \bar{f}_{z_i} > 0 \text{ adott } i\text{-re, akkor } \bar{z}_i = 0. \tag{18}$$

A (18) itt is a minimum szükséges feltétele; ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ konvex,[30] akkor elégséges feltétele is. A (15) gradiens módszer minimum esetén:

$$dz_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z_i = 0 \text{ és } \partial f/\partial z_i > 0 \\ -\partial f/\partial z_i & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{19}$$

B) Feltételes maximumok és nyeregpontok

A $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ vektor az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény

$$g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, s) \tag{20}$$

korlát melletti *feltételes maximumát* adja, ha $f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) \geqq f(z_1, \ldots, z_p)$ minden olyan $(z_1, \ldots, z_p)$ vektorra, amely kielégíti a (20)-at. Szorítkozhatunk itt is nemnegatív értékekre. Az I. fejezet *C)* pontjának erőforrás-elosztási feladata ilyen feltételes maximummal foglalkozik; ekkor a z_i-ket úgy kell értelmezni, hogy magukba foglalják az x-eket és az y-okat, $f(z_1, \ldots, z_p)$ pedig azonosítandó az $U(y_1, \ldots, y_n)$-nel (az a tény, hogy U nem függ mindegyik z-től, nem okoz semmilyen nehézséget sem), és

$$g_i(z_1, \ldots, z_p) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) + \xi_i - y_i & (i = 1, \ldots, n) \\ \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) + \xi_i & (i = n+1, \ldots, s). \end{cases} \tag{21}$$

Ha a (20) korlátokban egyenlőtlenségek helyett egyenlőségek szerepelnek, és a változók nincsenek a nemnegatív félegyenesre korlátozva, akkor a Lagrange-szorzók

[30] Egy *konvex* függvény olyan, amelynek negatívja konkáv; azaz f konvex, ha $-f$ konkáv.

klasszikus módszere szükséges feltételt ad egy feltételes maximumra. Tehát ahhoz, hogy $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_p$ maximalizálja $f(z_1, \ldots, z_p)$-t a $g_j(z_1, \ldots, z_p)=0$, $(j=1, \ldots, n)$ feltételek mellett, szükséges, hogy létezzék olyan $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$, amelyre teljesül:

$$\bar{f}_{z_j} + \sum_{j=1}^{s} \bar{p}_j \bar{g}_{j,z_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{22}$$

$$\bar{g}_j(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) = 0 \qquad (j = k, \ldots, s).$$

Itt $g_{j,z_i} = \partial g_j / \partial z_i$. Ezt a feltételt sokszor alkalmazták már a közgazdaságtanban.[31] Így például a fogyasztói viselkedés elmélete a (22)-nek egyik speciális alakját használja fel, ahol z_i-k a különböző vásárolt áruk mennyiségei, az $f(z_1, \ldots, z_p)$ az áruk adott halmazából származó hasznosság, és egyetlen egy feltétel van, a „költségvetési korlát". Ez a következő formába írható:

$$M - \sum_{i=1}^{p} q_i z_i = 0,$$

ahol q_i az i-edik áru ára, és M a teljes jövedelem. Ebben az esetben $g_{j,z_i} = -q_i$, a $\bar{p}_1$ Lagrange-szorzót mint a jövedelem határhasznosságát értelmezik.

A (22)-nek egy másik alkalmazása, amikor egynél több korlátozó feltétel szerepel, a jóléti gazdaságtan Langétól származó kifejtésében bukkan fel.[32]

A (22) egyenleteket érdekes formában írhatjuk fel, ha bevezetjük az *L Lagrange-függvényt*, amelynek definíciója:

$$L(z_1, \ldots, z_p, p_1, \ldots, p_s) = f(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{s} p_j g_j(z_1, \ldots, z_p). \tag{23}$$

Könnyű belátni, hogy

$$\partial L / \partial z_i = f_{z_i} + \sum_{j=1}^{s} p_j g_{j,z_i}, \quad \partial L / \partial p_j = g_j(z_1, \ldots, z_p). \tag{24}$$

A (24) értelmében a maximum szükséges feltételének, (22)-nek új alakja:

$$\bar{L}_{z_i} = 0, \quad \bar{L}_{p_j} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, p); \ (j = 1, \ldots, s). \tag{25}$$

Ez az alak nagyon sokatmondó. Ha például p_j-ket adott számoknak vesszük, minden j-re $p_j = \bar{p}_j$, akkor a (25) szerint a $\bar{z}_i$-k kielégítik a maximumnak, illetve a minimumnak legalább a szükséges feltételét. Mielőtt ezen a nyomon tovább mennénk, vizsgáljuk meg a feltételes maximumfeladatot abban a formában, ahogy először javasoltuk.

Kétféleképpen akarjuk a (25)-höz vezető problémánkat megváltoztatni: A z_i-k értelmezési tartománya legyen a nemnegatív félegyenes, a korlátozó feltételek pedig

[31] Lásd *R. G. Allen:* Mathematical Analysis for Economist. Macmillan, London, 1938. 364—383. old.; *Samuelson:* Foundation, 262—264. old.

[32] Lásd *O. Lange:* The Foundation of Welfare Economics. Econometrica, X. (1942) 215—228. old.

legyenek egyenlőtlenségek úgy, mint a (20)-ban voltak. Gondolatmenetünk Harold W. Kuhn és Albert W. Tucker[33] fontos tanulmányán alapszik. A (14)-hez hasonlóan megmutatható, hogy az a követelmény, hogy a z_i-k legyenek nemnegatívak, a (25) első felének következő módosítását igényli:

$$\bar{L}_{z_i} \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p); \text{ ha } \bar{L}_{z_i} < 0, \quad \text{akkor } \bar{z}_i = 0. \tag{26}$$

Ahhoz, hogy a feltételek egyenlőtlenségekként szerepeljenek, két módosításra van szükség. Először, feltételezzük, hogy valamilyen j-re $g_j(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) > 0$. Ekkor ez a korlátozó feltétel hatástalan abban az értelemben, hogy a z_i-k értékei lettek volna kismértékben módosíthatók anélkül, hogy megsértették volna a korlátozó feltételeket, de ezt nem volt érdemes megtenni. Mivel a feltételes maximumfeladat megoldása ugyanaz marad, ha elhagyjuk a hatástalan korlátozó feltételt a feladatból, azt várjuk (helyesen), hogy

$$\text{ha } g_j(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) > 0, \quad \text{akkor } \bar{p}_j = 0. \tag{27}$$

A második észrevétel az, hogy $\bar{p}_j$-nek nemnegatívnak kell lennie. Ez belátható, ha egyetlen korlátozó feltételt vizsgálva a feladatnak közgazdasági értelmezést adunk. Legyenek $z_1, \ldots, z_p$ valamilyen gazdasági változók (például a kibocsátások), $f(z_1, \ldots z_p)$ a hozam (hasznosságban vagy pénzben), és $g(z_1, \ldots, z_p)$ valamilyen erőforrás túlkínálata, azaz ennek az erőforrásnak kezdetben rendelkezésre álló mennyiségéből levonva a $z_1, \ldots, z_p$ változók választása esetén az igényelt mennyiséget. A $g(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ feltétel azt mondja ki, hogy nem lehet több erőforrást felhasználni, mint amennyi rendelkezésre áll. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden $\bar{z}_i$ pozitív, és azt, hogy a korlát hatásos; ekkor

$$\bar{f}_{z_i} + \bar{p}_i g_{z_i} = 0, \quad g(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) = 0. \tag{28}$$

Tekintsünk bármely olyan változást a z_i-kben, amely növeli az $f(z_1, \ldots, z_p)$ hozamot a $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p$ választáshoz tartozó hozamhoz képest. Például tegyük fel, hogy z_1 adott kicsiny növelése növeli $f(z_1, \ldots, z_p)$-t. Ekkor ezt a növelést ki kell zárni, mint meg nem engedett változtatást, amely megsérti a $g(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ feltételt. Ugyanis ha e növelés megengedett volna, akkor a $\bar{z}_i$-k nem adnának feltételes maximumot. Tehát z_1 ilyen növelése növeli $f(z_1, \ldots, z_p)$-t, de nulla alá kell hogy csökkentse $g(z_1, \ldots, z_p)$-t. Ez azt jelenti, hogy

$$\bar{f}_{z_1} > 0, \quad \bar{g}_{z_1} < 0. \tag{29}$$

A (28) első része értelmében ekkor $\bar{p} > 0$.

Gazdasági hasonlattal élve, képzeljük el azt, hogy ahelyett, hogy egy gazdasági egységnek előírnánk, hogy csak „megengedett" politikát folytathat, a z_j-ről minden

[33] Lásd *H. W. Kuhn—A. W. Tucker:* Nonlinear Programming. *J. Neyman* (szerk.): Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability c. kötetben, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1952. 481—492. old.

döntést szabaddá tennénk számára (akár megengedett, akár nem), de megkívánjuk, hogy p árat fizessen a korlátos erőforrás felhasznált mennyiségéért. Azt is megengedjük, hogy a korlátos erőforrás induló készletének bármely hányadát felhasználja, vagy p áron eladja. Ekkor az egység tiszta hozama $f(z_1, \ldots, z_p)+pg(z_1, \ldots, z_p)$ alakban képzelhető el, amely maga a Lagrange-függvény. Tehát állításunk szerint, p-t nemnegatív $\bar{p}$-nak választva, az egység kénytelen betartani a megengedettségi feltételeket.

Ha összekapcsoljuk a (26)-ot, a (27)-et és ezt a gondolatot, akkor a (20)-nak és a (24) második felének segítségével a következő — Kuhntól és Tuckertől származó — tételt kapjuk:

1. tétel. Annak szükséges feltétele, hogy $f(z_1, \ldots, z_p)$-nek $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p$ legyen a feltételes lokális maximuma a $g_j(z_1, \ldots z_p) \geqq 0$ $(j=1, \ldots, s)$ korlátozó feltételek mellett — és minden változó csak nemnegatív értékű lehet — a következő:

a) $\bar{z}_i \geqq 0$; $\bar{L}_{z_i} \leqq 0$; ha $\bar{L}_{z_i} < 0$, akkor $\bar{z}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$

b) $\bar{p}_j \geqq 0$; $\bar{L}_{p_j} \geqq 0$; ha $\bar{L}_{p_j} > 0$, akkor $\bar{p}_j = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$[34]

Megjegyzés. Hangsúlyozni kell, hogy az *1. tétel* csak *szükséges* feltételt ad egy *lokális* maximumra, hasonlóan a feltétel nélküli maximum már ismertetett esetéhez. Az (1) korlátozó feltétel szigorú egyenlőtlenségétől eltekintve, egy feltételes lokális minimum is kielégíti az *1. tételt*. Sőt, még ha figyelembe is vesszük az egyenlőtlenségeket, akkor is előfordulhat, hogy egy olyan pont, amelyik kielégíti *a)* és *b)* feltételeket, sem nem lokális minimumhely, sem nem lokális maximumhely. Továbbá, még ha van is lokális maximumunk, amely kielégíti az *1. tétel* feltételeit, általában nincs biztosíték arra, hogy ez egyben globális maximum is legyen.

Kiegészítő feltevésekre van szükség ahhoz, hogy az *1. tétel* feltételei biztosan a globális maximum elégséges feltételei legyenek. Figyelembe véve a feltétel nélküli maximumokra vonatkozó megfelelő eredményeket, azt találjuk, hogy az *a)* és *b)* feltételek a globális maximum elégséges feltételei lehetnek, ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ és mindegyik $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ $(j=1, \ldots, s)$ konkáv függvény.

Szorosan ide kapcsolódik az a probléma, amelyet az *1. tételhez* vezető gondolatmenetben a közgazdasági értelmezés sugallt, nevezetesen az, hogy lehetséges-e a gazdasági egységet úgy elképzelni, mintha az a Lagrange-függvényt *maximalizálná*, ahol p_j-k egyenlőek $\bar{p}_j$-kel, $(j=1, \ldots, s)$. Az *a)* feltétel azt mutatja, hogy a maximum *szükséges* feltételének teljesülnie kell [emlékezzünk a (14) feltételre]. Bizonyára

[34] Pontosabban szólva, ez a tétel csak akkor igaz, ha a feltételi függvények, $g_j(z_1, \ldots, z_p)$-k, kielégítenek egy kiegészítő regularitási feltételt, amelyet *Kuhn* és *Tucker* vezettek be (idézett mű: 483—484. old.). Egy egyszerű ilyen típusú feltétel (amelyet M. Slater használt egy publikálatlan tanulmányban) az, hogy létezzen olyan $(z_1, \ldots, z_p)$ vektor, amelyre $g_j(z_1, \ldots, z_p) > 0$ minden j-re. Közgazdasági nyelven ez azt jelenti, hogy a gazdasági változókat lehet úgy választani, hogy minden erőforrásból túlkínálat legyen.

nem mindig igaz, hogy a $\bar{z}_i$-k maximalizálják a Lagrange-függvényt adott $\bar{p}_j$ értékek esetén, közgazdasági nyelven szólva: nem mindig igaz, hogy a profitmaximalizálás optimális erőforrás-elosztást ad, még akkor sem, ha az erőforrások árait megfelelően állapítják meg.[35] De van az eseteknek egy fontos osztálya, amikor tényleg úgy gondolkodhatunk, hogy a Lagrange-függvényt kell maximalizálni a z_i-k szerint. Valóban, tudjuk a korábbi tárgyalásból (II. fejezet, *A)* pont, 2. alpont), hogy az *1. tétel a)* feltétele elegendő egy maximumhoz, ha a Lagrange-függvény konkáv függvénye a z_i-knek ($p_j=\bar{p}_j$ választásnál). Ez a feltétel akkor is teljesül, ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ és mindegyik $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ $(j=1, \ldots, s)$ konkáv függvény, mivel ekkor $L(z_1, \ldots, z_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ konkáv függvények nemnegatív együtthatójú kombinációja, és minden ilyen kombináció konkáv.

(30) Ha az $f(z_1, \ldots, z_p)$ és a $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ függvények konkávak, akkor $L(z_1, \ldots, z_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ felveszi maximumát a $z_i=\bar{z}_i$ $(i=1, \ldots, p)$ választásnál.

Figyelembe véve az *1. tétel a)* és *b)* feltétele közötti párhuzamot, természetes kérdés, hogy $\bar{p}_j$-k *minimalizálják*-e a Lagrange-függvényt, ha $z_i=\bar{z}_i$ minden i-re. Most ez nyilván igaz, mivel a Lagrange-függvény lineáris függvénye a $\bar{p}_j$ értékeknek, és minden lineáris függvény konvex (és egyszersmind konkáv), tehát eredményünk következik a (18)-ból.

(31) $L(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p, p_1, \ldots, p_s)$ felveszi minimumát a $p_j=\bar{p}_j$ $(j=1, \ldots, s)$ választás esetén.

A (30) és (31) állításból adódik a következő definíció, amelyet a változók két osztályától függő, de egyébként tetszőleges függvényre alkalmazhatunk. (A változókat itt nemnegatívoknak feltételezzük).

2. definíció. A $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ függvénynek *nyeregpontja* van $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$-ben, ha $\Phi(z_1, \ldots, z_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$-nek maximuma van $(z_1, \ldots, z_p)$ szerint $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$-ben, és $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; p_1, \ldots, p_s)$-nek minimuma van $(p_1, \ldots, p_s)$ szerint $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$-ben.

A nyeregpont fogalmát Neumann és Morgenstern használta a kétszemélyes nulla-összegű játékok elméletében.[36] A most adott definíció nem a lehető legáltalánosabb, de céljainkra elegendő. Hasznos olyan játékra gondolni, ahol az I. játékos p darab valós számot választ, $z_1, \ldots, z_p$-t; a II. játékos s darab valós számot választ, $p_1, \ldots, p_s$-t; a két választás egymástól függetlenül történik, és a II. játékos által az I. játékosnak fizetett összeget a $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ függvény határozza meg. (Negatív érték esetén az I. játékos fizet a II. játékosnak.) Világos, hogy az I. játékos a $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ függvényt az irányítása alatt álló $z_1, \ldots, z_p$ változók

[35] E nézet határozott kifejtését lásd *Samuelson:* Foundations. 230—231, 234—235. old.

[36] *J. Neumann—O. Morgenstern:* Theory of Games and Economic Behavior. 1. kiadás, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1944. 95. old.

szerint maximalizálni akarja a II. játékos tetszőleges adott választása mellett, míg a II. játékos saját változói szerint akar minimalizálni.

Ez a gondolat Kuhn és Tucker következő tételében foglalható össze:

2. tétel. Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ és $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ $(j=1, \ldots, s)$ a nemnegatív $z_1, \ldots, z_p$ változók konkáv függvényei, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ maximalizálja $f(z_1, \ldots, z_p)$-t a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ $(j=1, \ldots, s)$ korlátozó feltételek mellett az, hogy létezzenek olyan $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$ számok, amelyre az $L(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s) = f(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{s} p_j g_j(z_1, \ldots, z_p)$ Lagrange-függvénynek $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ nyeregpontja, ahol minden változó nemnegatívnak tekintendő.[37, 38]

A *2. tétel*nek — mint az erőforrások optimális elosztása egyik jellemzésének — figyelemre méltó közgazdasági érdekessége van statikus szempontból. Most azonban jobban érdekel bennünket az, hogy a tételnek milyen következményei vannak egy fokozatos közelítésen alapuló eljárás esetén. A nyeregpontfeladatban a változók nincsenek korlátozva, (kivéve a nemnegativitási feltételeket), ezért lehetségesnek tűnik a gradiens eljárás alkalmazása. Ekkor a nyeregpont- és a feltételes maximumfeladatok ekvivalenciája lehetővé teszi, hogy az adódó eljárást alkalmazzuk az utóbbi feladatra.

C) Lokális nyeregpontfeltételek feltételes maximumokra

Mielőtt a nyeregpontra használatos gradiens módszert tárgyalnánk, bemutatunk néhány — a *2. tétel*lel analóg — lokális tételt. Ha a konkávitási feltételek nem teljesülnek, nem valószínű, hogy léteznek egyszerű feltételek a globális maximum jellemzésére, illetve annak egy lokális maximumtól való megkülönböztetésére. Azonban érdemes lenne szükséges és elégséges feltételt találni a lokális maximumra. Az *1. tétel* nem tesz eleget e követelménynek; csak szükséges feltételeket ad.

A *2. tétel* azt sugallja, hogy egy feltételes lokális maximum talán egy Lagrange-függvény lokális nyeregpontjával jellemezhető. Ez nem igaz, ha a Lagrange-függvényt korábbi formájában használjuk; de igaz az eredeti Lagrange-függvény módosításaira, amelyekből kettőt mutatunk be. Először egy példa segítségével mutatjuk meg, hogy általában egy lokális feltételes maximum nem nyeregpontja a Lagrange-függvénynek.

[37] E tétel ismét csak akkor igaz, ha a korlátozó feltételek regulárisak, lásd a 34. lábjegyzetet.

[38] A nyeregpontok és a feltételes maximumok közötti ekvivalencia viszonyt többen vizsgálták. Lásd *D. Gale—H. W. Kuhn—A. W. Tucker:* Linear Programming and the Theory of Games Activity Analysis c. kötet XIX. fejezet 317—320. old. és *G. B. Dantzig:* A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem. Uo. XX. fejezet 330—335. old. A szövegünkben ismertetett Kuhn—Tucker-tétel némileg eltérő formában mutatja be a szélsőértékek e két típusának viszonyát, és kiterjeszti a tételt a nemlineáris maximalizálandó függvényre és korlátozó feltételekre.

Legyen a maximalizálandó függvény $f(z_1, z_2)=z_1^2+z_2^2$, és legyen a feltétel $g(z_1, z_2)=1-z_1-z_2\geqq 0$. Könnyű belátni, hogy nemnegatív változók esetén két maximumhely van: a (0, 1) és a (1, 0). Tekintsük a másodikat. A Lagrange-függvény

$$L(z_1, z_2; p) = z_1^2+z_2^2+p(1-z_1-z_2). \tag{32}$$

Az *1. tétel* szerint a maximumnál $\bar{L}_{z_i}=0$ (mivel $\bar{z}_1=1>0$), azaz $\bar{p}=2$. Ha az optimális megoldás lokális nyeregpont volna, az (1, 0) pont lokális maximuma volna az

$$L(z_1, z_2; \bar{p}) = z_1^2+z_2^2+2(1-z_1-z_2) = (z_1-1)^2+(z_2-1)^2. \tag{33}$$

függvénynek. De világos, hogy z_1 bármilyen változtatása növelné a (33)-at, tehát e pont nem lehet a (33) lokális maximuma, következésképpen nem lehet lokális nyeregpont.

Most tehát az a célunk, hogy a Lagrange-függvénynek olyan módosítását keressük meg, amelyben a feltételes maximum nyeregpontnak felel meg. Először megjegyezzük, hogy semmiféle nehézség nem lép fel a *2. definíció* minimalizálási részére vonatkozóan, amint ezt már a (31) egyenletnél láttuk, azaz $\bar{p}_j$-k minimalizálják az $L(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; p_1, \ldots, p_s)$ Lagrange-függvényt $p_1, \ldots, p_s$ szerint — függetlenül az $f(z_1, \ldots, z_p)$ és a $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ függvényekről tett feltevésektől. Ugyanis a Lagrange-függvény lineáris a p_j-k szerint. Ezért az a törekvésünk, hogy úgy módosítsuk a Lagrange-függvényt, hogy az lokálisan konkáv legyen z_i-k szerint, ha a p_j-k egyensúlyi értéküket veszik fel. Pontosabban, lokálisan *szigorúan* konkáv Lagrange-függvényeket óhajtunk z_i-k szerint: a szigorú konkávitás lényeges lesz a gradiens módszernek a következő pontban tárgyalandó alkalmazásaiban. Az így módosított Lagrange-függvényekre — amelyek a kívánt konkávitási tulajdonságokkal rendelkeznek — „*konkávizált Lagrange-függvények*" elnevezéssel fogunk hivatkozni.

A Lagrange-függvények konkávizálására vonatkozó első módszerünk azon az észrevételen alapul, hogy adott maximalizálási feladatban a korlátozó feltételek különböző módon írhatók le. Ez hasonló a fogyasztói kereslet elméletének ahhoz a jól ismert állításához, hogy a hasznossági függvény monoton transzformációi változatlanul hagyják a keresletet; mivel a változóknak az az együttese, amely maximalizál egy függvényt, maximalizálja annak minden növekvő függvényét is. Ugyanígy, lehetséges a korlátozó feltételeket úgy transzformálni, hogy az őket kielégítő változók halmaza ne változzék. Legyen $\varrho_j(u_j)$ tetszőleges egyváltozós (valós értékű) függvény, amely előjeltartó, azaz $\varrho_j(u_j)$ attól függően pozitív, negatív vagy nulla, hogy u_j pozitív, negatív vagy nulla. Legyen maximalizálási feladatunkban az egyik feltétel $g_j(z_1, \ldots, z_p)=0$. Definiáljuk $z_1, \ldots, z_p$ változóknak egy új függvényét:

$$g_j^*(z_1, \ldots, z_p/\varrho_j) = \varrho_j[g_j(z_1, \ldots, z_p)]. \tag{34}$$

Más szavakkal: a z_i változók bármely adott értékegyütteséhez tartozó g_j^* értékét úgy kapjuk meg, hogy először kiszámítjuk a $g_j(z_1, \ldots, z_p)$-t, majd kiszámítjuk $\varrho_j(u_j)$ értékét, ahol u_j-t $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ adja. Mivel $\varrho_j(u_j)$ előjeltartó, a (34)-ből következik,

hogy

(35) $g_j^*(z_1, \ldots, z_p/\varrho_j) \geqq 0$ akkor és csak akkor, ha $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$.

Ekkor a transzformáció változatlanul hagyja a korlátozó feltételeket. Ugyanis bármely előjeltartó $\varrho_j(u_j)$ függvény esetében a $(z_1, \ldots, z_p)$ vektor bármely értéke, amely kielégíti az erdeti $g_j(z_1, \ldots, z_p)=0$ feltételt, kielégíti a transzformált $g_j^*(z_1, \ldots, z_p/\varrho_j)=0$ feltételt is, és fordítva. Tehát speciálisan az a $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ vektor, amely maximalizálja $f(z_1, \ldots, z_p)$-t ez eredeti korlátozó feltételek mellett, ugyanaz, mint amely maximalizálja e függvényt a transzformált korlátozó feltételek mellett. A transzformált feladatban a Lagrange-függvény a következő alakot ölti:

$$(36) \qquad L^*(z_1, \ldots, z_p;\ p_1, \ldots, p_s/\varrho) = f(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{s} p_j g_j^*(z_1, \ldots, z_p/\varrho_j).$$

Az *1. tétel* szükséges feltétele szükségképpen fennáll a korlátozó feltételek transzformálásával keletkező minden Lagrange-függvényre.

Ezért a konkávizálás kérdése a következő lesz: Válasszunk a transzformált Lagrange-függvények közül a Lagrange-függvényeknek egy olyan osztályát, amelyben a konkávitási tulajdonság teljesül. Azonban olyan osztályt akarunk, amelyet a feladat megoldása előtt meglehetősen tágan lehet meghatározni. Semmi haszna annak, ha csupán megmutatjuk a $\varrho_j(u_j)$ függvények olyan osztályának a létezését, amelyben a (36) Lagrange-függvény lokálisan szigorúan konkáv z_i-k szerint, ha $p_j=\bar{p}_j$ minden j-re, ha ennek az osztálynak a meghatározása éppoly nehéz, mint az eredeti maximalizálási feladaté. Szerencsére lehetséges a $\varrho_j(u_j)$ transzformációs függvények egy egész osztályának specifikálása, mindössze a szóban forgó függvények nagyon általános ismeretére támaszkodva.

Az eredményt egy igen speciális típusú transzformációs függvényen mutatjuk be. Jegyezzük meg, hogy $\varrho_j(u_j)$ szükségképpen nő a nulla pontban, mivel pozitív, ha u_j pozitív; és negatív, ha u_j negatív. Tekintsük a következő függvényosztályt:

$$(37) \qquad \varrho_j(u_j) = 1-(1-u_j)^{1+\eta_j}.$$

egy η_j páros természetes számmal, amely rendelkezik e tulajdonsággal. Bebizonyítható a következő tétel:

3. tétel: Bizonyos regularitási feltételek mellett, minden megfelelően nagy η_j páros számra $(j=1, \ldots, s)$, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ lokális maximuma legyen $f(z_1, \ldots, z_p)$-nek a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ feltételek mellett az, hogy létezzenek olyan $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$ számok, amelyre a

$$L^*(z_1, \ldots, z_p;\ p_1, \ldots, p_s/\eta) = f(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{s} p_j(1-[1-g_j(z_1, \ldots, z_p)]^{1+\eta_j})$$

Lagrange-függvénynek $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ lokális nyeregpontja, minden változót nemnegatívnak tekintve. Speciálisan az $L^*(z_1, \ldots, z_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ függvény lokálisan konkáv $z_1, \ldots, z_p$ szerint.[39]

Vegyük észre, hogy a transzformációt elég széles osztályból választhatjuk, mivel minden elég nagy η_j $(j=1, \ldots, s)$ megfelel. A (37) transzformációs függvény speciális választása nem fontos; az alapvető követelmény az az, hogy a

$$\varrho_j''(0)/\varrho_j'(0)$$

hányados elég nagy legyen. Másik példa: $\varrho_j(u_j)=1-e^{-\eta_j u_j}$

A *3. tétel* Lagrange-függvényére a *„konkávizált Lagrange-függvény transzformált korlátozó feltételekkel"* elnevezéssel hivatkozunk a továbbiakban. Valóban ez a függvény egy közönséges Lagrange-függvény, amelyet olyan feladatban alkalmazunk, amely azonos az eredetivel, de a feltételek más formában szerepelnek.

Végül megjegyezzük, hogy a konkávizálás e módszere alkalmazható abban az esetben is, ha az $f(z_1, \ldots, z_p)$ maximalizálandó függvény és a $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ feltételfüggvények lineárisak. Ebben az esetben a *2. tétel* alkalmazható, de a Lagrange-függvény a z_i-k szerint lineáris, tehát nem szigorúan konkáv. Az utóbbi tulajdonságról már megjegyeztük, hogy a gradiens módszer — a következő pontban tárgyalandó — alkalmazásainál kívánatos. Azoknak a transzformációs függvényeknek az osztálya, amelyek a Lagrange-függvény szigorú konkávitásához valami nagyon hasonló dolgot biztosítanak, valóban nagyon széles, beleértve minden szigorúan növekvő szigorúan konkáv függvényt. Ezt a módszert az erőforrás-elosztási feladat lineáris esetére a IV. fejezet *G)* pontjában alkalmazzuk majd.

Most rátérünk a Lagrange-függvények konkávizálásának egy alternatív módszerére, amely egy Debreu-től származó lemmán alapul.[40] Ebben az esetben a Lagrange-függvényt módosítjuk azzal, hogy kivonjuk a korlátozó feltételek kvadratikus függvényét. Ezért *„kvadratikusan módosított konkávizált Lagrange-függvény"* elnevezéssel hivatkozunk rá a továbbiakban. Először azt az esetet vizsgáljuk, ahol egyenlőtlenségek helyett egyenlőségek szerepelnek a korlátozó feltételekben, azaz a feladat a következő: maximalizáljuk $f(z_1, \ldots, z_p)$-t a $g_j(z_1, \ldots, z_p)=0$ korlátozó feltételek mellett. Ekkor a kifejezés

$$(38) \qquad L^+(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s/\lambda) = f(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{s} p_j g_j(z_1, \ldots, z_p) -$$

$$-\lambda \sum_{j=1}^{s} [g_j(z_1, \ldots, z_p)]^2,$$

[39] A bizonyítást és a regularitási feltételek részletesebb kimondását lásd *K. Arrow—L. Hurwicz:* Reduction of Constrained Maxima to Saddle-point Problems. *Neymann* (szerk.): Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability c. kötetben, University of California Press, Berkeley—Los Angeles, 1957. V. 1—20. old.

[40] *G. Debreu:* Definite and Semidefinite Quadratic Forms. Econometrica, Vol. 20. 1952. 296. old.

amely csak az utolsó tagjában tér el a szokásos Lagrange-függvénytől. Könnyű belátni, hogy a feltételes maximum elsőrendű feltételei a kvadratikusan módosított Lagrange-függvényre ugyanazok, mint a szokásos Lagrange-függvényre. De az is igazolható, hogy[41]

(39) $L^+(z_1, \ldots, z_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s/\lambda)$ lokálisan szigorúan konkáv $z_1, \ldots, z_p$ szerint, ha λ elég nagy.

Abban az esetben, amikor a korlátozó feltételek egyenlőtlenségek, a következő módon járhatunk el. Vezessünk be új nemnegatív változókat, $w_1, \ldots, w_s$-et, és figyeljük meg, hogy a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ feltétel ekvivalens a $g_j(z_1, \ldots, z_p) - w_j = 0$ feltétellel. Most a korlátozó feltételek egyenlőség formájában írhatók, alkalmazhatjuk a (39)-et, hozzátéve, hogy a maximalizálásban szereplő változók halmaza az új w_j-kel bővült.

4. tétel. Bizonyos regularitási feltételek mellett, minden elég nagy λ-ra, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p$ lokális maximuma legyen $f(z_1, \ldots, z_p)$-nek a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ korlátozó feltételek mellett az, hogy létezzenek olyan $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$ és $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_s$ számok (az utóbbiak minden λ-ra ugyanazok), amelyekre az

$$L^+(z_1, \ldots, z_p; w_1, \ldots, w_s; p_1, \ldots, p_s/\lambda) =$$

$$= L(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s) - \sum_{j=1}^{s} p_j w_j - \lambda \sum_{j=1}^{s} [g_j(z_1, \ldots, z_p) - w_j)]^2$$

kvadratikusan módosított Lagrange-függvénynek $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_s, \ldots, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ lokális nyeregpontja, minden változót nemnegatívnak tekintve. Speciálisan az $L^+(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_s; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s/\lambda)$ függvény lokálisan szigorúan konkáv $z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_s$ szerint.

Megjegyzés. Ha a korlátozó feltételek egyenlőségek, akkor a $\bar{p}_j$ egyensúlyi Lagrange-szorzók lehetnek pozitívak és negatívak, és a $g_j(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s) = 0$ feltétel ugyanaz, mint az $L_p = 0$ feltétel. Mivel a Lagrange-függvény lineáris a p_j-kben, ez azt jelenti, hogy a z_i-k egyensúlyi értékére a függvény állandó a p_j-k szerint. Speciálisan, azt mondhatjuk, hogy a p_j-k szerinti minimumát akkor veszi föl, ha $p_j = \bar{p}_j$; itt a p_j-k értelmezési tartománya nincs előjelben korlátozva. Ugyanez az állítás igaz a kvadratikusan módosított Lagrange-függvényre is, mivel a p_j-k nem szerepelnek a kiegészítő kvadratikus tagban. Következésképpen a *4. tétel* nyeregpont-

[41] Lásd *K. J. Arrow—R. M. Solow:* The Gradient Method for Constrained Maxima Under Weakened Conditions. *K. J. Arrow—L. Hurwicz—H. Uzawa:* Studies in Linear and Nonlinear Programming c. kötetben Stanford University Press, Stanford, California, 1958. X. fejezet, különösen a 4. szakasz. Az eredmény lényegében Debreu lemmájának kiterjesztése nemnegatív változókra.

kijelentésében nyugodtan eltekinthetünk a p_j-k nemnegativitási feltételétől. Bizonyítható, azonban, hogy az itt használt speciális alakú korlátozó feltételek esetén, ahol a w_j maradékváltozók transzformálják az egyenlőtlenségeket egyenlőségekké, egy nemnegatív p_j-kre adódó nyeregpont egyben tetszőleges p_j-k esetén is nyeregpont.

D) A gradiens módszer nyeregpontokra

Képzeljük azt, hogy egy nyeregponttal rendelkező játékot gyakran — valójában folytonosan — játszanak. Minden egyes kísérlet esetén az I. játékos tudja, hogy a II. játékos mit választott az előző időpontban. Tegyük fel, hogy az I. játékos feltételezi, hogy a II. játékos ugyanazokat a $p_1, \ldots, p_s$ értékeket választja most is, mint előzőleg. Ekkor saját szempontjából a feladat feltétel nélküli maximalizálás. Azt gondolhatjuk, hogy egy gradiens eljárást indít e maximum elérésére, azaz viselkedését a (15) írja le a $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ függvényre alkalmazva, és a $p_1, \ldots, p_s$ változókat adottnak tekintve. Ezért

$$dz_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } z_i = 0 \text{ és } \partial\Phi/\partial z_i < 0 \\ \partial\Phi/\partial z_i & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{40}$$

Ténylegesen azonban a p_j-k is változnak. Ha a II. játékos ugyanolyan gondolatmenetet követ, mint az I. játékos, akkor a fizetési függvényt $p_1, \ldots, p_s$ szerint kívánja minimalizálni, $z_1, \ldots, z_p$-t adottnak tekintve. A (19) egyenlet alkalmazható itt:

$$dp_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } p_j = 0 \text{ és } \partial\Phi/\partial p_j > 0, \\ -\partial\Phi/\partial p_j & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{41}$$

Szeretnénk konvergenciafeltételt adni a (40) és (41) által meghatározott gradiens eljárásra. Nem alkalmazhatjuk egyszerűen azokat a korábbi állításainkat, amelyek a feltétel nélküli maximumnál használt gradiens eljárás konvergenciájára vonatkoztak. Valóban, ha $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ szigorúan konkáv a $z_1, \ldots, z_p$ változók szerint, $p_1, \ldots, p_s$-et adottnak véve, akkor a (40) eljárás konvergálna, ha p_j-k állandóak maradnának. De az utóbbi változók valójában egyidejűleg változnak — a (41) eredményeképp. Gondolhatunk például egy légelhárító ágyúra, amely egy repülőgépre lő. Minden egyes lövés után a tüzér úgy mozgathatja az ágyúját —, hogy kijavítsa a megfigyelt hibát, de közben a repülőgép elmozdul előző helyéről, méghozzá olyan módon, hogy a hibát olyan naggyá tegye, amilyenné csak lehetséges. A feladat bonyolultsága ellenére igazolható a következő eredmény:

(42) Ha $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ *szigorúan* konkáv $z_1, \ldots, z_p$ szerint minden $p_1, \ldots, p_s$ választásra, és konvex $p_1, \ldots, p_s$ szerint minden $z_1, \ldots, z_p$ választásra,

akkor a (40) és a (41) által leírt gradiens eljárás konvergál $\Phi(z_1, \ldots, z_r; p_1, \ldots, p_s)$ valamelyik $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_r; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ nyeregpontjához.[42, 43]

Az, hogy valamivel erősebb feltételek szükségesek a gradiens módszer konvergenciájához, mint a *2. tétel* egyszerű konkávitási feltétele, a következő példából látható[44]:

Tegyük fel, hogy csak egy z és csak egy p van, és

$$\Phi(z; p) = z+p-pz.$$

Könnyen igazolható, hogy egy és csak egy nyeregpont létezik: $z=1$, $p=1$. Ha egyelőre figyelmen kívül hagyjuk a nemnegativitási feltételeket, a gradiens módszer a

$$dz/dt = 1-p, \quad dp/dt = z-1$$

alakot ölti. E differenciálegyenlet-rendszer megoldása a

$$z = 1+(z_0-1)\cos t+(1-p_0)\sin t; \quad p = 1+(p_0-1)\cos t+(z_0-1)\sin t,$$

ahol (z_0, p_0) az igazodási pálya kezdőpontja. Könnyű belátni, hogy ha z_0 és p_0 elég közel vannak 1-hez, a megoldás sohasem válik negatívvá, tehát a fentiek tényleg megoldását adják a (40)—(41) gradiens módszernek, nemnegativitási feltételek mellett. Az is világos, hogy a megoldás periódikus, tehát soha nem konvergál a nyeregponthoz. Ehelyett vég nélkül ciklust ír le, sem nem divergál robbanásszerűen, sem nem konvergál.[45]

[42] A (42) feltevés azt biztosítja, hogy létezik egy nyeregpont, és a z vektor egyértelműen meghatározott; azonban lehetséges, hogy több p vektor van.

[43] Azt a tényt, hogy a z vektor konvergál valamilyen $\bar{z}$ nyeregponthoz, a szerzők lokális feltevések és eredmények mellett korábban bebizonyították. Lásd *K. J. Arrow—L. Hurwicz:* The Gradient Method for Concave Programming I: Local Results, *Arrow, Hurwicz* és *Uzawa:* idézett műben, 6. fejezet. A megfelelő globális tételt *Uzawa* igazolta a The Gradient Method for Concave Programming II: Global Results. uo. 7. fejezet. A p vektor konvergenciájának bemutatását lásd *K. J. Arrow* és *L. Hurwicz:* The Gradient Method for Concave Programming III: Further Global Results with Application to Resource Allocation, uo. 8. fejezet, amelyre a továbbiakban mint „Gradient Method for Resource Allocation" hivatkozunk, lásd az 1. fejezetet. A gradiens módszernek feltételesen maximumokra és nyeregpontokra történő alkalmazásának egy korábbi kifejtését lásd *K. J. Arrow* és *L. Hurwicz:* Gradient Method for Constrained Maxima, Operations Research, Vol. 5 (1957) 258—265. old.

[44] Samuelson vette észre, hogy a gradiens módszer a lineáris esetben nem konvergál; lásd a 23. lábjegyzetet.

[45] Ez a tény volt az egyik oka a módosított Lagrange-függvények iránti érdeklődésnek, ahol a végtelen ciklizálás helyett konvergencia érhető el.

E) A gradiens módszer feltételes maximumokra

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy összekapcsolhatjuk a *B)* és a *D)* pont eredményeit. A *B)* pontban azt mondtuk, hogy a feltételes maximumfeladat ekvivalens egy megfelelő nyeregpontfeladattal. A *D)* pontban megjegyezzük, hogy bizonyos feltételek mellett egy nyeregpont gradiens eljárással meghatározható. Mindössze a (42)-t kell alkalmaznunk a *2. tétel* Lagrange-függvényére.

Először azt nézzük meg, mikor teljesülnek a (42) feltételei egy Lagrange-függvényre. Az $L(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ Lagrange-függvény lineáris $p_1, \ldots, p_s$ szerint minden $z_1, \ldots, z_p$-nél, következésképp konvex. Tegyük fel, hogy $f(z_1, \ldots, z_p)$ szigorúan konkáv és mindegyik g_j konkáv. Ekkor minden adott nemnegatív $p_1, \ldots, p_s$-re a Lagrange-függvény konkáv függvények összege, amelyek közül az egyik szigorúan konkáv, tehát a Lagrange-függvény is szigorúan konkáv. Tehát a Lagrange-függvény kielégíti a (42) feltételeit, ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ szigorúan konkáv és $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ konkáv minden j-re. A gradiens módszer leírásához a (40)-ben és a (41)-ben $\Phi(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ helyére az $L(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s)$ Lagrange-függvényt kell beírni. Ekkor kimondhatjuk a következő tételt.

5. tétel. Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ szigorúan konkáv és $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ konkáv minden j-re, akkor a következő gradiens eljárás:

$$dz_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z_i = 0 \text{ és } f_{z_i} + \sum_{j=1}^{s} p_j g_{j,z_i} < 0, \\ f_{z_i} + \sum_{j=1}^{s} p_j g_{j,z_i} & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{43}$$

$$dp_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad p_j = 0 \text{ és } g_j(z_1, \ldots, z_p) > 0, \\ -g_j(z_1, \ldots, z_p) & \text{egyébként;} \end{cases} \tag{44}$$

konvergál egy $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ határértékhez, ahol $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény egyetlen feltételes maximuma a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ feltételek mellett, ahol z_j-k nemnegatívak.

Az *5. tétel* gradiens módszere közgazdaságilag a *B)* pontban található gondolatmenet szerint értelmezhető. Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$-t hasznossági függvénynek tekintjük, amely bizonyos változók $z_1, \ldots, z_p$ értékénél adódik, és a $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ a j-edik erőforrás túlkínálata, akkor p_j a j-edik erőforrás árának tekinthető. Mivel g_{j,z_i} a túlkínálat növekedése (a túlkereslet csökkenése) z_i egységnyi növelése esetén, a

$$-\sum_{j=1}^{s} p_j g_{j,z_i}$$

kifejezés mint a z_i egységnyi növelésének tulajdonítható határköltség értelmezhető. Így az

$$f_{z_i} + \sum_{j=1}^{s} p_j g_{j,z_i}$$

kifejezés mint a z_i egységnyi növelésének tulajdonítható különbség értelmezhető a határhasznosság és a határköltség között. Így a (43) a z_i növelésére utasít, ha a határhasznosság meghaladja a határköltséget, és csökkentésére utasít egyébként; azzal a megkötéssel, hogy a z_i tevékenységi szint nem csökkenhet nulla alá. A (44) egyenlet még egyszerűbben értelmezhető: növeljük az árat, ha a túlkínálat negatív (azaz ha a kereslet felülmúlja a kínálatot) és csökkentsük egyébként, de nulla alá ne. Tételünk ekkor azt mondja ki, hogy az imént leírt eljárás olyan tevékenységi szintekhez konvergál, amelyek a legmagasabb hasznosságot adják, azzal a feltétellel, hogy a kereslet semelyik árunál nem haladja meg a kínálatot. Az eljárás a megfelelő egyensúlyi árakat is meghatározza.

Az *5. tétel* jelenlegi alakjában nem alkalmazható az I. fejezet *C)* pontjában szereplő erőforrás-elosztási modellre, még a legerősebb ésszerű konkávitási feltevések esetén sem. Némileg erősebb tételek szerepelnek a III. fejezet *D)* pontjában.

A (42)-ben szereplő állítás lokálisan alkalmazható a *C)* pontban bevezetett konkávizált Lagrange-függvényekre. A *3.* és a *4. tétel* ekkor rendre a következő eredményt szolgáltatja:

6. tétel. Ha $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvénynek lokális maximuma a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ korlátozó feltételek mellett, és bizonyos regularitási feltételek teljesülnek, akkor a transzformált korlátozó feltételekkel konkávizált $L^*(z_1, \ldots, z_p; p_1, \ldots, p_s/\eta)$ Lagrange-függvényre alkalmazott gradiens eljárás — elég nagy η_j-k esetén — egy $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ nyeregponthoz konvergál, ha a kezdő közelítés elég jó.

7. tétel. Ha $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p$ az $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvénynek lokális maximuma a $g_j(z_1, \ldots, z_p) \geqq 0$ korlátozó feltételek mellett, és bizonyos regularitási feltételek teljesülnek, akkor a kvadratikusan módosított konkávizált $L^+(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_s; p_1, \ldots, p_s/\lambda)$ Lagrange-függvényre alkalmazott gradiens eljárás — elég nagy λ esetén — konvergál egy $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_s, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ nyeregponthoz, ha a kezdő közelítés elég jó.

F) Az árigazodás módszere

Az *A)* pont 4. alpontjához hasonlóan szemügyre vehetjük az előző szakasz gradiens eljárásának egy olyan módosítását, amelyben bizonyos változókról feltételezzük, hogy végtelen gyorsan igazodnak, vagy más szavakkal élve: az igazodási eljárás minden pontján optimális helyzetet foglalnak el, a többi változók adott értékét

tekintve. A (43)—(44) által leírt gradiens módszert most úgy vizsgáljuk, hogy a z_i-kről tesszük fel, hogy maximalizálják a Lagrange-függvényt, a p_j-k bármely adott értéke mellett, míg a p_j-k továbbra is (44) szerint igazodnak. Képletben a (43) helyére a következő lép:

(45) Adott $p_1, \ldots, p_s$-re maximalizálandó $f(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{s} p_j g_j(z_1, \ldots, z_p)$,

$(z_1, \ldots, z_p)$, szerint.

A (44) és a (45) együtt egy dinamikus rendszert képeznek. Ez a rendszer közelebb áll a kereslet és kínálat szokásos modelljéhez, mint az előző pontban szereplő. A most vizsgált rendszerben — minden adott árvektor esetén — meghatározzák az optimális tevékenységi szinteket. Ezek sorban megállapítják minden áru keresletét és kínálatát, majd az árak a kereslet és a kínálat különbsége által meghatározott irányban mozognak. Az előző pontban szereplő rendszer tevékenységi szintjei nem voltak optimálisak, csak úgy változtak, hogy növeljék a hasznosság és a költségek különbségét.

Mint az *A)* pont 4. alpontjában megjegyeztük, minden olyan rendszerben, amely bizonyos változók azonnali optimalizálásán alapul, fennáll az a kockázat, hogy e rendszer határozatlanná válik. Az igazodási eljárás bármely olyan pontján — ahol az árak még különböznek az egyensúlyi áraktól — egyes optimális tevékenységi szintek végtelenek lehetnek. Ezzel a megszorítással azonban a (44) és a (45) által meghatározott *árigazodási eljárás* kielégítően konvergál.

8. tétel. Ha $f(z_1, \ldots, z_p)$ szigorúan konkáv és $g_j(z_1, \ldots, z_p)$ minden j-re konkáv, akkor a (44) és a (45) által meghatározott árigazodási eljárás konvergens az egyensúlyhoz eléggé közel fekvő olyan tartományban, ahol a (45) mindig jól definiált.

III. A TERMÉSZETES PIACI MECHANIZMUS ÉRVÉNYESSÉGÉT BIZTOSÍTÓ FELTÉTELEK

Ebben a fejezetben olyan feltevéseket teszünk az I. fejezet *C)* pontjának erőforrás-elosztási modelljéről, amelyek teljesülése esetén a II. fejezet 2., 5., és 8. *tétel*eiben adott globális statikus és dinamikus optimumjellemzések közvetlen módon alkalmazhatók. A kapott ismérvek természetes közgazdasági értelmezést tesznek lehetővé. Statikus jellemzés esetén a függvények konkávitását kell feltételezni, az optimumhoz konvergáló dinamikus eljárások meghatározásához valamivel erősebb feltételek szükségesek.

A) Az optimális elosztás statikus jellemzése

Először a következő két feltevést tesszük az I. fejezet *C)* pontjának erőforrás-elosztási modelljében szereplő hasznossági függvényre, illetve az erőforrás-korlátokra.

($U-C$) Az $U(y_1, \ldots, y_n)$ hasznossági függvény konkáv függvény.
($P-C$) A $g_{ij}(x_j)$ függvények konkáv függvények.

A ($P-C$) feltevés egyszerű kijelentés a nem növekvő hozadékokról. Az ($U-C$) feltevés helyzete némileg bonyolultabb. Az ordinális nézőpont tagadná, hogy valamilyen hasznossági függvényről szóló állításnak van értelme, amely nem invariáns a monoton transzformációra. A konkávitás valóban nem rendelkezik a kívánt invarianciával; csökkenő (pontosabban: nem növekvő) határhasznosságot von maga után minden áru esetén; amely jól ismert megkülönböztető jel az ordinalisták és a kardinalisták között.

A szokásos ordinalista feltevés az, hogy a közömbösségi felületek konvexek az origóra nézve. Egy alternatív megfogalmazást a következő definíciók fogalmaival adhatunk meg:

3. definíció. Egy $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvény *kvázikonkáv*, ha bármely két különböző pontra, $(z_1, \ldots, z_p)$-re és $(z'_1, \ldots, z'_p)$-re, valamint bármely harmadik pontra, $(z''_1, \ldots, z''_p)$-re, ahol $z''_i = \theta z''_i + (1-\theta) z'_i$, $(i=1, \ldots, p)$, $0<\theta<1$, $f(z''_1, \ldots, z''_p)$ legalább olyan nagy, mint az $f(z_1, \ldots, z_p)$ és $f(z'_1, \ldots, z'_p)$ számok közül a kisebbik. A függvény *szigorúan kvázikonkáv,* ha utolsó állításunkban szigorú egyenlőtlenség áll.

Egyelőre nem használjuk a definíció második részét. Geometriailag könnyen látható, hogy egy közömbösségi leképzés, amely kvázikonkáv hasznossági indikátorral rendelkezik, valóban kielégíti a szokásos konvexitási feltevéseket.[46] Továbbá ez a tulajdonság invarians az f monoton transzformációira.

Ismert, hogy meglehetősen gyenge regularitási feltételek mellett minden kvázikonkáv függvény monoton transzformációval konkávvá tehető.[47] Egy ilyen függvény természetesen jól szolgál mint hasznossági indikátor. ($U-C$) jelentősége tehát az, hogy végtelen sok olyan hasznossági függvény közül, amelyek a gazdasági egység közömbösségi leképezését képviselik, kiválaszthatunk (legalább) egyet, amely konkáv.

[46] E feltevés nagyon fontos a fogyasztói kereslet elméletében, mégis nagyon kevés figyelmet fordítottak igazolására. Egy Koopmanstól származó érvet tartalmaz *K. J. Arrow:* An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics c. műve a Proceedings of the Second Berkeley Symposium c. kötetben, 529—530. old. és *T. C. Koopmans:* Three Essays on the State of Economic Science (New York, Torontó and London: Mac Graw-Hill, 1957) 26—28. old. Lásd még *W. M. Gorman:* Convex Indifference Curves and Diminishing Marginal Utility, Journal of Political economy, LXV. (1957) 46—50. old.

[47] Lásd *W. Fenchel:* Convex Cones, Sets, and Functions. (Department of Mathematics, Princeton University, 1953) Sokszorosított anyag 115—137. old.; *B. de Finetti:* Sulle stratificazioni convesse. Annali di Mathematica Pura e Applicata, vol. 30. (1949) 173—183. old.

Feladatunk az, hogy jellemezzük a hasznossági függvény maximalizálását a (2) korlátozó feltételek mellett, $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m$ szerint. Az *1. definíció*ból könnyen ellenőrizhető, hogy egy függvény, amely konkáv bizonyos változók szerint, a többi változó pedig nem szerepel a függvényben, az összes változó szerint konkáv. Az $(U-C)$-ből tehát adódik, hogy $U(y_1, \ldots, y_n)$ $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m$ szerint is konkáv függvénynek tekinthető. Hasonlóan, $g_{ij}(x_j)$-k konkáv függvényei ezeknek a változóknak. A $-y_i$ függvény lineáris, következésképp konkáv függvénye mindezen változóknak. Legyen

$$g_i(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) - y_i + \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{46}$$

$$g_i(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) + \xi_i \qquad (i = n+1, \ldots, s), \tag{47}$$

ekkor mindegyik g_i függvény konkáv függvények összege, tehát maga is konkáv. (Vegyük észre, hogy g_i-t az összes y-változó függvényeként írjuk fel, pedig valójában g_i csak y_i-től függ, ha $1 \leqq i \leqq n$, és nem függ egyik y-változótól sem, ha $i > n$.

A (46) és a (47) segítségével a (2.1) és a (2.2) a következőképpen írható át:

$$g_i(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{48}$$

A g_i függvények a (termelt, illetve természetes) a kínálat többlete a (végső, illetve a közbülső) kereslet felett. Egyszerűen túlkínálatként hivatkozunk rá a továbbiakban.

Az $U(y_1, \ldots, y_n)$-nek a (48) korlátozó feltételek melletti maximalizálási feladata most kielégíti az *1. tétel* feltételeit; az $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m$ változók felelnek meg $z_1, \ldots, z_p$-nek; $U(y_1, \ldots, y_m)$ felel meg $f(z_1, \ldots, z_p)$-nek; és a g_i függvények a g_j függvényeknek. Tehát kimondhatjuk:

(49) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ maximalizálja $U(y_1, \ldots, y_m)$-et a (48) korlátozó feltételek mellett az, hogy létezzenek olyan $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$ számok, amelyekre az

$$L(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m; p_1, \ldots, p_s) = U(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{s} p_i g_i(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m)$$

Lagrange-függvénynek $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s)$ nyeregpontja. (Itt p_i a $g_i \geqq 0$ feltételhez tartozó Lagrange-szorzó.)

A jelölés egyszerűsítésére y-t írunk a továbbiakban $(y_1, \ldots, y_n)$ helyett és hasonló rövidítést alkalmazunk a többi változó esetén is.

Definíció szerint a nyeregpont ismérve két állítást tartalmaz:

(50.1) Az $L(y, x; \bar{p})$ függvény (azaz az a Lagrange-függvény, amelyben a szorzók értéke a megfelelő nyeregpont-koordináták értéke) y és x szerinti maximumát ott veszi fel,[48] ahol $y=\bar{y}$ és $x=\bar{x}$.

(50.2) Az $L(\bar{y}, \bar{x}; p)$ felveszi minimumát $p=\bar{p}$-ben.

Részletesebben megvizsgálva az (50) állításait, bizonyos közgazdasági értelmezéseit adjuk meg. Először tekintsük az (50.2)-t: ennek értelmezése már megjelent a *2. tétel*-hez vezető gondolatsorban. Az $L(\bar{y}, \bar{x}, p)$ függvény lineáris p szerint. A II. fejezet *A)* pont, 5. alpont (18) összefüggésének gépies alkalmazása a következő eredményekhez vezet:

(51) $$g_i(\bar{y}, \bar{x}) \geqq 0;$$

(52) $$\text{ha} \quad g_i(\bar{y}, \bar{x}) > 0, \quad \text{akkor} \quad \bar{p}_i = 0.$$

Az (51) a (48), illetve a (2) megengedettségi feltételeinek ismétlése. Az (52) kiegészíti e feltételt azzal, hogy minden olyan áruhoz tartozó Lagrange-szorzó nulla, amelynek kínálata az optimum pontban meghaladja keresletét.

Az (50.1) következményeinek kimondásához a Lagrange-függvényben g_i-t a (46)-ban és a (47)-ben adott definíciójával helyettesítjük.

(53) $$L(y, x; \bar{p}) = U(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i \left[\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) - y_i + \xi_i \right] +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{s} \bar{p}_i \left[\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) + \xi_i \right] = \left[U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i g_{ij}(x_j) \right] + \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i \xi_i .$$

A Lagrange-függvényt most $(m+2)$ tagú összegként fejeztük ki. Az első tag $y_1, \ldots, y_n$-től függ, de nem függ semmilyen x_i-től sem. A következő m tag mindegyike

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i g_{ij}(x_j) = \bar{\pi}_j(x_j)$$

alakú, ahol a j-edik tag egyetlen változótól függ, a j-edik eljárás x_j méretétől. Végül az utolsó tag állandó. Olyan függvények összegének a maximalizálásához, ahol mindegyik függvény a változók diszjunkt csoportjától függ, elegendő a tagokat külön-külön maximalizálni. Az (50.1) feltétel ekkor a következőképpen írható fel:

(54.1) Az $U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i$ felveszi $y_1, \ldots, y_n$ szerinti maximumát $y_i=\bar{y}_i$-ben $(i=1, \ldots, n)$.

(54.2) Minden j-re a $\pi_j(x_j)$ felveszi maximumát $x_j=\bar{x}_j$-ben.

[48] $y=\bar{y}$ rövidítés az $y_1=\bar{y}_1, y_2=\bar{y}_2, \ldots, y_n=\bar{y}_n$ egyenlőségsorozatra. Hasonló jelölést használunk más vektorokra is.

Ezeknek az ismérveknek gazdasági és intézményi értelmezése ma már közismert; egy szűkös áruhoz tartozó Lagrange-szorzót az áru árával kell azonosítani. Így p_i-t az i-edik áru áraként gondolhatjuk el. Ekkor az (52) feltétel azt mondja ki, hogy bármelyik olyan áru egyensúlyi ára nulla, amelyre az egyensúlyi kínálat meghaladja a keresletet. Az (54.1) feltétel azt mondja, hogy a végső keresletet úgy kell megválasztani, hogy a hasznossága és a költsége közti különbség (egyensúlyi árakon) maximális legyen.

Az (54.2)-t tárgyalva először megjegyezzük, hogy $\bar{\pi}_j(x_j)$ — definíció szerint — a j-edik eljárás x_j méretű alkalmazásából származó profit (egyensúlyi árakon számítva). Ekkor az (54.2) azt állítja, hogy minden eljárást olyan terjedelemben kell alkalmazni, amely maximális profitot ad.

Az (54) feltételek különösen előtérbe helyezik a decentralizálás lehetőségét az árrendszer segítségével. Ha adottak az egyensúlyi árak, akkor a végső kereslet megválasztása az eljárások terjedelmének választásától elkülöníthető, és ez utóbbiak egymástól is elkülönítve végezhetők. Képzeljük el azt, hogy minden egyes eljáráshoz kineveznek egy *menedzsert,* és egy *kormányost* bíznak meg a végső kereslet kiválasztásával.[49] Minden menedzser azt az utasítást kapja, hogy bármely adott árvektornál olyan volument válasszon, amely maximális profithoz vezet; ahol a profit

$$\sum_{i=1}^{s} p_i g_{ij}(x_j) = \pi_j(x; p). \tag{55}$$

Ugyanakkor a kormányos azt az utasítást kapja, hogy úgy határozza meg a végső keresletet, hogy maximális legyen a hasznosság és a költségek közti különbség: $U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$. Minden egyes ún. kívánt i-edik áruból a menedzser x_j választása meghatározza a j-edik eljárás adta $g_{ij}(x_j)$ kibocsátást (gyakran negatívat), míg a kormányos döntése y_i kiválasztását foglalja magában. Tehát a kívánt i-edik áru végső és közbülső nettó kereslete:

$$y_i - \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j).$$

Az egyensúlyi árakra az (51) és az (52) feltétel megköveteli, hogy ez a nettó kereslet ne legyen nagyobb, mint a kezdeti ξ_i kínálat; és ha a kettő nem egyenlő, akkor a $\bar{p}_i$ ár nulla legyen. (Ha az optimum anélkül elérhető, hogy a kezdő kínálatot teljesen kihasználták volna, akkor az áru szabad jószág.) Hasonlóan, egy elsődleges j-edik áru esetén a nettó kereslet:

$$-\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j),$$

[49] Követjük *Koopmans:* Production as an Efficient Combination... 93—95. oldalon található terminológiáját, amelyet lineáris esetre fejlesztett ki; azonban a kormányos függvénye némileg eltérő.

amelyet össze kell hasonlítani a ξ_i kezdő kínálattal; egyensúlyban a nettó kereslet nem lehet nagyobb, mint a kezdő kínálat, és a $\bar{p}_i$ árnak nullának kell lennie, ha van túlkínálat.

Itt a decentralizálás elemei világosak. Adott árvektor esetén az eljárás menedzserének csak az árakat és saját eljárásának a technológiáját kell ismernie ahhoz, hogy optimális méretben alkalmazza eljárását. A kormányosnak csak az ún. kívánt áruk árát és a hasznossági függvényt kell ismernie. Végül az egyensúly minden piacon külön-külön ellenőrizhető; bármely piacnál a próbához csak a nettó keresletet (amely sok egyedi döntés összege), a kezdő kínálatot és az árat kell ismerni.

9. tétel. Ha $(U-C)$ és $(P-C)$ teljesül, akkor $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ és $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ rendre olyan $y_1, \ldots, y_m$ végső keresletek és $x_1, \ldots, x_m$ eljárási volumenek, amelyek maximalizálják az $U(y_1, \ldots, y_n)$ hasznossági függvényt a megengedettségi feltételek mellett, amennyiben van olyan $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$ árvektor, amelyre a következő feltételek teljesülnek:

a) $\bar{y}_1 \ldots, \bar{y}_n$ maximalizálják a hasznosság és a költség közötti különbséget: $U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i$-t.

b) Minden j-edik eljárásra, $\bar{x}_j$ maximalizálja a $\sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i g_{ij}(x_j)$ profitot;

c) Minden i-edik ún. kívánt árura nemnegatív az összesített túlkínálat: $\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\bar{x}_j) + \xi_i - \bar{y}_i$; ha pozitív, akkor a $\bar{p}$ ár nulla.

d) Hasonlóan, minden ún. elsődleges i-edik árunál nemnegatív az összesített túlkínálat: $\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\bar{x}_j) + \xi_i$; ha pozitív, akkor a $\bar{p}_i$ ár nulla.

Jegyezzük meg, hogy egynél több maximumhely lehetséges *a)*-ban vagy *b)*-ben. Gyakori ez az eset akkor, ha a g_{ij} függvények lineárisak, mint a lineáris programozásban. Általában ebben az esetben az eljárás menedzsere a volumeneknek egy egész intervallumát fogja olyannak találni, amely megvalósítja az elérhető profitot, de valójában csak egyesek lesznek ezek közül az egész gazdaságra nézve optimálisak. Ha olyan volument választ a menedzser, amely nem optimális a gazdaság egésze számára, akkor ezt a *c)* vagy a *d)* feltételek egyikének megsértése jelzi. A *9. tétel* érvényességét nem érinti ez a megjegyzés, de e feltételek mellett a decentralizálási érv veszít erejéből.

B) Az optimális elosztás egy alternatív statikus jellemzése

A *9. tétel* mint az optimális elosztások egyik jellemzése, természetesen szoros kapcsolatban van a jóléti gazdaságtan kritériumaival, amelyek Hotellingtól, Langétől, Koopmanstól, Allais-től, Lernertől és Bergsontól származnak.[50] Azonban az *a)* feltétel némileg eltér a Pareto-optimumok hasonló jellemzésétől, amely sok fogyasztó esetén használatos. Az utóbbi esetben mindegyik fogyasztó egy feltételes maximum feladattal áll szemben: a hasznossági függvényét kell maximalizálni a költségvetési korlát mellett. Mivel itt az egyetlen fogyasztó speciális esetével foglalkozunk, biztos, hogy van egy hasonló tétel, amelyben *a)*-t egy feltételes maximum feladat helyettesíti.

Legyen $\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{y}_i$ a kormányos összes kiadása az egyensúlyi helyzetben. Tegyük fel, hogy azt mondják neki, hogy maximalizálja hasznosságát azon korlátozó feltétel mellett, hogy összes kiadása $\overline{M}$-mel legyen egyenlő, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i = \overline{M}. \tag{56}$$

Mivel a maximalizálás eredményét nem érinti az, ha a maximalizálandót egy állandóval megváltoztatjuk, a feladat egyenértékű a következővel: Maximalizáljuk az $U(y_1, \ldots, y_m) - \overline{M} = U(y_1, \ldots, y_m) - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i$ függvényt az (56) feltétel mellett. De már tudjuk, hogy az utolsó maximumfeladat feltétel nélküli maximuma $y_i = \bar{y}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Minthogy a megoldás kielégíti az (56) feltételt, a megoldásnak ezért feltételes maximumnak is kell lennie. Tehát *a)* ekvivalens a következő állítással:

(57) $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ maximalizálja $U(y_1, \ldots, y_n)$-et az (56) feltétel mellett.

Eddig ez nem túl érdekes, mivel az (56), illetve az (57) feltételezi $\overline{M}$ ismeretét. Idézzük vissza a hasznossági és a profitfüggvényből származó keresleti és kínálati függvények homogenitási tulajdonságait. Az (57)-ben leírt viselkedés a fogyasztó viselkedése a szokásos keresletelméletben. Ha $\overline{M}$ tetszőleges M értékre változik, és az árak ugyanilyen arányban változnak, akkor az y_i-k választása nem változik. Ugyanakkor x_j választását sem érinti az árak azonos arányú változtatása. Tehát ha $\overline{M}$-et tetszőleges M számmal helyettesítjük, a $\bar{p}_i$ árakat úgy választhatjuk meg, hogy az (57) és a *9. tétel b)* pontja teljesüljön. A *c)* és a *d)* pontokban az árak közvetlenül

[50] Lásd *H. Hotelling:* The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates. Econometrica, Vol. 6. (1938) 242—267. old.; *Lange:* Foundations... idézett mű; *Koopmans:* Three essays, idézett mű 1. fejezet; *M. Allais:* Traité d'Economie Pure (Paris, Imprimerie Nationale, 1943) III. 604—682. old. *Lerner:* idézett mű; *A. Bergson* (Burk), A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics. Quarterly Journal of Economics, VIII, (1938), 310—334. old.

csak a nulla árak alakjában jelennek meg; de az összes ár azonos arányú változtatása változatlanul hagyja a nulla árakat is. Kimondhatjuk tehát a következőt:

9'. tétel. A *9. tétel* érvényes marad, ha *a)*-t a következő állítással helyettesítjük:

a') $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ maximalizálja $U(y_1, \ldots, y_n)$-t a $\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i = M$ költségvetési feltétel mellett, ahol M tetszőlegesen választható.

Az *a')* feltételes maximum, mint az a fogyasztói keresletelméletben szokásos, invariáns a hasznossági függvény monoton transzformációira. Ezért belátható, hogy a *9. tétel*lel ellentétben, a *9'. tétel* igaz marad, akkor is, ha a hasznossági függvény csupán kvázikonkáv, nem pedig konkáv.

C) A gradiens módszer közgazdaságtani jelentése

Most a II. fejezet *E)* pontjának gradiens módszerét alkalmazni fogjuk az I. fejezet *C)* pontjának erőforrás-elosztási modelljére. A megfogalmazás hasonló ahhoz, ahogyan e fejezet *A)* pontjában a *2. tétel*t alkalmaztuk. A (43) és a (44) differenciálegyenletek ekkor a következő alakot öltik:

$$dy_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y_i = 0 \text{ és } (\partial U/\partial y_i) - p_i < 0, \\ \partial U(\partial y_i) - p_i & \text{egyébként;} \end{cases} \tag{58}$$

$$dx_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x_j = 0 \text{ és } d\pi_j(x_j)/dx_j < 0, \\ d\pi_j(x_j)/dx_j & \text{egyébként;} \end{cases} \tag{59}$$

$$dp_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad p_i = 0 \text{ és } g_i > 0, \\ -g_i & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{60}$$

Az (59)-ben π_j a folyó árakon számított profit, amint azt az (55)-ben definiáltuk.

Ezek az egyenletek úgy nyerhetők, hogy az erőforrás-elosztási feladat speciális maximalizálandó és feltételi függvényeit behelyettesítjük az általános gradiens módszerbe. Talán jobban megvilágítja a helyzetet az a megjegyzés, hogy az (58) és az (59) közvetlen dinamikus megfelelői a *9. tétel a)* és *b)* feltételeinek. Mihelyt a kormányos feladatát mint *feltétel nélküli* maximalizálást fogalmazzuk meg, természetes, hogy átalakítjuk a maximum statikus feltételét a maximumhoz tartó gradiens módszerré; és az (58) pontosan ez. (Vesd össze a II. fejezet, *A)* pont 5. alpontjával. Az (59) egyenlet viszonya a *b)* feltételhez ugyanaz, mint az (58)-é az *a)*-hoz.

Természetesen most feltesszük, hogy a kormányos és a menedzser az (58) és az (59) maximalizálási eljárást nem pusztán az egyensúlyi árvektornál, hanem tetszőleges — számukra adott — árvektor mellett alkalmazzák. Ahogyan az y_i végső kereslet és az x_j eljárásvolumen rendre az (58) és az (59) szerint változik, ugyan-

úgy az árak, amelyeket a kormányos és menedzserek adottnak vesznek a (60) szerint változnak. A (60) jelentését már vizsgáltuk a II. fejezet *E*) pontjában.

Tehát látjuk, hogy a gradiens módszernek a következő intézményi értelmezés adható. A kormányos — az ún. kívánt áru árát adottnak véve — a határhasznosság és a határköltségek különbségével megegyező sebességgel változtat minden végső keresletet, kivéve, ha valamelyik árunál a végső kereslet nulla, és a határhasznosság nagyobb, mint a határköltség, amikor is a végső kereslet nulla marad (mivel negatív végső keresletnek nincs értelme). Ezért bármely áru kereslete nő, ha határhasznossága meghaladja az árát, és csökken (ha már nem nulla), ha határhasznossága kisebb, mint az ára. Minden eljárás menedzsere az összes árat adottnak tekinti, és eljárása volumenét határnyereségességével arányos sebességgel változtatja, kivéve, ha a volumen nulla és a határnyereségesség negatív, amikor is a volumen nulla marad. Tehát az eljárás volumene nő, ha a bővítés határhaszna pozitív, és csökken az ellenkező esetben, hacsak már nem nulla.

A menedzser azzal, hogy megválasztja eljárása terjedelmét, meghatározza e folyamat mindegyik kibocsátását és ráfordítását. Minden áru esetén az összes eljárás kibocsátásának összegét (a ráfordításokat negatív kibocsátásnak tekintve) hozzáadjuk a ξ_i kezdő kínálathoz, és (a kívánt áruk esetében) levonjuk a kormányos által meghatározott végső keresletet. Így adódik rendre az ún. kívánt és az ún. elsődleges áruk *túlkínálata,* amelyet g_i-vel jelölünk. Képzeljünk minden áru számára egy *őrt* (ismét Koopmans elnevezését használva), aki az áru árát a túlkínálattal arányos, de ellentétes előjelű sebességgel változtatja, azzal a megszorítással, hogy ha az ár nulla és a túlkínálat pozitív, akkor az ár nulla marad. Ez az utasítás a „kereslet—kínálat törvénye", amely jól ismert: egy áru ára nő, ha a kereslet meghaladja a kínálatot, és csökken az ellenkező esetben.

A kormányosnak, a menedzsereknek és az őröknek szóló utasítások az információgyűjtési és a döntéshozási funkciók decentralizálásának magas fokát képviselik. A kormányosnak csak saját hasznossági függvényét és a kívánt áruk árait kell ismernie ahhoz, hogy az (58) szabályát végrehajthassa. Egy eljárás menedzserének csak saját technológiáját kell ismernie, ahogyan azt $g_{ij}(x_j)$ függvények képviselik, valamint a benne szereplő árakat. Egy őrnek csak az összesített kereslete és kínálata közti különbséget kell ismernie saját piacán (nem pedig az egyes eljárások, illetve a kormányos ajánlatait és keresleteit), valamint árujának árát.

D) A gradiens módszer érvényességét biztosító feltételek

Az (58)—(60) differenciálegyenlet-rendszer megoldása nem konvergál bármilyen $U(y_1, \ldots, y_n)$ és $g_{ij}(x_j)$ függvények esetén. Még akkor sem, ha minden függvény konkáv. Mint a II. fejezet *D* pontjában láttuk, ha minden szóban forgó függvény lineáris, a gradiens módszer néhány vagy minden változó vég nélküli oszcillációjához vezet, tehát nem konvergál az optimális megoldáshoz.

Az *5. tétel* egy elégséges feltételt ad a konvergenciára az általános feltételes maximumfeladatban, de sajnos olyat, amely az erőforrás-elosztási feladatban nem alkalmazható. Ennek az az oka, hogy a maximalizálandó $U(y_1, \ldots, y_n)$ nem tartalmazza az összes olyan változót, amely szerint maximalizáljuk, következésképpen nem lehet szigorúan konkáv az összes változó szerint. A kívánt eredmény eléréséhez az $(U-C)$ feltevésünket szigorítjuk.

$(U-SC)$ $U(y_1, \ldots, y_n)$ szigorúan konkáv $y_1, \ldots, y_n$ szerint.

$(U-SC)$-t hasonlóan indokoljuk, mint $(U-C)$-t. A fogyasztói kereslet elméletében nem csupán azt szokás feltenni, hogy a közömbösségi felületek konvexek a tengelyek irányában, hanem azt is, hogy nem lineárisak vagy síkszerűek, és nincs lineáris szakasz bennük. E követelmény biztosítja, hogy a keresleti függvények jól meghatározottak, (azaz egyértékűek), mivel minden „költségvetési síknak" az őt érintő közömbösségi felülettel csak egy közös pontja van. Ezt mint a hasznossági indikátorra vonatkozó követelményt is kimondhatjuk a *3. definíciót* felhasználva:

$(U-SQC)$ $U(y_1, \ldots, y_n)$ szigorúan kvázikonkáv függvény.

Alkalmas regularitási feltételek mellett,[51] ha $(U-SQC)$ teljesül, akkor van olyan monoton transzformáció, amely szigorúan konkáv. Ezért az $(U-SC)$ feltevés lényegében azt jelenti, hogy a hasznossági indikátorok közül egy alkalmasat választottunk ki a gradiens eljárás (58) definíciójában.

Míg az $(U-SC)$ feltevés nem elég erős ahhoz, hogy a gradiens eljárás optimumhoz való konvergenciáját minden változóra biztosítsa, a legfontosabbakra ezt megteszi.

10. tétel. Ha $(U-SC)$ és $(P-C)$ teljesül, és az y_i, x_j, p_i változók az (58)—(60) egyenletek által meghatározott gradiens eljárás szerint változnak, akkor minden i-edik ún. kívánt árura az y_i végső kereslet és a p_i ár konvergál az $\bar{y}_i$ és $\bar{p}_i$ optimumhoz $(i=1, \ldots, n)$. Az x_j volumenek és az ún. elsődleges áruk p_i árai $(i=n+1, \ldots, s)$ a végtelenségig oszcillálhatnak, de nem divergálhatnak.

Továbbá: bármely kívánt árunál, amelynél az optimális végső kereslet pozitív, a kínálat és a kereslet közti különbség nullához tart. Képletben: minden olyan i-re, amelyre $\bar{y}_i > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \left[y_i - \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x_j) - \xi_i \right] = 0.$$

Bár a *10. tétel* a legfontosabb változók konvergenciáját biztosítja, nem teljesen kielégítő. Az eljárások volumenének határértékben ki kell elégíteniük az egyensúlyi végső keresleteket, de nem szavatolt, hogy az elsődleges árukra is teljesülnek a megengedettségi feltételek. Ehelyett az eljárások volumene végtelenségig oszcillálhat oly módon, hogy egy elsődleges árura irányuló — az összes eljárás által igényelt —

[51] Lásd a 47 lábjegyzetet.

kereslet a végtelenségig a kezdő kínálat körül oszcillálhat. Példákkal bizonyítható, hogy ezt a lehetőséget nem zárja ki egyik eddig tett föltevésünk sem.

Az oszcillációk lehetősége összefügg a termelési eljárások lineáritásával. A következő megjegyzést tehetjük:

Megjegyzés. Még ha egyes eljárások lineárisak is, a volumenek oszcillációja csak „véletlenül" fordulhat elő, abban az értelemben, hogy speciális összefüggéseknek kell teljesülniük azok között a ráfordítási—kibocsátási együtthatók között, amelyek meghatározzák a különböző lineáris folyamatokat.

Következésképpen a gradiens eljárás általában kielégítő megoldást ad az erőforrás-elosztási feladatra a *10. tétel* feltevései mellett.

Mindenesetre a lineáritás hiánya elégséges feltétel minden változó konvergenciájára. $(P-C)$ feltevést szigorítjuk, ha a nem növekvő hozadék puszta feltételezése helyett szigorúan csökkenő hozadékot kívánunk feltételezni. Matematikailag ez azt jelenti, hogy a j-edik eljárást definiáló $g_{ij}(x_j)$ függvények szigorúan konkávak.[52] Azt azonban nem akarjuk feltenni, hogy a $g_{ij}(x_j)$ függvények minden i-re és j-re szigorúan konkávak, mert ez azt jelentené, hogy minden termék szerepel minden eljárásban, akár ráfordításként, akár kibocsátásként. Ezért a következő, kevésbé megszorító feltételét adjuk $(P-C)$-nek:

> $(P-SC)$ Minden i-edik árura és minden j-edik eljárásra a $g_{ij}(x_j)$ függvény vagy szigorúan konkáv, vagy azonosan nulla.

Kimondhatjuk ehhez a következő tételt:

11. tétel. Ha $(U-SC)$ és $(P-SC)$ teljesül, és y_i, x_j, p_i az (58)—(60) egyenletek által meghatározott gradiens módszer szerint változik, akkor minden változó egyensúlyi értékéhez konvergál.[53]

[52] A $g_{ij}(x_j)$ függvényeket itt x_j szerint tekintjük szigorúan konkávnak. Nemlineáris eljárásoknál a volumennek esetleg többféle természetes meghatározása lehetséges. Egyik nézőpont szerint a volumen bármely monoton transzformációja maga is volumen, mivel ugyanolyan jól szolgál az eljárás különböző szintjeinek paramétereként. Azonban az előző tételek megmutatták, hogy érdemes a volument úgy választani, hogy a $g_{ij}(x_j)$ függvények konkávak legyenek. Ha ez a feltevés nem specifikálja egyértelműen a volumen választását, akkor úgy választható, hogy minden g_{ij} függvény, amely szerepel az eljárásban, szigorúan konkáv legyen.

Érdemesnek tűnik megjegyezni, hogy az a feltétel, miszerint lehetséges szigorúan konkáv ráfordítási- és kibocsátási függvényeket választani, erősebb, mint az a feltétel, miszerint az eljárás nemlineáris. Az első feltétel megköveteli, hogy az eljárásnál ne legyen lineáris összefüggés semmilyen ráfordítás és kibocsátás között.

[53] E szakasz eredményeinek matematikai bizonyítása *K. Arrow* és *L. Hurwicz:* Gradient Method for Resource Allocation c. idézett művében található meg.

E) Az árigazodás módszere

Most a II. fejezet *F)* pontjában bemutatott a feltételes maximumfeladatok megoldására szolgáló árigazodási eljárást alkalmazzuk az erőforrás-elosztási feladatra. A megfogalmazás nyilvánvaló; az árigazodási eljárás határesete az (58)—(60) gradiens módszernek, ahol az (58) és (59) differenciálegyenleteket a következő feltételek helyettesítik: Bármely árvektorra a kormányos olyan végsőkereslet-vektort választ, amely maximalizálja a hasznosság és a költség közti különbséget, és minden eljárás menedzsere olyan termelési volument választ, amely maximalizálja (55)-beli profitját. E döntések együttese minden piacon meghatározza a kínálatot és a keresletet; az őr (60) szerint változtatja az árat.

Emlékeztetni kell arra, a II. fejezet *F)* pontjához hasonlóan, hogy menedzsereknek szóló utasítás — ti. az, hogy maximális profitot hozó volument válasszanak — feltételezi, hogy létezik maximumhely és csakis egy maximumhely létezik. Az első feltétel teljesül, ha az árak elég közel vannak egyensúlyi értékükhöz, de nem szükségképpen mindenütt; a második feltétel azt követeli, hogy a profitfüggvény szigorúan konkáv legyen, amelyet $(P-SC)$ szavatol. Hasonlóan, a kormányosnak egyetlenegy maximális nettó hasznosságú végső keresleti vektora van, ha az árak közel vannak az egyensúlyhoz, és a hasznossági függvény szigorúan konkáv. Ezért feltesszük majd, hogy mind $(P-SC)$ mind $(U-SC)$ teljesül.

Bármely adott $(p_1, \ldots, p_s)$ árvektorra válassza a kormányos $y_1, \ldots, y_s$-et úgy, hogy $U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{m} p_i y_i$ maximális legyen. A j-edik eljárás menedzsere válasszon olyan x_j-t, hogy $\pi_j(x_j)$ maximális legyen. Jelölje a kormányos választását a p_i-k függvényében

$$\eta_1(p_1, \ldots, p_s), \ldots, \eta_n(p_1, \ldots, p_s),$$

ahol $\eta_i(p_1, \ldots, p_s)$ az i-edik kívánt áru végső keresleti függvénye. A j-edik menedzser által választott x_j értéke meghatározza a j-edik eljárás i-edik nettó árukibocsátását, $g_{ij}(x_j)$-t mint az árak függvényét, amelyet $\gamma_{ij}(p_1, \ldots, p_s)$-sel jelölhetünk; és amely a j-edik eljárás kínálata (kereslete, ha negatív) az i-edik árúból. Az i-edik áru összesített túlkínálata mint az árak függvénye ekkor a következő:

$$\gamma_i(p_1, \ldots, p_s) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}(p_1, \ldots, p_s) + \xi_i - \eta_i(p_1, \ldots, p_s) \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{61.1}$$

$$\gamma_i(p_1, \ldots, p_s) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}(p_1, \ldots, p_s) + \xi_i \qquad (i = n+1, \ldots, s). \tag{61.2}$$

Ezzel a jelöléssel egy optimális elosztásnak a *9. tételben* adott egyensúlyi feltétele:

(62) és $$\gamma_i(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s) \leqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, s);$$

minden olyan i-re, amelyre $\gamma_i(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s) > 0$, $\bar{p}_i = 0$,

azaz a kereslet és a kínálat egyenlővé válása, a szabad jószágokra vonatkozó szükséges megszorításokkal. A végső kereslet és az eljárási volumenek egyensúlyi értéke az egyensúlyi árakból határozható meg, a keresleti és kínálati függvényeket meghatározó maximalizálással. Az $\bar{y}_i = \eta_i(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ és az $\bar{x}_i$ a profitmaximalizáló választás, amely meghatározta a γ_{ij} függvényeket — az egyensúlyi árakra.

Az árigazodási módszer dinamikája így egyszerűen megfogalmazható:

$$dp_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad p_i = 0 \text{ és } \gamma_i(p_1, \ldots, p_s) > 0, \\ -\gamma_i(p_1, \ldots, p_s) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel az árigazodási módszer egyszerűen a gradiens módszer határesete, érvényességi feltételei ugyanazok.

12. tétel. A (63) által meghatározott árigazodási eljárás az $(U-SC)$ és $(P-SC)$ feltevések mellett konvergál.

F) Megjegyzések az árigazodási eljárás egy alternatív alakjáról

Az optimumnak a *B)* pontban adott statikus jellemzése az árigazodási eljárás következő alternatív alakját sugallja. A $\gamma_{ij}(p_1, \ldots, p_s)$ keresleti és kínálati függvények — eljárásonként — ugyanúgy származtathatók, mint az *E)* pontban, de az $\bar{\eta}_i(p_1, \ldots, p_s)$ végső keresleti függvényeket úgy határozzuk meg, hogy maximalizáljuk $U(y_1, \ldots, y_n)$-et az $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = M$ „költségvetési korlát" mellett. (Nem jelezzük, hogy az $\bar{\eta}_i$ végső kereslet függ M-től, mivel M-et paraméternek tekintjük, és rögzített marad az igazodási eljárás során.) Ekkor a túlkereslet (61) szerinti meghatározása csak annyiban változik, hogy a (61.1)-ben $\eta_i(p_1, \ldots, p_n)$-et $\bar{\eta}_i(p_1, \ldots, p_n)$ helyettesíti. Legyen $\bar{\gamma}_i(p_1, \ldots, p_s)$ az új rendszer túlkínálata. Végül a dinamikát (62) adja, ahol $\gamma_i(p_1, \ldots, p_s)$-t $\bar{\gamma}_i(p_1, \ldots, p_s)$ helyettesíti.

Ebben az alakban a rendszer egy versenygazdaság speciális esete, amelyben a termelőegységek minden adott árszintnél maximalizálják profitjukat, és az árak a kereslet—kínálat törvénye szerint változnak. Ez az a modell, amelyet Walras felvázolt, és amelyet Samuelson pontosabban megfogalmazott. Nem valami jól ismertek azok a feltételek, amelyek mellett egy ilyen gazdaság egyensúlya stabil, de számos elégséges feltételt találtak a stabilitásra.[54]

[54] Lásd *K. Arrow—L. Hurwicz:* On the Stability of Competitive Equilibrium I, Econometrica, Vol. 26. (1958) 522—552. old.; *K. Arrow, — D. H. Block — L. Hurwicz:* On the Stability of Competitive Equilibrium II, uo. Vol. 27. (1959) 82—109. old.

IV. MÓDOSÍTOTT PIACI MECHANIZMUSOK A CSÖKKENŐ HOZADÉK ELVETÉSE ESETÉN

Ebben a fejezetben a piaci mechanizmus olyan módosításaival foglalkozunk, amelyek képesek megbirkózni azokkal az erőforrás-elosztási problémákkal, amelyek a növekvő vagy állandó hozadék esetén jelentkeznek. A tárgyalás természetesen sokkal bizonytalanabbá válik. Csak most kezdik vizsgálni azoknak az elosztási mechanizmusoknak a lehetőségét, amelyek optimális elosztást valósítanak meg növekvő hozadék esetén, és bizonyos mértékig továbbra is decentralizáltak.

A) Általános megjegyzések

Mint a II. fejezet több helyén is láttuk, a függvények konkávitási feltételeinek hiánya két következménnyel jár a (feltétel nélküli vagy feltételes) maximumok jellemzése esetén: az elsőrendű feltételek nem kölönböztetik meg teljesen a maximumokat az egyéb stacionárius pontoktól, és soha semmilyen módon nem különböztetik meg a globális maximumokat a pusztán lokális maximumoktól.[55] Ez utóbbi kérdés nem válaszolható meg semmilyen olyan statikus jellemzéssel, amely a deriváltakon alapszik. Ennek megfelelően a gradiens módszer semmiféle olyan módosítása, amely csupán a lokális változásokat mérve mozog felfelé, várhatóan nem ér el több csúcs közül a legmagasabbra; legjobb esetben is csak egy lokális maximumhoz való konvergencia várható.

Egyszerű illusztrációul szolgál egy olyan gazdaság, amelyben egy kibocsátás, egy ráfordítás és két — növekvő hozadékú — eljárás van. Legyen x_i az i-edik eljárás ráfordítása, $f_i(x_i)$ az i-edik eljárás kibocsátása és ξ a rendelkezésre álló ráfordítások teljes mennyisége: azaz $x_1+x_2=\xi$. Feltesszük, hogy $f_i'(x_i)>0$ és $f_i''(x_i)>0$. $\psi(x_1)=f_1(x_1)+f_2(\xi-x_1)$-et szeretnénk maximalizálni. Ekkor

$$\psi'(x_1) = f_1'(x_1)-f_2'(\xi-x_1),$$

$$\psi''(x_1) = f_1''(x_1)+f_2''(\xi-x_1).$$

Lokálisan maximalizáljuk $\psi(x_1)$-et, a $0\leqq x_1\leqq\xi$ feltétel mellett. Ha az $\hat{x}_1$ maximumhely kielégíti a $0<\hat{x}_1<\xi$ egyenlőtlenségpárt, akkor szükségképpen $\psi'(\hat{x}_1)=0$ és $\psi''(\hat{x}_1)\leqq 0$. De előbbi feltevésünk értelmében $\psi''(x_1)>0$ minden x_1-re. Innen vagy $x_1=0$ (és $x_2=\xi$), vagy $x_1=\xi$ (és $x_2=0$); a két eljárás közül az egyik mindenképpen nulla méretű.

Most tegyük fel, hogy $f_1'(\xi)>f_2'(0)$ és $f_2(\xi)>f_1'(0)$. Ekkor $\psi'(\xi)>0$ és $\psi'(0)<0$, tehát mind $x_1=\xi$, mind $x_1=0$ *lokális* maximum. (Az, hogy ez tényleg megtörténhet, az $f_i(x_i)=\alpha_i x_i^2$; $\alpha_i>0$ példákból látható.) Ha $f_1(\xi)\neq f_2(\xi)$, akkor a két lokális

[55] Lásd II. fejezet *A)* pont 1. alpontját és az 1. tételhez fűzött megjegyzést a *B)* pontban.

maximum közül csak az egyik globális maximum. (Legyen $\alpha_1 \neq \alpha_2$ az előző példában.) Tehát olyan esetekkel találkozhatunk, ahol a lokális maximumok nem mindegyike globális maximum.

Mostantól kezdve feltesszük, hogy általában tudjuk, hol van a globális maximum; a dinamikus feladat éppen ennek pontos megkeresése. A gradiens módszerek keretein belül semmi jobb nem várható.

Mindenesetre olyan eljárásokat szeretnénk, amelyek nem konvergálnak olyan stacionárius pontokhoz, amelyek még csak nem is lokális maximumhelyek, de megkívánjuk tőlük, hogy konvergáljanak egy lokális maximumhoz, ha ennek elég közeli környezetéből indulunk. Tehát ezek azok az ismérvek, amelyek szerint megítéljük a piaci mechanizmusok olyan módosításait, amelyeknek feladata, hogy az erőforrások optimális elosztását hozzák létre növekvő hozadék mellett. Matematikai eszközeink: a II. fejezet *C)* pontjának statikus jellemzései és ezek dinamikus megfelelői, amelyek a II. fejezet *E)* pontjában (6. és a 7. tétel) találhatók meg.

B) Az eredeti Lagrange-feltételek

Egy optimális elosztás statikus jellemzését a Kuhn—Tucker-féle *1. tétel*lel kezdjük, amely valóban az optimális elosztás tárgyalásának az alapja mind a mai napig. Az *1. tétel* alkalmazása az erőforrás-elosztási feladatra teljesen hasonló a *2. tétel*nek ahhoz az esetéhez, ahol a konkávitási feltételek szükségesek, a *9. tétel*nek megfelelően. Mind a négy ottani feltételnek van megfelelője az általánosabb esetben.

Az *a)* feltétel megfelelője

(64) $\quad \overline{U}_{y_i} \leqq \bar{p}_i \quad (i = 1, \ldots, n); \quad \text{ha} \quad \overline{U}_{y_i} < \bar{p}_i, \quad \text{akkor} \quad \bar{y}_i = 0.$

Ha megtartjuk az $(U-C)$ konkávitási feltételt a hasznossági függvényre, akkor a (64) összefüggések szükségesek és elégségesek az $U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i$ különbség maximumára, így a *9. tétel a)* feltétele érvényes marad.

A *b)* feltétel megfelelője

(65) $\quad d\bar{\pi}_j(x_j)/dx_j \leqq 0 \;\; x_j = x_j\text{-re}; \quad \text{ha} \quad d\bar{\pi}_j(x_j)/dx_j < 0, \quad \text{akkor} \quad \bar{x}_j = 0.$

A (65)-ben a $\pi_j(x_j)$ függvény a j-edik eljárás profitja, amelyet egyensúlyi áraknál számítunk, amint azt az (54) egyenletet közvetlenül megelőző részben meghatároztuk.

Végül a *c)* és a *d)* feltételek érvényesek maradnak.

13. tétel. Ha $(U-C)$ teljesül, akkor a következő feltételek szükségesek egy erőforrás-elosztás optimalizálásához:

a) a kormányos úgy választja az $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ végső keresletet, hogy a hasznosság és a költség közti $U(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i y_i$ különbség maximális legyen az egyensúlyi árakon;

b) mindegyik eljárás menedzsere olyan $\bar{x}_j$ eljárásvolument választ, amely esetén $d\pi_j(x_j)/dx_j \leqq 0$, de szigorú egyenlőtlenség csak $\bar{x}_j = 0$-nál állhat;

c) egyetlen i árura $(i = 1, \ldots, s)$ sem lehet az egyensúlyi végső kereslethez és eljárási volumenekhez tartozó g_i túlkínálat negatív; ha pozitív, akkor $\bar{p}_i = 0$.[56]

Az optimális erőforrás-elosztás feltételei a most tárgyalt általános esetben és a termelésre és fogyasztásra vonatkozó konkávitás esetében csupán a *13. tétel b)* feltételében és a *9. tétel b)* feltételében különböznek egymástól. Az előbbi azt követeli, hogy egyensúlyi árak esetén minden eljárás határnyereségessége nempozitív legyen, negatív csak akkor lehet, ha az eljárást nulla volumenben alkalmazzák. Az utolsó rész talán intuitíve jobban érthető tagadó alakjában:

(66) Ha nulla kibocsátás esetén a határnyereségesség pozitív, akkor az eljárás optimális mérete biztosan pozitív.

Általában az irodalomban felismerték a nemnegativitási feltételt; jól ismert, hogy növekvő hozadék esetén az optimális erőforrás-eloszlás egyik fő problémája annak meghatározása, hogy milyen eljárásokat alkalmazzunk valamilyen pozitív szinten. A (66) állítás egy elégséges, de nem szükséges feltételt ad erre.

A *9.* és a *13. tétel* hasonlósága egy kereslet—kínálat értelmezést sugall. A kormányos keresleti függvényeit ugyanúgy határozzuk meg, mint előzőleg. Egy eljárás menedzserének keresletét vagy kínálatát valamely áruból azonban most úgy határozzuk meg, hogy az összes ár függvényében először kiválasztjuk az x_j eljárásnak azt a volumenét, amelyre az adott árakon a határnyereségesség nulla (vagy negatív, ha nulla a volumen), és ezután megkeressük $g_{ij}(x_j)$ megfelelő értékét. Ekkor az egyensúlyi árakat a szokásos módon úgy definiáljuk, mint amelyek egyenlővé teszik a keresletet a kínálattal (vagy tulkínálathoz vezetnek nulla árnál).[57] Ez az értelmezés nem olyan hasznos, mint az a megfelelője, amelyet a termelésre vonatkozó konkávitás. feltételek teljesülése esetén kaptunk. Először is bármely adott árvektor esetében általában több mint egy olyan eljárásvolumen van, amelyre teljesül a fenti feltételi Növekvő hozadék esetén nulla kibocsátásnál a határnyereségesség könnyen nőhet negatív értékről — nullán át — pozitív értékekig. Ekkor mind a nulla volumen, mind az a volumen, amely esetén az eljárás határnyereségessége nulla, eleget tesz a feltételnek. Ha pedig végül is van egy csökkenő hozadékú szakasz, akkor a határnyereségesség megint nullává válhat, azaz három lehetséges eljárásvolumen létezhet. Így a megfelelő keresleti és kínálati függvények többértékűek, és így nem jól definiálhatók.

[56] Megjegyezhetjük, hogy a *9. tétel*hez hasonlóan a *13. tétel* érvényes marad, ha az *a)* feltételt az *a')* feltétellel helyettesítjük; lásd a III. fejezet *B)* pontját. A *13. tétel* azonos *Hotelling, Lange* és *Allais* idézett műveiben szereplő állításokkal, (50. lábjegyzet), kivéve a nemnegativitási feltételek hangsúlyozását.

[57] Ezt a megfogalmazást alkalmazza *Lange:* Socialism, 81—82. old.

A második nehézség szorosan kapcsolódik az elsőhöz: a rendszernek mint egésznek több egyensúlyi pontja lehet általában.[58] Már láttuk, hogy ez a jelenség megszokott az *1. tétel* alkalmazásakor; lásd a tételt követő *Megjegyzést*. Ezek közül az egyensúlyi pontok közül egyesek még lokálisan sem optimálisak.[59]

Ha előre specifikáljuk az optimális elosztás valamilyen környezetét, és csak az ezen belüli alternatívákat mérlegeljük, e két nehézség eltűnik, és a *13. tétel* megfelelő statikus jellemzést ad. A következő probléma egy olyan dinamikus közelítési eljárás meghatározása, amely konvergál az optimumhoz és összefér a decentralizációval. Mivel egy menedzser valódi célja a profitmaximalizálás helyett a profitminimalizálás is lehet, a *10. tétel* dinamikus rendszere nem alkalmazható. Az említett kereslet—kínálat értelmezés olyan modellt sugall, amelyben a dinamikus elem egyszerűen az árak igazodása a kereslet és a kínálat szerint. A legegyszerűbb alak a *12. tétel*ben vizsgált rendszer, az eljárások keresleti és kínálati függvényeinek előbbiekben adott új értelmezésével. Ebben a rendszerben az ár a túlkínálat ellentettjével arányos sebességgel változik. Egy példával bemutatjuk majd, hogy az ilyen rendszer instabil is lehet. Azonban az *E)* pontban megmutatjuk, hogy bonyolultabb árváltozási szabályokat véve az árigazodási eljárás stabillá válhat.

Legyen két áru és egy eljárás. Az első áru ún. kívánt áru, kezdő kínálat nélkül. A második áru ún. elsődleges áru és kezdő kínálata 1 egység. Az eljárásban a második áru ráfordítás, az első áru kibocsátás. Ha a ráfordítást, x_1-et használjuk az eljárás volumeneként, akkor a kibocsátásról feltesszük, hogy $x_1^2/2$, tehát az eljárás növekvő hozadékú. Feltesszük, hogy az egyetlen kívánt áru, az első, minden mennyiségben kívánatos. Ekkor ordinalista szempontból az y_1 végső keresletnek bármelyik szigorúan növekvő függvénye lehet hasznossági függvény. Speciálisan egy szigorúan konkáv hasznossági függvényt választunk:

$$U(y_1) = (\log y_1)/2. \tag{67}$$

Jelöléseinkkel a vizsgált modell a következőképpen írható fel:

$$g_{11}(x_1) = x_1^2/2, \quad g_{21}(x_1) = -x_1, \tag{68}$$

$$\xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 1. \tag{69}$$

A keresleti és a kínálati függvényeket a III. fejezet *E)* pontjának jelöléseivel írjuk le. Először, a kormányos keresleti függvénye az $U(y_1) - p_1 y_1$ különbség maximalizálásból adódik, azaz

$$\eta_1(p_1) = 1/2p_1. \tag{70}$$

[58] Lange elismeri ezt a lehetőséget, de kivételesnek tekinti; lásd: Socialism, 69—70. 82. old.

[59] Létezik egy harmadik probléma is, olyan típusú, amelyet nem hangsúlyoztunk ebben a tanulmányban. Ha az optimális eljárásvolumen olyan, hogy a határnyereségesség negatív értékekről vált pozitívakra, akkor a hely minimális profitot ad, nem pedig maximálist. Bár ez nem okoz nehézséget a működés formális szabályait tekintve, az eljárás menedzserének érdekeltsége jóval alacsonyabb, mint a konkáv esetben, ahol a társadalmi optimumok profitmaximumoknak felelnek meg.

Az eljárás menedzsere y_1-et úgy választja, hogy a határnyereségesség nulla legyen. Mivel $\pi_1(x_1)=p_1g_{11}(x_1)+p_2g_{21}(x_1)=(p_1x_1^2/2)-p_2x_1$, $d\pi_1/dx_1=p_1x_1-p_2=0$, az $x_1=p_2/p_1$. Az eljárás volumenének ilyen választása a következő túlkínálati függvényt származtatja a két árura, (68)-ba való behelyettesítéssel:

$$\gamma_{11}(p_1, p_2) = p_1^2/2p_2^2, \quad \gamma_{21}(p_1, p_2) = -(p_2/p_1). \tag{71}$$

Az optimális elosztás azonnal nyilvánvaló: mivel a kibocsátás mindig kívánatos, és a ráfordításnak növekvő függvénye, legyen egyszerűen $x_1=1$, következésképpen $y_1=1/2$. Ha az optimum környezetéből indulunk, akkor eltekinthetünk a nemnegativitási feltételektől. A III. fejezet *E)* pontjához hasonló árigazodási modell a következő alakot ölti:

$$dp_1/dt = -\gamma_1(p_1, p_2) = \eta_1(p_1)-\gamma_{11}(p_1, p_2)-\xi_1 = (1/2p_1)-(p_2/p_1)^2/2, \tag{72}$$

$$dp_2/dt = -\gamma_2(p_1, p_2) = -\gamma_{21}(p_1, p_2)-\xi_2 = (p_2/p_1)-1. \tag{73}$$

E rendszer egyensúlyi pontja megtalálható, ha a jobb oldalakat nullává tesszük, azaz $\gamma_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2)=0$ és $\gamma_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2)=0$. Az (73)-ból $p_1=p_2$ az egyensúlyban; a (72)-be behelyettesítve adódik, hogy $\bar{p}_1=\bar{p}_2=1$. A (72)—(73) lokális stabilitásának vizsgálatához ki kell számítanunk a (72)—(73) jobb oldalainak p_1 és p_2 szerinti parciális deriváltjainak mátrixát az egyensúlyi pontban; a stabilitási feltétel az, hogy e mátrix sajátértékeinek valós része negatív legyen.[60] Közvetlen számolás adja, hogy a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet kvadratikus, gyökei: $(3\pm17)/4$, tehát az egyik sajátérték pozitív, és a (72)—(73) rendszer instabil.[61]

[60] Lásd *Samuelson: i.m.* 270—274. old.

[61] Létezik olyan gradiens módszer, amely a *13. tétel*nek (vagy általánosabban az *1. tétel*nek) felel meg, és amelyik lokális maximumhoz konvergál az általános esetben. Ezt úgy definiáljuk, hogy a feltétel nélküli maximalizálás gradienséhez olyan közeli irányban mozogjon a rendszer, amennyire csak ez lehetséges a korlátozó feltételek mellett. Az erőforrás-elosztási modellben ez azt követelné meg, hogy minden áru túlkínálata nulla legyen a közelítési eljárás minden pillanatában, s nem csak az egyensúlyban (a szabad áruktól eltekintve). Nem látunk olyan utat, amely e követelményt decentralizált formában kielégítené. E gradiens eljárást lásd *G. E. Forsythe:* Computing Constrained Minima with Lagrange Multipliers. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 3. (1955) 173—178. old.; *Arrow* és *Solow: i.m.* 3. fejezet.

C) A határköltségeknek megfelelő árra vonatkozó megjegyzések

Tegyük fel, hogy a j-edik eljárásnak egyetlen kibocsátása van, mondjuk az első áru, és az eljárás volumenét a kibocsátás méri. Ekkor $g_{1j}(x_j)=x_j$ és $-g_{ij}(x_j)$ az i-edik áruból az egységnyi első áru termeléséhez szükséges ráfordítás ($i=2, \ldots, s$). Világos, hogy

$$d\bar{\pi}_j/dx_j = \bar{p}_1 - \sum_{i=2}^{s} \bar{p}_i[-g'_{ij}(x_j)]. \tag{74}$$

Mivel $-g_{ij}(x_j)$ a kibocsátás egységnyi növeléséhez szükséges ráfordítás az i-edik áruból, a (74) közismert módon értelmezhető: a határnyereségesség nem más, mint az ár mínusz a határköltség. A *b)* feltétel ekkor azt mondja, hogy optimum esetén az ár egyenlő a határköltséggel, kivéve, ha egy eljárást egyáltalán nem alkalmazunk, ekkor az ár kisebb is lehet, mint a határköltség.[62]

Így a határköltségnek megfelelő ár közismert szabályához jutottunk mint az optimális elosztás feltételéhez, éspedig mind növekvő, mind csökkenő hozadék esetén; azaz egy pozitív szinten használt eljárás esetén a kibocsátást úgy kell megválasztani, hogy a határköltség egyenlő legyen az árral. Csökkenő hozadék esetén a határköltséggörbe emelkedő, és szabályunk a maximális profitnak megfelelő pontot választja. Növekvő hozadék esetén azonban a határköltség csökkenhet és a (társadalmilag) optimális kibocsátás minimális profitot hoz.

A nemnegativitási feltételtől eltekintve, ekkor a szokásos határköltség szerinti árazás abban az esetben helyes, ha egyedi eljárásokra alkalmazzák, ahogy ezt mi tettük modellünkbe. De a feltételt általában vállalatokra alkalmazzuk, ahol a vállalat a mi megfogalmazásunkban olyan döntéshozó egység, amely több eljárást szabályoz. Ebben az alakban — az uralkodó véleménnyel ellentétben — nem helyes az az állítás, hogy az optimális erőforrás-elosztás általában megfelel az ár és a határköltség egyenlőségének, az utóbbinak a szokásos definíciójára gondolva.

Ennek belátására felidézzük, hogy a közgazdasági irodalomban a költségfüggvényt mint adott kibocsátásnak adott árak melletti *minimális* költségét definiálják.[63] A ha-

[62] Ténylegesen ez az értelmezés nem függ az eljárásvolumen és a kibocsátás azonosításától. Mindig felírhatjuk, hogy

$$d\bar{\pi}_j/dx'_j = g'_{1j}(x_j)\left\{\bar{p}_1 - \sum_{i=2}^{s} \bar{p}_i[-g'_{ij}(x_j)/g_{1j}(x_j)]\right\}$$

A $-g'_{ij}(x_j)/g'_{1j}(x_j)$ hányados világosan a kibocsátás egységnyi növeléséhez szükséges i-edik ráfordítás határnövekménye, így a kapcsos zárójelben levő kifejezés az ár és a határköltség közti különbség. Mivel a $g_{1j}(x_j)$ tényező szükségképpen pozitív, a szövegben szereplő állítás mindig ekvivalens a *b)* feltétellel.

[63] Jellegzetes hivatkozások a következők: *G. J. Stiegler:* The Theory of Price (javított kiadás: New York: Macmillan, 1952) 127—129. old.; *K. E. Boulding:* Economic Analysis, (Harmadik kiadás; New York: Harpers, 1955) 34. fejezet. A költségnek ez a definíciója a helyes a vállalatelméletben, akár verseny, akár monopolóium esetén: a profit maximalizálása megköveteli a bevétel és a

tárköltség ekkor egyszerűen a költségfüggvénynek a kibocsátás szerinti deriváltja. Ekkor a határköltség és az ár egyenlőségét kimondó szokásos szabályból az következik, hogy a vállalat kibocsátását minimális költséggel állítják elő. Ez az állítás, ésszerű látszata ellenére, általában nem helyes szabály az erőforrások optimális elosztására. Tekintsünk például egy vállalatot, amelyik két eljárást alkalmaz, azonos kibocsátással, de különböző ráfordítással; mindkét eljárás növekvő hozadékú. Legyen $f_1(y_1)$ az első ráfordításból szükséges mennyiség az y_1 volumenú termeléshez, ha az első eljárást alkalmazzuk; és legyen $f_2(y_2)$ a második ráfordításból szükséges mennyiség az y_2 volumenű termeléshez, ha a második eljárást alkalmazzuk. Legyen ξ_1 és ξ_2 rendre az első és a második ráfordításból kezdetben rendelkezésre álló mennyiség. Növekvő hozadékot teszünk fel, tehát $f_1''(y_1)<0$ és $f_2''(y_2)<0$. A költségminimalizálás szabálya — minden adott kibocsátásnál — a következő alakot igényli: Válasszunk olyan y_1-et és y_2-t, amely minimalizálja $p_1 f_1(y_1)+p_2 f_2(y_2)$-t az $y_1+y_2=y$ feltétel mellett, ahol p_1 és p_2 rendre az első és a második ráfordítás ára. Ez ekvivalens

$$\psi(y_1) = p_1 f_1(y_1)+p_2 f_2(y-y_1)$$

minimalizálásával y_1 szerint, a $0 \leqq y_1 \leqq y$ feltétel mellett. Differenciálással $\psi''(y_1)<0$ az egész intervallumban, tehát a minimum vagy $y_1=0$, vagy $y_1=y$, azaz $y_2=0$ esetén valósul meg. Következésképpen p_1, p_2 és y értékétől függetlenül az

$$f_1(y_1) < \xi_1, \quad f_2(y_2) < \xi_2$$

egyenlőtlenségpárból az egyiknek teljesülnie kell.

Másrészről a társadalmilag optimális erőforrás-elosztás megköveteli az y_1+y_2 kibocsátás maximalizálást $f_1(y_1) \leqq \xi_1$ és $f_2(y_2) \leqq \xi_2$ feltételek mellett: Nyilvánvaló, hogy a maximum elérhető, ha y_1-et és y_2-t úgy választjuk, hogy teljesüljön

$$f_1(y_1) = \xi_1, \quad f_2(y_2) = \xi_2.$$

Tehát lehetetlen, hogy a költségminimalizálás szabálya ebben az esetben optimális erőforrás-elosztáshoz vezessen. A minimumköltség-megoldás társadalmilag nem hatékony, mert kihasználatlanul hagy olyan erőforrásokat, amelyeknek pozitív hasznosságuk van, függetlenül a tényezőárak választásától.

---

költség közti különbségnek az itt definiált módon való maximalizálását, vagy ami ekvivalens ezzel: a határbevétel és a határköltség egyenlővé tételét.

Azok a szerzők, akik az optimális elosztással — növekvő hozadék esetén — foglalkoztak, általában nem voltak olyan óvatosak, hogy definiálják a határköltséget; azonban Lange explicite ugyanazt a definíciót adja, mint mi (116—117. old.).

D) Optimális elosztás tökéletlen versenynél

Abból a célból, hogy foglalkozzunk az *1. tétel* hátrányaival, amelyek az optimális erőforrás-elosztás meghatározásánál növekvő hozadék esetén lépnek fel, visszatérünk a *3.* és a *4. tétel*hez, amelyek az optimális elosztást lokális nyeregpontként jellemzik. Szemben az *1. tétel*lel, ezeket a feltételeket csak lokális maximumok elégítik ki, más stacionárius pontok nem.

Először tekintsük a *3. tétel* alkalmazását az erőforrás-elosztási feladatra. A transzformált korlátozó feltétellel rendelkező konkávizált Lagrange-függvény a következő alakot ölti:

(75) $$L^*(y_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_m;\ p_1, \ldots, p_s/\eta) =$$

$$= U(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{s} p_i[1-(1-g_i)]^{1+\eta_i},$$

ahol a $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ túlkínálatot (46) és (47) határozza meg.

Az optimális elosztást lokális nyeregpontként jellemezzük. Mivel L^* lineáris függvénye a p_i-knek, amelyek szerint minimumot veszünk, azt kapjuk, hogy

(76) $1-(1-\bar{g}_i)^{1+\eta_i} \geqq 0$; minden olyan i-re, amelyre szigorú egyenlőtlenség áll, $\bar{p}_i = 0$.

Itt $\bar{g}_i$ az egyensúlyi túlkínálat, azaz $g_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, y_1, \ldots, \bar{y}_n)$. Azonban könnyű belátni, hogy az

$$1-(1-\bar{g}_i)^{1+\eta_i}$$

kifejezés aszerint pozitív, nulla vagy negatív, hogy $\bar{g}_i$ pozitív, nulla vagy negatív. Valóban eredetileg úgy választottuk ezt a kifejezést, hogy rendelkezzék ezekkel a tulajdonsággal. (Lásd a II. fejezet *C)* pontjában a (37) előtti megjegyzéseket.) Innen a (76) ekvivalens a

(77) $$\bar{g}_i \geqq 0; \quad \text{ha} \quad \bar{g}_i > 0, \quad \text{akkor} \quad \bar{p}_i = 0.$$

összefüggéssel, amint ezt vártuk.

Kapcsoljuk össze a nyeregpontismérv maximalizálási részét a (77)-tel:

14. tétel. Bizonyos regularitási feltételek mellett a lokálisan optimális elosztás szükséges és elégséges feltétele a következő:

a) $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ maximalizálja az $U(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i(1-(1-g_i/x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)^{1+\eta_i})$ kifejezést;

b) $g_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \geqq 0$; ha $g_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) > 0$, akkor $\bar{p}_i = 0$, ahol η_i-ket elég nagynak választottuk.

Az *a)* feltételnek intézményi értelmezés adható. Tegyük fel, hogy a kormányos saját funkciói mellé felveszi az eljárásmenedzserekét is, tehát mind az y_i-ket, mind

az x_i-ket ő választja meg. Ugyanakkor tegyük fel, hogy az i-edik áru őre bármely u_i mennyiséget megvásárol, amely $\bar{p}_i[1-(1-u_i)^{1+\eta_i}]$ összegért rendelkezésre áll. Ez a függvény az i-edik piac teljes bevételi függvénye. A kormányos ekkor hasznosságának és a túlkínálatából származó bevételének összegét maximalizálja (a „bevétel" természetesen negatív, ha túlkereslet van). A kormányos ebben az értelmezésben piacok egész sorával foglalkozik, amelyeken monopolista vagy monopszonista.

Ebben a megfogalmazásban a p_i-k nem versenypiaci árak, hanem paraméterek, amelyek a bevételi függvények elhelyezkedését befolyásolják, de az alakját nem. Ezért *bevételi paraméterek* (revenue paraméters) elnevezéssel hivatkozunk rájuk a továbbiakban. A *b)* feltétel biztosítja, hogy egyensúlyi helyzetben a bevételi paramétereket úgy választják meg, hogy a kormányos túlkínálata a szabad javakból nulla (ha $\bar{p}_i=0$, akkor a bevétel nulla).

Eddig az intézményes értelmezés nagyon centralizált volt. Mindössze azt tettük, hogy átfogalmaztuk a feltételes maximumfeladatot egy feltétel nélküli maximumfeladattá és egy megengedettségi feltétellé. Azonban minden feltétel nélküli maximalizálás burkoltan decentralizált elemeket tartalmaz. Ha $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p$ maximalizálja $f(z_1, \ldots, z_p)$ függvényt, akkor igaz az, hogy z_1 maximalizálja $f(z_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_p)$ függvényt mint a z_1 változó függvényét, és hasonló a helyzet a többi változóval is. A *9. tétel* esetében a feltétel nélküli maximalizálás szélsőségesen egyszerű volt (adott $\bar{p}_i$-k mellett), mert a maximalizálandó függvény olyan függvények összege volt, ahol mindegyik függvény más-más változótól függött. A *14. tétel*ben a maximalizálás nem ilyen egyszerű, de az imént sugallt gondolatmenet szerint jelen van a decentralizáció bizonyos foka, amely dinamikus alakban hangsúlyozottabb.

Legyen

$$h_{ij} = g_i - g_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, m); \tag{78}$$

$$h_i = g_i + y_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{79}$$

A (46)—(47) szerint h_{ij} független x_j-től, bár a j-edik eljárás volumenén kívül az összes többi eljárás volumenétől függ; és a kívánt áruk esetében még y_i-től is. Hasonlóan h_i függ az eljárások volumenétől, de nem függ az y_i-ktől. Az előző érvelést követve, ha x_j szerint maximalizálunk, az egyensúlyi értékükön rögzítettnek véve az y_i-ket és a többi eljárás volumenét, akkor

$$\bar{x}_j \text{ maximalizálja a } \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i\{1-[1-\bar{h}_{ij}-g_{ij}(x_j)]^{1+\eta_i}\} \text{ kifejezést.} \tag{80}$$

Az $U(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ tagot elhagytuk, mivel x_j szerint állandó. Most is, mint korábban, a szimbólum feletti vonás egyensúlyi értékre utal. Hasonlóan

$$\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n \text{ maximalizálja } U(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_i[1-(1-\bar{h}_i+y_i)^{1+\eta_i}] = t. \tag{81}$$

A (80) és a (81) egyenletek bizonyos fokú decentralizációt sugallnak. Minden eljárás menedzsere úgy választja x_j-t, hogy a (80) maximális legyen; a kormányos úgy választja a végső kereslet összetevőit, hogy a (81) maximális legyen. Most mindannyian egy tökéletlen versenyzői piacon működnek és mindannyian több információt igényelnek kívülről, mint a konkáv esetben. A j-edik eljárás menedzserének nemcsak a $\bar{p}_j$-ket kell ismernie, hanem a $\bar{h}_{ij}$-ket is ($i=1, \ldots, s$); a kormányosnak mind $\bar{p}_i$-t, mind $\bar{h}_i$-t ismernie kell ($i=1, \ldots, n$).

A *14. tétel* dinamikus megfelelőjét a *6. tétel*ből vezethetjük le. E tételt az erőforrás-elosztási feladatra alkalmazva, egyszerű differenciálással aódik:

$$L^*_{y_i} = U_{y_i} - (1+\eta_i)\, p_i (1-g_i)^{\eta_i}, \tag{82}$$

$$L^*_{x_j} = \sum_{i=1}^{s} (1+\eta_i)\, p_i (1-g_i)^{\eta_i} g'_{ij}. \tag{83}$$

Az ezeken a deriváltakon nyugvó gradiens módszer megköveteli a kormányostól és az eljárásmenedzserektől, hogy megkeressék a (81), illetve a (80) feltétel nélküli maximumokat, ahol az egyensúlyi értékek helyett folyó értékek szerepelnek. A szükséges információmennyiség nagyobb, mint a *10.* és a *11. tétel*eknél (konkáv eset), de nem sokkal nagyobb. A kormányosnak és minden eljárás menedzserének a hasznossági, illetve a technológiai függvényén kívül, jól ismernie kell minden piacon mind a bevételi paramétert, mind a túlkínálatot.

A bevételi paraméterek mozgása egyszerűen a dinamikus megfelelője a (76)-nak.

15. tétel. Bizonyos regularitási feltételek mellett és elég nagy η_i-kre, a következő differenciálegyenletekből álló rendszer:

$$a)\quad dy_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad L^*_y < 0 \ \text{és} \ y_i = 0, \\ L^*_{y_i} & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$b)\quad dx_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad L^*_{x_j} < 0 \ \text{és} \ x_i = 0, \\ L^*_{x_j} & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$c)\quad dp_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad [1-g_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)^{1+\eta_i} < 1 \ \text{és} \ p_i = 0, \\ [1-g_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)]^{1+\eta_i} - 1 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

az elosztás egyik lokális optimumához konvergál. Itt $L^*_{y_i}$-t és $L^*_{x_i}$-t rendre a (82) és a (83) határozza meg.

Így a *15. tétel* olyan dinamikus rendszert ad, amely lokálisan valamelyik optimumhoz konvergál, és amely nagyon korlátozott információs követelményeket ró résztvevőire.

A *4. tétel* a *14. tétel*hez hasonlóan egy optimum valamilyen statikus jellemzéséhez vezet. Új vonás, hogy megjelenik a w_i változók halmaza, amelyek az egyensúlyi helyzetben megengedett túlkínálatot képviselik. Ha visszautalunk a *4. tétel*hez vezető okoskodásra, látjuk, hogy a w_i-ket azért vezettük be, hogy az egyenlőtlenség alakú

korlátozó feltételeket egyenlőség alakú feltételekké változtassuk át. Ekkor az egyensúlyi helyzetben teljesülnie kell a $g_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) - w_i = 0$ korlátozó feltételnek, azaz

(84) $$\bar{g}_i = \bar{w}_i; \quad \text{ha} \quad \bar{g}_i > 0, \quad \text{akkor} \quad \bar{p}_i = 0.$$

A (84) összefüggés második része intuitíve nyilvánvaló, és precízen is bizonyítható.

A *4. tétel*ben adott nyeregpont jellemzésben a kvadratikusan módosított konkávizált Lagrange-függvénynek a w_i-k ugyanúgy maximalizáló változói, mint az x_j-k vagy az y_i-k. Azonban ha követjük az előző gondolatmenetet arról, hogy minden maximalizálásban burkoltan szerepel decentralizálás, akkor azt mondhatjuk, hogy a kormányos és az eljárásmenedzserek a Lagrange-függvényt saját hatáskörükbe eső változók szerint maximalizálják, a $\bar{p}_i$-ket és a $\bar{w}_i$-ket adottnak véve. Nevezzük a w_i-ket *rendelkezési paramétereknek* (disposal parameters). Ekkor adott bevételi és rendelkezési paraméterek esetén, ugyanúgy mint a *14. tétel*ben, a kormányosnak és az eljárásmenedzsereknek a ráfordítások és a kibocsátások nemlineáris függvényét kell maximalizálniuk. Ismét úgy képzelhetjük el őket, mint akik tevékenységükkel hasznosságot és profitokat akarnak maximalizálni, a tevékenységekbe beleértve a tökéletlen piacokon folytatott cserét is.

16. tétel. Bizonyos regularitási feltételek mellett és elég nagy λ esetén, a lokálisan optimális elosztás szükséges és elégséges feltétele a következő:

a) $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ maximalizálja az

$$U(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_i(\bar{g}_i - \bar{w}_i) - \lambda(g_i - \bar{w}_i)^2] \quad \text{kifejezést;}$$

b) $\bar{g}_i = \bar{w}_i \geqq 0$; ha $\bar{w}_i > 0$, akkor $\bar{p}_i = 0$.

A *16. tétel* dinamikus párját úgy kapjuk meg, ha a *6. tétel*t az erőforrás-elosztási feladatra alkalmazzuk. A szükséges differenciálások egyszerűek.

17. tétel. Bizonyos regularitási feltevések mellett és elég nagy λ esetén, a következő differenciálegyenletekből álló rendszer:

a) $$dy_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad L^+_{y_i} < 0 \text{ és } y_i = 0, \\ L^+_{y_i} & \text{egyébként;} \end{cases}$$

b) $$dx_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad L^+_{x_j} < 0 \text{ és } x_j = 0, \\ L^+_{x_j} & \text{egyébként;} \end{cases}$$

c) $$dw_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad p_i - 2\lambda(g_i - w_i) > 0 \text{ és } w_i = 0, \\ -p_i + 2\lambda(g_i - w_i) & \text{egyébként;} \end{cases}$$

d) $$dp_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad g_i > w_i \text{ és } p_i = 0, \\ w_i - g_i & \text{egyébként;} \end{cases}$$

az elosztás valamilyen lokális optimumához konvergál. Az *a)*-ban és a *b)*-ben rendre

e) $$L_{y_i}^{+} = U_{y_i} - p_i + 2\lambda(g_i - w_i)$$

f) $$L_{y_i}^{+} = \sum_{i=1}^{s} [p_i - 2\lambda(g_i - w_i)] g'_{ij}.$$

Az egyes résztvevők igazodási szabályai viszonylag egyszerűek. A kormányosnak és az eljárásmenedzsereknek — saját hasznossági, illetve technológiai függvényeik mellett — ismerniük kell a p_i bevételi paramétert és minden áru g_i túlkínálatát. Az i-edik áru őrének csak g_i-t kell ismernie, és a *c)—d)* differenciálegyenlet-párból meghatározhatja mind a bevételi, mind a rendelkezési paramétert.

E) Optimális elosztás nemlineáris árigazodás útján

Ha megvizsgáljuk a (82)-t és a (83)-at, látjuk, hogy előfordul bennük egy közös kifejezés, amelyet érdemes külön jelölni:

(85) $$q_i = (1+\eta_i) p_i (1-g_i)^{\eta_i}.$$

Ha megnézzük a *15. tétel a)* és *b)* feltételeit, láthatjuk, hogy mind a kormányos, mind az eljárásmenedzserek a hasznosság és a költség közti különbséget, illetve a profitokat maximalizálják, ha a q_i-kat tekintjük áraknak. Ezeket az árakat most egy meglehetősen bonyolult igazodási folyamat határozza meg; először egy p_i segédváltozót határozunk meg a *15. tétel c)* egyenletéből, majd kiszámítjuk q_i-t a (85)-ből. Azonban az információs igények csekélyek, mivel az őrnek, akire e műveletek hárulnak, még mindig csak a g_i túlkeresletet kell ismernie minden időpontban.

18. tétel. Bizonyos regularitási feltételek mellett és elég nagy η_i-knél, a következő dinamikus rendszer:

a) $$dy_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } U_{y_i} < q_i \text{ és } y_i = 0, \\ U_{y_i} - q_i & \text{egyébként;} \end{cases}$$

b) $$dx_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } d\tilde{\pi}_j/dx_j < 0 \text{ és } x_j = 0, \\ d\tilde{\pi}_j/dx_j & \text{egyébként;} \end{cases}$$

c) $$q_i = (1+\eta_i) p_i (1-g_i)^{\eta_i},$$

d) $$dp_i/dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } g_i > 0 \text{ és } p_i = 0, \\ (1-g_i)^{1+\eta_i} - 1 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

az elosztás valamilyen lokális optimumához konvergál. A *b)*-ben

e) $$\tilde{\pi}_j(x_j) = \sum_{i=1}^{s} q_i g_{ij}(x_j).$$

A *18. tétel*ben az egyes résztvevők információs igényei nem különböznek a *10. tétel* konkáv esetétől. A centralizálás egyetlen eleme az, hogy előzetes döntést kell hozni az η_i állandókról, és az, hogy globális optimum csak akkor biztosítható, ha a kezdő érték elég közel van az optimumhoz.

Némileg érdekes az a határeset, amikor a kormányos és az eljárásmenedzserek igazodási sebességei a végtelenig nőnek. Ebben az esetben a kormányosnál szükségképpen $U_{y_i}=q_i$, kivéve az $y_i=0$ esetet, és hasonlóan az eljárásmenedzsereknél $d\tilde{\pi}_j/dx_j=0$, kivéve az $x_j=0$ esetet.[64] Ekkor visszatérünk a keresletnek és kínálatnak a *B)* pontban röviden tárgyalt modelljéhez. De a *18. tétel c)* és *d)* árigazodási szabályai most instabilitást okoznak.

19. tétel. A *18. tétel* érvényes marad, ha az *a)* és a *b)* helyett:

$$a') \qquad U_{y_i} \leqq q_i; \quad \text{ha} \quad U_{y_i} < q_i, \quad \text{akkor} \quad y_i = 0;$$

$$b') \qquad d\tilde{\pi}_j/dx_j = 0; \quad \text{ha} \quad d\tilde{\pi}_j/dx_j < 0, \quad \text{akkor} \quad z_j = 0.$$

F) Optimális elosztás árspekuláció révén

A *17. tétel*nek alternatív intézményi értelmezés adható, hasonló módon, mint amely a *15. tétel*től a *18. tétel*hez vezetett. Ha megnézzük a *17. tétel e)* és *f)* feltételeit, akkor természetesnek találjuk a következő meghatározás bevezetését:

$$p_i^f = p_i + 2\lambda(w_i - g_i). \tag{86}$$

Ha figyelembe vesszük a *17. tétel d)* feltételét, akkor látjuk, hogy

$$p_i^f = p_i + 2\lambda(dp_i/dt) \tag{87}$$

kivéve, ha $g_i > w_i$ és $p_i=0$. Azaz p_i^f-t úgy tekinthetjük, mint az *i*-edik áru árára vonatkozó várakozást, amely a pillanatnyi változási sebesség extrapolálásán alapszik.[65] Most belátjuk, hogy a (87)-et érvényben lehet tartani az említett kivétel

[64] Meg kell említenünk, hogy ebben az eljárásban, x_j-t *nem* választják szükségszerűen úgy, hogy az eljárás profitja maximális legyen, a q_i-kat mint adott árakat tekintve. A választott x_j a (80) kifejezést maximalizálja, ahol $\bar{p}_i$-t és $\bar{h}_{ij}$-t pillanatnyi p_i és h_{ij} értéke helyettesíti; a (85) jelölésével az állítás következik. Így — mint azt Lange helyesen megjegyezte — a nulla határnyereség szabálya váltja föl a profitmaximalizálás szabályát növekvő hozadék esetén; azonban a fenti elemzés megmutatja, hogy stabil elosztási rendszerhez vezető árigazodási szabály nem egyszerű.

[65] A (87) típusú *extrapolációs várakozásokat* tanulmányozott a készletekkel kapcsolatban *L. Metzler:* The Nature and Stability of Inventory Cycles. c. cikkben Review of Economic Studies, XXIII (1941) 113—129. old., és az inflációs ármozgásokkal kapcsolatban *A. C. Enthoven:* Monetary Disequilibria and the Dynamics of Inflation. c. cikkben. Economic Journal Vol. 66. (1956) 256—270. old.; lásd még *A. C. Enthoven* és *K. Arrow:* A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium, Econometrica, Vol. 24. (1956) 288—293. old. Az e pontban tanulmányozott rendszer részletesebb vizsgálata megtalálható *Arrow* és *Solow i.m.* 4. fejezetében.

elhagyásával is. Mint a *4. tételt* követő *Megjegyzés*ben jeleztük, a kvadratikusan módosított konkávizált Lagrange-függvény nyeregpont tulajdonságai függetlenek attól, hogy a p_i-ket tetszőleges valós számnak vagy nemnegatív valós számnak tekintjük. A *17. tétel d)* összefüggése a megfelelő alak, ha p_i-t nemnegatív értékekre korlátozzuk. Ha a nemnegativitástól eltekintünk, akkor *d)*-nek csak a második sora releváns; a *17. tétel* igaz marad e változtatás után is. Ekkor a (87) általában is igaz.

20. tétel. Bizonyos regularitási feltételek mellett és elég nagy λ esetében, a következő differenciálegyenletekből álló rendszer:

a) $$dy_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } U_{y_i} < p_i^f \text{ és } y_i = 0, \\ U_{y_i} - p_i^f & \text{egyébként;} \end{cases}$$

b) $$dx_j/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } d\pi_i^f/dx_j < 0 \text{ és } x_j = 0, \\ d\pi_i^f/dx_j & \text{egyébként;} \end{cases}$$

c) $$dw_i/dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } p_i^f > 0 \text{ és } w_i = 0, \\ -p_i^f & \text{egyébként;} \end{cases}$$

d) $$dp_i/dt = w_i - g_i$$

e) $$p_i^f = p_i + 2\lambda(dp_j/dt)$$

valamilyen lokális optimumhoz konvergál. A *b)*-ben

f) $$\pi_j^f(x_j) = \sum_{i=1}^{s} p_i^f g_{ij}(x_j).$$

Az *a)* és a *b)* összefüggések azt mutatják, hogy a kormányos és az eljárásmenedzserek a várható árakon, nem pedig a ténylegeseken számított maximális előnyök irányában mozognak. A *c)—e)* egyenleteknek különböző intézményi értelmezés adható; az egyik értelmezés szerint az őr *c)—e)* szerint számítja ki a többiekkel közlendő várható árat. A várható árnak eléggé érzékenynek kell lennie a pillanatnyi árváltozási sebességre.[66]

[66] A *20. tétel* rendszere és értelmezése árvárakozásokként hasonló, de nem azonos *T. Kose:* Solutions of Saddle-Value Problems by Differential Equations, Econometrica, Vol. 24. (1956) 59—70. old. javaslatával.

G) A lineáris eset

Végül visszatérünk arra az esetre, ahonnan az egész vizsgálat elindult, azaz ahol a hasznossági függvény és az összes eljárás lineáris, tehát a lineáris programozás esetére. Ebben az esetben, mint azt a II. fejezet *D)* pontjában már láttuk, a gradiens eljárás normálisan végtelen oszcillációhoz vezet. Mivel kimutattuk, hogy a stabilitás a Lagrange-függvény szigorú konkávitásával kapcsolatos, természetes dolog a II. fejezet *C)* pontjában bevezetett konkávizálási módszerek egyikével próbálkozni. Mivel a feladat lineáris, a Lagrange-függvény — hogy úgy mondjuk — a szigorú konkávitás határán van. Azt várhatjuk, hogy a Lagrange-függvény bármely módosítása, amely a konkávitást növeli, megfelel. Ez a várakozás helyes, legalábbis addig, amíg a transzformált korlátozó feltételekkel történő konkávizálásra szorítkozunk.

21. tétel. Ha $U(y_1, \ldots, y_n)$ és mindegyik $g_{ij}(x_j)$ eljárásfüggvény lineáris, akkor a *15. tétel* differenciálegyenlet-rendszere bármely $\eta_i > 0$ esetén az elosztás valamelyik globális optimumához konvergál. Ugyanígy a *18.* és *19. tétel* dinamikus rendszerei valamelyik globális optimumhoz konvergálnak e feltételek mellett.[67]

A *21. tétel* módszere távolról sem az egyetlen gradiens módszer, amely lineáris programozási feladatok megoldására szolgálhat. A nullaösszegű kétszemélyes játékkal való ekvivalencia miatt[68] a Brown és Neumann által ennek megoldására kifejlesztett módosított gradiens módszer alkalmazható az előbbire is.[69] Természetesen vannak a gradiens módszerektől lényegesen különböző más módszerek is, amelyek közül a legismertebb a szimplex módszer. Bár még nincs elegendő számítási tapasztalatunk, nagyon valószínű, hogy a szimplex módszer fölényben van minden gradiens típusú eljárással szemben. De tanulmányunk szempontjából szemlélve a decentralizálás nagyon fontos erényét hiányolhatjuk belőle.

[67] *21. tétel* bizonyítását lásd *K. Arrow—L. Hurwicz:* Gradient Method for Resource Allocation. i. m. *3. tétel.* E módszer illusztrációja — gépi számítási problémákról szóló megjegyzésekkel — megtalálható *T. Marschak:* An Example of a Modified Gradient Method for Linear Programming c. műve 9. fejezetében *K. Arrow—L. Hurwicz—H. Uzawa* i. m.-ben.

[68] Lásd a 38. lábjegyzetet.

[69] Lásd *G. W. Brown—J. von Neumann:* Solution of Games by Differential Equations. *H. W. Kuhn—A. W. Tucker:* (szerk.) Contributions to the Theory of Games I. Annals of Mathematical Studies No. 29. (Princeton, New Yersey: Princeton University Press, 1950) 73—80. old. Lineáris programozási alkalmazást lásd: *M. Fukuoka:* A Note on Convergence in Linear Programming Problems. Cowles Commission Discussion Paper. Economics: No 2108, July. 14, 1954.

Általános gazdasági egyensúly: cél, vizsgálati módszerek, kollektív választás[*1]

I. A GAZDASÁGI RENDSZER HATÉKONYSÁGA ÉS KOORDINÁCIÓJA

Adam Smith Nemzetek gazdagsága című könyvének megjelenése, 1776 óta a közgazdasági elemzés vissza-visszatérő témája az a figyelemre méltó összefonódottság, ami a nagyszámú gazdálkodó egyénnek az áruk vételére és eladására vonatkozó látszólag különálló döntései között fennáll. A mindennapi, természetszerű tapasztalat szerint van valamiféle egyensúly az egyesek által beszerezni és mások által pedig eladni kívánt áruk és szolgáltatások mennyisége között. A leendő vásárlók szokás szerint helyesen számíthatnak arra, hogy szándékaikat meg tudják valósítani, és a leendő eladók általában nem találják úgy, hogy nagy mennyiségű eladhatatlan terméket termeltek. Az egyensúly e tapasztalati valósága valóban annyira általános, hogy a nem szakmabelieknek egyáltalán nem okoz intellektuális problémát. Annyira magától értetődőnek tekintik, hogy nem hajlandóak megérteni azt a mechanizmust, amin keresztül az megvalósul. Ennek ellentmondásos következménye, hogy fogalmuk sincs a rendszer erejéről, és nem hisznek abban, hogy ez a rendszer jelentősen eltérhet a normális állapottól. Ez a reakció különösen háborús helyzetekben szembetűnő, amikor a keresletben radikális eltolódások következnek be. Ilyenkor az emberek magától értetődőnek tekintik, hogy a kialakult helyzet csupán árellenőrzéssel, jegyrendszerrel és a források közvetlen elosztásával oldható meg. Pedig nincs okunk azt hinni, hogy ugyanazok az erők, amelyek békeidőben működnek, ne volnának képesek létrehozni egy működő rendszert háború idején vagy a kereslet jelentős eltolódása esetén. (Vannak a szabadpiaci rendszernek nemkívánatos következményei, de az abszolút működésképtelenség nem tartozik ezek közé.)

Nem akarok végletesen fogalmazni. A kínálat és kereslet kiegyenlítődése messze van a tökéletestől. Ez a legnyilvánvalóbb a kapitalista rendszer történetéből, amelyet

* General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Techniques, Collective Choice. The American Economic Review, Vol. 64. No. 3., 1974. június.

[1] Kenneth J. Arrow — Harvard Egyetem. Ez a cikk az az előadás, amit Kenneth Arrow 1972 decemberében tartott Stockholmban, Svédországban, amikor a Közgazdasági Nobel-díjat megkapta. A cikk copyright © the Nobel Foundation 1973. Itt [The American Economic Review-ban (a szerk.)] a Nobel-alapítvány engedélyével közöljük, és megjelent a *Les Prix Nobel 1972.* kötetben is.

olyan visszatérő időszakok jellemeztek, amelyekben a munkaerő kínálata és a termelés számára rendelkezésre álló felszerelés felülmúlta felhasználásukat, néha — mint például a 30-as években — igen jelentős mértékben. Továbbá az általános kereslet és kínálat relatív egyensúlya, a háború utáni időszakban az USA-ban és Európában, nagymértékben a körültekintő kormányzati politikának volt az eredménye, és nem a piac automatikus kiegyensúlyozódási tendenciájának.

Mindezt összevetve, mégis figyelemreméltó az egyedi gazdasági döntések összefüggése. Ahogy a jövedelem növekszik és a kereslet eltolódik — például az élelmiszerektől a ruházkodás és a lakás felé —, a munkaerő és a termelőberendezések alkalmazkodnak. Ehhez hasonlóan — és a nem szakmabeliek számára még meglepőbb módon — kölcsönhatás van a technológia eltolódásai és a munkaerő elosztása között. Ahogy a technológia, az újításokon keresztül, egzogén módon fejlődik, az így felszabadult munkaerő nem marad véglegesen munkanélküli, hanem megtalálja helyét a gazdaságban. Igazán elképesztő, hogy mind az elméletet, mind a több mint egy évszázados történelem tanulságait még mindig mennyire félreértik. Másfelől a termelési eszközök növekvő felhalmozása emeli a reálbéreket, ami azután kiváltja a munkaintenzív termékek árának növekedését a kevés munkát felhasználó termékekéhez képest. Mindezek a jelenségek azt mutatják, hogy a gazdasági rendszer — nagyjában és egészében, valamint hosszú történeti időszakot tekintve — meglehetősen simán és valóban racionálisan alkalmazkodik azoknak az alapvető körülményeknek a változásához, amelyek között működik.

A gazdasági koordináció problematikus természete a szabad vállalkozáson alapuló gazdaságban a legkézenfekvőbb, azonban kisebb jelentőségűnek tűnhet egy szocialista vagy egy tervezett társadalomban. De ha egy kicsit elgondolkodunk egy ilyen társadalom termelési és fogyasztási döntésein, kiderül, hogy a koordináció legalapvetőbb kérdései, legalábbis a bonyolult termelés modern világában, nem szűnnek meg a szocializmusba vagy bármely más tervezési formába való átmenettel. A szabad vállalkozás világának tiszta modelljében az egyén — akár fogyasztó, akár termelő — a hordozója, mind az érdekeknek, illetve az ízlésnek, mind az információknak. Minden egyénnek meg vannak a maga vágyai és a gazdasági mechanizmus korlátai között ezek elérésére törekszik; de ezenkívül még azt is feltételezik róla, hogy önmagáról vagy legalább is a termelési és fogyasztási tevékenység valamely részterületéről több információval rendelkezik, mint a többiek. Lehetséges, hogy egy ideális szocialista társadalomban minden egyén a közjó mindenki által elfogadott eszméivel összhangban fog cselekedni, bár én személyesen ezt az elképzelést — amennyiben tagadja az egyének különbözőségének jelentőségét és értékét — sem reálisnak, sem kívánatosnak nem tartom. De még a legideálisabb szocialista társadalom sem fogja elkerülni a termelési eljárásokra vonatkozó információk sokféleségét. Ennek egyszerűen azért kell így lennie, mert az információszerzés költséges. Ezért továbbra is szükség lesz a koordinációra és valamilyen módon továbbra is gondoskodni kell arról, hogy a sokféle gazdasági szereplő tervei összességükben kiegyensúlyozottak legyenek.

Adam Smith óta a közgazdasági elméletet főként az foglalkoztatta, hogy hogyan megy végbe ez a koordináció; és e kérdésre eléggé világos válasz született az 1870-es években, Jevons, Menger és mindenekelőtt Léon Walras munkáiban: ez a válasz azon a tényen alapult, hogy a gazdaság minden szereplője az árak azonos rendszerével találja szemben magát és ez szolgáltatja azt a közös információáramot, amely a rendszer koordinációjához szükséges. Létezik egy olyan árrendszer — érveltek —, amely valamennyi termék keresletét és kínálatát egyenlővé teszi, és ha valamelyik piacon a kereslet nem egyezik meg a kínálattal, akkor legalább egy ár megváltozik, míg teljes egyenlőség esetén egyetlen ár sem változik meg. Ez utóbbi sajátosságok alapján a kereslet és kínálat ilyen feltételek melletti kiegyenlítődését, a matematikában és természettudományokban szokásos szóhasználatnak megfelelően, *egyensúly*nak nevezhetjük. Az „általános" jelző azt tükrözi, amely szerint nem beszélhetünk jogosan egyensúlyról egyetlen termék vonatkozásában: mert valamely áru piacán a kereslet és kínálat alakulása függ a többi áru árától is, így a gazdaság általános egyensúlyát nem lehet egyedi termékek egymástól független egyensúlyaira szétbontani.

Ma már az árelmélet legszigorúbb neoklasszikus változatára sem igaz teljesen, hogy a gazdaság egyedi szereplői számára az árak jelentik az egyensúly eléréséhez szükséges egyedül adekvát információt. Ezt a kérdést később fejtjük ki. A kritikusok egy része nagyobb hangsúlyt helyezett magukra a mennyiségekre, mint a jelzésekre. Ezek között nem kisebb tekintélyek voltak, mint a nagy Keynes [20]; lásd különösen Leijonhufvud Keynes-interpretációját ([24] különösen a 2. fejezet). Legújabban, szocialista tapasztalatokból kiindulva, ugyanezt az érvet fejtette ki Kornai [22]. Az én megítélésem szerint, ennek a kritikának van némi alapja, bár a kritikusok nem alkották meg a részletes erőforrás-elosztás igazi alternatív modelljét. Az alapkérdés megmaradt: hogyan transzformálódik egy általános aggregált mennyiség, mondjuk, mint a keynesi modellben a kereslet, az egyedi eladóknak szóló jelzések és ösztönzők sorozatává?

Ha a hangsúlyt a gazdaság leírásából a gazdaság megtervezésére helyezzük, akkor már nem olyan nehéz nem árjellegű koordináló mechanizmusokat elgondolni; a jegyrendszer — ilyen vagy olyan formában — valójában mindannyiunk számára ismerős. A koordináció tárgyalása során a hatékonyság kérdésébe ütközünk. Hosszú ideig azt tartották, hogy a kompetitív áregyensúly hatékony vagy optimális valamilyen értelemben, míg a jegyrendszeren alapuló elosztás nem az. Az optimalitási tétel pontos kifejtését és ilyen értelmezését Pareto ([34], 6. fejezet, 32—38. pont) és az 1930-as években tanárom Harold Hotelling [18] és Abram Bergson [9] világította meg. Az erőforrások elosztása akkor *Pareto-hatékony* (vagy *Pareto-optimális*), ha nincs olyan más megvalósítható elosztás, amely mindenkit jobb helyzetbe hozna (vagy ahogy inkább ki szokták fejezni, nincs olyan elosztás, amely mindenkit legalább ugyanolyan helyzetben hagy, és legalább egy valakit jobb helyzetbe hoz). Egy bizonyos fajta érvelés szerint — amit röviden vázolni fogok — a versenyegyensúly szükségképpen maga után vonja az erőforrások Pareto-hatékony elosztását.

Természetesen felismerték — legkifejezettebben talán Bergson —, hogy a Pareto-hatékonyságból semmilyen vonatkozásban nem következik az elosztás igazságossága. Az erőforrások elosztása lehet hatékony paretoi értelemben, és mégis hozhat óriási vagyont egyeseknek, és szörnyű szegénységet másoknak.

II. AZ ÁLTALÁNOS EGYENSÚLY HICKS—SAMUELSON-FÉLE MODELLJE

A következőkben formálisabban fogom kifejteni az általános versenyegyensúly modelljét, úgy ahogyan az nagyjából 1945 körül, elsősorban John Hicks [15] és Paul Samuelson [34] munkáiban részleteiben és szintetizálva kialakult. A versenyelemzés két alapelven nyugszik. Ezek: a gazdaság egyedi szereplőinek optimalizáló magatartása a számukra adott árak mellett, és — ha adottnak tételezzük fel ezt az egyedi magatartást — az árak olyan kialakulása, amely minden piacon egyenlővé teszi a kínálatot és a keresletet. A versenyfolyamat eredményét és a javak ebből következő elosztását azután a Pareto-hatékonyság és az elosztásra vonatkozó kiegészítő feltételek kategóriáiban kell értékelni.

Az egyének maximalizáló magatartását igen átfogóan ismertette Samuelson a Nobel-díj átvételekor tartott előadásában [35], így itt most nem érintem ezt a területet. Csupán néhány alapvető pontra akarom emlékeztetni a hallgatót. Az első, hogy a fogyasztó választásai egy (háztartási) költségvetési korláttól (budget constraint) függnek. A fogyasztó kezdetben gazdaságilag értékes javak — mint például speciális munkafajták, föld vagy más tulajdon — valamilyen mennyiségével rendelkezik. Tegyük fel, hogy összesen n termék van, és legyen $\bar{x}_{hi}$ az i-edik terméknek az a mennyisége, amelyet egy h-adik egyén kezdetben birtokol (ez a legtöbb termékre vonatkozóan lehet nulla). Ha p_i az i-edik termék ára, akkor a kiadásokra rendelkezésre álló összes jövedelme

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_{hi},$$

Ezért $x_{h1}, \ldots, x_{hn}$ javak bármely olyan kombinációját választhatja fogyasztás céljára. amely jövedelménél nem kerül többe,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_{hi} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_{hi}.$$

Feltesszük, hogy az egyén — e költségvetési korláton belül — a lehetséges fogyasztási kombinációk közül az általa leginkább preferált kombinációt választja. Ebben az összefüggésben a „leginkább preferált" leghasználatosabb értelmezése a következő: az összes lehetséges kombináció halmazán egy olyan preferenciarendezés van, amely szerint minden kombinációpár elemei közül vagy az egyik preferáltabb a másiknál, vagy pedig közömbösek egymással szemben; és e páronkénti megítélésnek megvan

az a konzisztenciatulajdonsága, amit a logikával foglalkozók „trazitivitásnak" neveznek. Például ha az A kombináció preferált a B-vel szemben, és a B a C-vel szemben, akkor az A a C-vel szemben preferált lesz. A preferenciának ez az „ordinalista" szemlélete eredetileg Paretónak és Irving Fischernek tulajdonítható, 1900 körül keletkezett, és fejlődést jelentett a korábbi, „kardinalista" szemlélethez képest. Ez utóbbi szerint minden kombinációhoz mérhető kielégítettségi vagy „hasznossági" szint tartozik, és a fogyasztó azt a kombinációt választja, amelyik a költségvetési halmazon belül maximalizálja a hasznosságot. Kézenfekvő, hogy a kardinális hasznosság maga után vonja az ordinális preferenciát, de fordítva ez nem igaz; és ha a hasznosság operatív jelentősége kizárólag a fogyasztói választás magyarázatában rejlik, akkor világos, hogy két olyan hasznossági függvény, amely ugyanazt a preferenciarendezést határozza meg, operacionálisan megkülönböztethetetlen.[2]

Ebben az esetben a leginkább preferált kombináció az összes ár függvénye, $x_{hi}(p_1, \ldots, p_n)$. Vegyük észre, hogy ebből a szempontból valamennyi ár nyilvánvalóan részt vesz minden egyes termék keresletének meghatározásában. Először is, bármely ár emelkedése nyilvánvalóan csökkenti az összes többi termékre jutó fennmaradó jövedelmet. Szűkebb értelemben azonban vannak olyan termékek, amelyek kereslete szorosan összefügg másokéval; így például az autók száma, s így az autó ára a benzin keresletére talán jobban hat, mint magának a benzinnek az ára. Ez a példa világosan mutatja az egyes áruk kereslete közti kölcsönös összefüggést.

A fogyasztói választás optimalizáló természete — ahogy azt valamennyien tudjuk — sokkal explicitebbé tehető. Idézzük fel bármely egyénre vonatkozó két termék *helyettesítési határrátájának* Hicks által adott definícióját. Egy tetszőlegesen adott $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ kombináció esetén tekintsük az összes többi, ehhez képest közömbös, azaz se nem jobb, se nem rosszabb kombinációt. Ha két termék kivételével valamennyi termék mennyiségét változatlanul tartjuk, mondjuk $x_k = x_k^0$ $(k \neq i, j)$, akkor x_i-t ezen a közömbösségi felületen x_j függvényének tekinthetjük. Ekkor a $-dx_i/dx_j$ kifejezés az $x_i = x_i^0$ pontban, minden i-re, a j-edik termék i-edik termékben kifejezett helyettesítési határrátája. Ez — első megközelítésben — az i-edik terméknek az a mennyisége, amelyet egységnyi j-edik termék elveszítésének kompenzálása igényelne. Az optimalizáló fogyasztó ezt a helyettesítési határrátát egyenlővé teszi az árak arányával; p_j/p_i-vel; mert ha e két arány nem lenne egyenlő, akkor el lehetne mozdulni — valamilyen irányban — a közömbösségi felületen úgy, hogy ezzel a kiadások csökkenjenek.

Minthogy azonban minden egyén számára a helyettesítési határráta bármely termékpárra vonatkozóan egyenlő a megfelelő árak arányával, az is igaz, hogy

[2] Az ordinalista szemlélet valójában csak az 1930-as években kezdett széles körben elterjedni, Hicks és Samuelson munkái, *Hotelling* [17] tanulmányával együtt sokat tettek az ordinalista szemlélet általánossá válásáért. Elég érdekes módon mind Hicks, mind Samuelson tanulmányozta a fogyasztói választást, még az ordinalizmusnál is gyengébb, alternatív axiómarendszerek esetén; lásd *Hicks—Allen* [16] és *Samuelson* [32].

bármely két termék helyettesítési határrátája ugyanaz, minden egyes egyén számára. Ez — következésképpen — azt sugallja, hogy a versenyegyensúly elérése után nincs lehetőség arra, hogy két (vagy akárhány) egyén kölcsönös kereskedés révén, nyereségre tegyen szert. A helyettesítési határráta egyenlősége azt jelenti, hogy az a csere, amely az egyik egyént egy bizonyos közömbösségi felületen hagyja, ugyanezt teszi a másik egyénnel is. Ezért a versenyegyensúly ugyanolyan jellegű feltételeket elégít ki, mint a Pareto-optimum.

(Látni fogjuk, hogy a fogyasztási optimumra és a Pareto-optimumra vonatkozó feltételek a differenciálszámítás elsőrendű feltételei. Hotelling, Hicks és Samuelson kidolgozták a másodrendű feltételeket is, amelyek különbséget tesznek a maximum és minimum között, és megmutatták, hogy e feltételeknek fontos következményei vannak.)

A közgazdászok a gazdaság teljesítményének értékelését — az elosztás igazságosságát is figyelembe véve — sokkal kevésbé tanulmányozták. Ez azért nem meglepő, mert ezzel kapcsolatban a legmélyebb filozófiai kérdések merülnek fel. Az angol—amerikai tradíció magába olvasztotta a kérdés egyik vonatkozását, amelyben hallgatólagosan elfogadta — bár ritkán hangsúlyozta — Bentham és Sidgwick utilitariánus nézeteit, amelyeket formálisan Edgeworth fejtett ki. Ezen elmélet szerint a kritérium az összes egyén aggregált hasznosságának maximalizálása volt. Ennek a kritériumnak csak akkor van értelme, ha a hasznosságot kardinálisan mérhetőnek tekintjük. Az ordinalista elmélet felülkerekedése alámosta az aggregált hasznosságon alapuló kritérium ismeretelméleti alapját. Bergson híres tanulmányát [9] ennek a kérdésnek szentelte. Ahogy már megjegyeztük, egy adott preferenciarendezés sok különböző hasznossági függvénynek felel meg. A gazdaság résztvevőinek preferenciarendezését adottnak véve, válasszunk ki valamennyihez egy olyan hasznossági függvényt, amely az illető preferenciarendezést vonja maga után. Ekkor a társadalmi jólét az egyéni hasznosságok valamilyen $W(U_1, \ldots, U_n)$ függvényeként fejezhető ki. Ha az adott preferenciarendezéshez rendelt hasznossági függvény megváltozik, akkor ennek megfelelően fog változni a W függvény is, így az egész ábrázolás összhangban van az ordinalista értelmezéssel. Jóllehet a W függvény nincs egyértelműen meghatározva, mint az Edgeworth—Bentham-féle aggregált hasznosságelméletében, de önmagában kifejezi a társadalmi jóléttel kapcsolatos magatartásformákat, amelyek egyénenként különbözhetnek.

Az egyszerűség kedvéért mind ez ideig úgy tárgyaltam a kérdést, mintha nem lenne termelés, s ez olyan mulasztás, amelyet helyre kell hozni. A termelőegységet vagy a vállalatot a lehetséges ráfordítások és kibocsátások összefüggése jellemzi. Egy vállalatnak természetesen lehet egynél több terméke is. Ekkor az f vállalatot transzformációs felületével jellemezhetjük, amit a $T(y_{f1}, \ldots, y_{fn})=0$ egyenlet határoz meg, ahol az y_{fi} a kibocsátás, ha pozitív, és ráfordítás, ha negatív. Ez a felület határozza meg a vállalat számára lehetséges hatékony ráfordítás—kibocsátás vektorokat, azaz azokat a vektorokat, amelyek adott ráfordítások mellett egy bizonyos termék maximális kibocsátását eredményezik, ha a többi termék kibocsátása adott.

A vállalat optimalizáló magatartása azt jelenti, hogy transzformációs felületének pontjai közül a maximális profitot biztosító pontot választja. A ráfordítások és kibocsátások konvencionális jelölései alapján a vállalat a

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_{fi}$$

összeg maximumát keresi.

Hicks és Samuelson idézett könyveikben felteszik, hogy a transzformációs felület differenciálható, és így a maximális profitot jelentő pontokat alkalmasan választott marginális egyenlőségek határozzák meg; és hogy az optimalizálás eredményeként egy függvény adódik, $y_{fi}(p_1, \ldots, p_n)$, $(i=1, \ldots, n)$.

Ezen a ponton két megjegyzést kell tennünk: 1. Világos, hogy ha minden árat egy azonos pozitív konstanssal szorzunk, akkor a költségvetési korlátok az egyes háztartások számára valójában változatlanok maradnak, s ezért változatlan lesz a fogyasztók kereslete is. Hasonlóképpen, ha a profitokat szorozzuk pozitív konstanssal, akkor a vállalat profitmaximalizáló választása marad változatlan. Ezért az $x_{hi}(p_1, \ldots, p_n)$ és az $y_{fi}(p_1, \ldots, p_n)$ függvények független változóikban nulladfokú homogének. 2. A vállalatok profitját úgy kell kezelni, mint azon háztartások jövedelmének részét, amelyeknek a tulajdonában vannak a vállalatok. Ez módosítást okoz az egyének előzőekben bemutatott költségvetési korlátaiban. Ezt itt nem formalizálom, de a későbbiekben hivatkozni fogok rá.

Feltételezzük, hogy bármely i-edik termékből fognak valamilyen mennyiséget keresni és kínálni bármely adott árrendszer mellett. Hickst követve, az i-edik termékre vonatkozó *túlkeresletről* úgy fogunk beszélni, mint az összes egyén és vállalat keresletének és kínálatának összegéről, a kínálatot negatív előjellel véve. A h-adik egyén kereslete $x_{hi}(p_1, \ldots, p_n)$, s így az összes háztartás összes kereslete

$$\sum_{h} x_{hi}(p_1, \ldots, p_n).$$

A háztartások kínálata a kezdetben rendelkezésünkre álló mennyiségek aggregátuma, azaz

$$\sum_{h} \bar{x}_{hi}.$$

Végül a vállalatok aggregált kínálata

$$\sum_{f} y_{fi}(p_1, \ldots, p_n);$$

néhány vállalat lehet inkább keresletet támasztó, mint kínáló, de a jelölési konvenció biztosítja, hogy a szóban forgó összeg a vállalatok összes *nettó* kínálatát adja meg, miután az egyik vállalat kereslete és egy másik ezt kielégítő kínálata megsemmisíti egymást. Ezért a piaci túlkereslet az i-edik termékből

$$z_i(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{h} x_{hi}(p_1, \ldots, p_n) - \sum_{h} \bar{x}_{hi} - \sum_{f} y_{fi}(p_1, \ldots, p_n).$$

Minthogy minden kifejezés nulladfokú homogén, az összegük z_i is az lesz. Továbbá a minden egyes egyénre vonatkozó költségvetési korlát teljesülése is megszorítást jelent a túlkeresleti függvények számára. Minthogy minden egyes egyén tervezett kiadásainak pénzben kifejezett nagysága bármely árrendszer mellett egyenlő induló készleteinek pénzben kifejezett értékével plusz a profitból való részesedésével, összességében azt kapjuk, hogy az összes háztartás tervezett kiadásainak pénzértéke egyenlő az összes indulókészlet pénzértékével plusz az összes profittal, vagyis

$$\sum_h \sum_{i=1}^{n} p_i x_{hi}(p_1, \ldots, p_n) = \sum_h \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_{hi} + \sum_f \sum_{i=1}^{n} p_i y_{fi}(p_1, \ldots, p_n),$$

vagy a túlkereslet definíciójából

$$\sum_i p_i z_i(p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

ahol az azonosság jele emlékeztet minket arra, hogy ez az összefüggés – amit Lange [22] Walras törvényének nevezett — az árak minden lehetséges értékére érvényes.

A gazdaság általános egyensúlyát ekkor az az árvektor fejezi ki, amely valamennyi túlkeresleti függvényt nullával tesz egyenlővé,

$$z_i(p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ez a rendszer úgy jelenik meg, mint amely n egyenletet és n ismeretlent tartalmaz; de a számításban van két egymást ellensúlyozó probléma. Egyrészt, mivel az egyenletek homogének, egyetlen megoldás sem lehet egyértelmű, mert az összes megoldásként kapott ár bármely pozitív számmal való szorzata is megoldás. Valójában az egyenletek csak $n-1$ árarányt határoznak meg. Másrészt az egyenletek nem függetlenek; ha $n-1$ kielégül, akkor Walras törvénye miatt az n-ediknek is ki kell elégülnie.

III. A TOVÁBBFEJLESZTÉS SZÜKSÉGESSÉGE

Volt azonban néhány olyan terület, ahol az általános egyensúly elméletének szerkezete vagy hiányos volt, vagy ellentétben állt azokkal a tanokkal, amelyek a közgazdasági elméletben általánosan elfogadottak voltak.

1. Nem nyújtott bizonyítékot arra, hogy az általános egyensúlyt meghatározó egyenletrendszernek van-e egyáltalán megoldása, azaz nem tudták, hogy létezik-e az áraknak egy olyan rendszere, amelyik a túlkeresletet minden piacon nullává teszi. Ez volt a legsúlyosabb megoldatlan probléma.

2. A termelésre vonatkozó feltevések nem voltak azonosak azokkal, amelyeket magában a termelés elemzésében használtak. Az utóbbiban megszokott — bár nem általános — volt a konstans volumenhozadék feltételezése; ha adott ráfordításokkal

és kibocsátásokkal egyáltalán folytatható a termelés, akkor ez a termelési folyamat bármilyen volumenben folytatható. Azaz, ha valamennyi ráfordítást ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk, akkor az összes kibocsátás is ugyanannyiszorosára fog nőni. Ebben az esetben azonban egyetlen árrendszer mellett sem lehetséges egyértelmű profitmaximalizáló helyzet. Tételezzük fel, hogy van egy olyan helyzet, amely pozitív profitot eredményez. Ekkor az összes ráfordítás és kibocsátás megduplázható, és ez kétszer akkora profitot eredményez. Azért nem lesz profitmaximalizáló helyzet, mert minden helyzetben tovább növelhető a profit. Másfelől, nulla profitot mindig el lehet érni, ha nincs ráfordítás és nincs kibocsátás. Ebből azt a következtetést lehet levonni, hogy ha az árak olyanok, hogy létezik a ráfordításoknak és kibocsátásoknak egy nem minden elemében nulla profitmaximalizáló halmaza, akkor az ennek megfelelő profitnak nullának kell lennie, és ugyanezt a profitot lehet elérni, ha az összes ráfordítást és kibocsátást bármely pozitív számmal megszorozzuk.

Konstans volumenhozadék feltételezése esetén ezért nem létezhet a ráfordításokat és kibocsátásokat az árak függvényeként meghatározó egyértékű függvény, $y_{fi}(p_1, \ldots, p_n)$; pontosabban vagy nincs profitmaximalizáló input-output vektor, vagy pedig egy egész sorozat van belőlük, bármely adott árrendszer mellett. De ebben az esetben definiálni kell a kínálat és kereslet egyensúlyának fogalmát.

Valamivel kevésbé fontos ebből a szempontból, hogy a transzformációs felületnek bizonyos nagyon plauzibilis feltételek mellett nem kell szükségképpen differenciálhatónak lennie. Gyakran elhangzott az az álláspont, hogy adott kibocsátás megtermeléséhez minden egyes ráfordításból előírt mennyiség szükséges; legalábbis vannak olyan körülmények, amelyek közt lehetetlen csökkenteni az egyik ráfordítás fajtából a szükségletet egy másik mennyiségének növelésével. Ez a rögzített koefficiensű technológia. Ebben az esetben könnyen belátható, hogy bár a transzformációs felület jól definiált, nem differenciálható, mert törések vannak benne.

3. A kívánatosnál sokkal kevésbé világosan fogalmazták meg a Pareto-hatékony allokációk és a versenyegyensúly közötti összefüggését. Valójában a témát kutató szerzők csak annyit mutattak meg, hogy a Pareto-hatékonyság elsőrendű szükséges feltételei azonosak az egyének és vállalatok optimális (maximális) helyzetének elsőrendű feltételeivel, feltéve, hogy az egész gazdaság a versenyegyensúly állapotában van.

4. Az egyéni optimalizálás feltételét (a helyettesítési határráták egyenlővé tételét az árarányokkal) valamelyest módosítani kellett annak érdekében, hogy a sarokmaximumot figyelembe vehessük. Mindennapos megfigyelések alapján kézenfekvő, hogy minden egyén számára van néhány (valójában nem is kevés) olyan termék, amelyből egyáltalán nem fogyaszt. Ehhez hasonlóan minden vállalat számára van néhány olyan termék, amely sem ráfordításai, sem kibocsátásai között nem szerepel. Ekkor azonban az az érvelés, amely szerint a helyettesítési határráták — minden egyén számára — egyenlőeknek kell lenni az árarányokkal, összeomlik. Tekintsünk egy egyént, aki számára a j-edik termék i-edik termékre vonatkozó helyettesítési határrátája *kisebb*, mint a p_j/p_i árarány, de nem fogyaszt j-ből semmit. A j

fogyasztásában bekövetkező kis növekedés az *i* fogyasztásának ezt ellensúlyozó csökkenésével — ami lehetővé teszi az azonos közömbösségi felületen maradást — a költségek növekedését vonná maga után. A költségcsökkenés elérésének egyetlen módja — anélkül, hogy a szóban forgó egyén kevésbé preferált pozícióba mozdulna el — a *j* fogyasztásának csökkentése; ez azonban lehetetlen, mert a fogyasztás nem csökkenhet nulla alá. Az azonban igaz, hogy a *j*-nek *i*-re vonatkozó helyettesítési határrátája nem *haladhatja meg* a hozzájuk tartozó árarányt.

Ehhez hasonlóan, ha valaki semmit nem fogyaszt a *j*-edik termékből, akkor abban az esetben is lehetséges számára a Pareto-hatékonyság elérése, ha nála a *j*-edik terméknek az *i*-edikre vonatkozó helyettesítési határrátája más egyénekénél alacsonyabb. Minthogy a helyettesítési határrátáknak az egyének között nem kell egyenlőeknek lenniük sem a versenyegyensúlyi helyzetekben, sem a Pareto-hatékony allokációk mellett, szükségesnek tartották e két fogalom közti összefüggések további tanulmányozását.

5. Külön kérdés még az is, hogy vajon a kínálatnak és a keresletnek szükségképpen egyenlőnek kell-e lenniük. Világos, hogy a kereslet nem múlhatja felül a kínálatot, mert különben kielégítetlen keresletnek kellene lennie. De ha körülnézünk, látjuk, hogy vannak olyan javak vagy olyan termékfolyamok (flow-k), amelyeket kedvelünk, azonban olyan bőségesen állnak rendelkezésre, hogy nem kívánunk belőlük többet. Ezzel kapcsolatban azonnal a levegő és a napfény jut eszünkbe. Jellemző, hogy az ilyen bőségesen rendelkezésre álló javak ingyenesek; azaz nem számítanak árat használatukért.

Ezt az alapvető megfigyelést a közgazdászok számtalanszor megtették. Megkülönböztettek *szűkös javakat* és *szabad javakat*, és egyedül az előbbit tekintették a közgazdaságtan igazi tárgyának. Matematikai szempontból azonban könnyű belátni, hogy a javak ilyen módon való osztályozása nem önmagában adott, hanem függ a rendszer azon paramétereitől, amelyek az ízlést, a technológiát és a kezdeti kínálatot szabályozzák. Tételezzük fel például, hogy két termékünk van *A* és *B*, amelyek csak termelési tényezőkül szolgálnak. Tegyük fel továbbá, hogy történetesen e két tényezőt mindig együtt és mindig azonos arányban — mondjuk egy egységet *A*-t két egység *B*-vel — használják. Végül tegyük fel, hogy *A* és *B* maga nem termelt jószág, hanem azonos mennyiségben rendelkezésre álló természeti erőforrás. Ekkor nyilvánvaló, hogy a *B* termék a szűk keresztmetszet; *A* termék a szokásos közgazdasági értelemben szabad jószág, mert a rendelkezésre álló mennyiségében bekövetkező kis változás nem érintené a termelést. A két termék ilyen jellegű osztályozása szabad és szűkös javakra azonban relatív, a technológiával és a két termék kezdeti kínálatának változásával együtt változik. Ha egy technológiai újítás *B*-ből a szükségletet úgy csökkenti, hogy egy egység *A* kevesebb mint egy egység *B* közreműködését igényli, akkor a *B* válna szabad jószággá és *A* szűkössé; s ugyanez történne, ha az *A* kezdeti kínálata — például egy katasztrófa miatt — *B* kezdeti kínálatának felénél kevesebbre csökkenne.

Ezek alapján az egyensúly feltételeit módosítani kell. Most azt kívánjuk, hogy

a túlkereslet nempozitív legyen, és hogy bármelyik olyan termék ára, amelyre negatív, nulla legyen. Jelölésekkel:

$$z_i(p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ha

$$z_i(p_1, \ldots, p_n) < 0, \quad \text{akkor} \quad p_i = 0.$$

Azok a termékek, amelyekre az egyenlőtlenség szigorúan teljesül, a szabad javak. Azokra az egyensúlyi helyzetekre, amelyekben szabad javak is vannak mint *sarokegyensúlyokra* fogunk hivatkozni.

A most felvetett probléma jól szemlélteti az általános egyensúlyelmélet fejlődésének általános tendenciáját, a lokális elemzés felől a globális felé való eltolódást. Ha az ízlést, a technológiát és a kezdeti kínálatot meghatározó paraméterek kis eltolódásait tekintjük, akkor a javak szabad és szűkös kategóriába való osztályozása változatlan marad. Ezért lokális szempontból a szűkös javak listáját jogosan tekinthetjük adottnak. Azt hiszem, nem szükséges itt a lokális és globális elemzés viszonylagos előnyeit vitatni: nyilvánvaló, hogy a globális elemzés — feltéve, hogy van rá lehetőség — mindig előnyösebb, a lokális elemzés azonban általában specifikusabb következtetéseket eredményez. Az első említett problémáról — az egyensúly létezéséről — kiderült azonban, hogy csak globális nézőpontból kezelhető; és a sarokegyensúlyi helyzetek lehetőségének felismerése elkerülhetetlen lépésnek bizonyult egy egzisztenciabizonyítás kidolgozásához.

Hogy elkerüljük e továbbfejlesztendő problémákról szóló lista félreértelmezését, hangsúlyoznunk kell két dolgot: 1. az általános egyensúlyelmélet célja és felépítése megmaradt olyannak, ahogyan azt Hicks kifejtette, és e nélkül az alap nélkül az ezt követő fejlődés lehetetlen és valójában értelmetlen lett volna; 2. Hicks és Samuelson munkájának itt csak a legáltalánosabb és a legalapvetőbb vonásait foglaltam össze, mert pillanatnyi célomnak ezek felelnek meg legjobban, bár mindkettőjüket elsősorban inkább az általános egyensúlyi rendszer működési törvényszerűségei érdekelték (erre vonatkozó eredményeiket nem foglaltam össze), mint az egyensúly létezése és hasonló kérdések.

IV. A NÉMET NYELVŰ IRODALOM

A neoklasszikus gondolkodás egy másik, az angol—amerikai kutatásoktól eltérő áramlatát tekintjük át. Ennek eredményeit elsősorban németül publikálták, és nagyrészt inkább matematikusok, mint közgazdászok írták. Az egész irodalom úgy jellemezhető, mint az általános egyensúlyelmélet Cassel-féle formalizálásának [10] bő magyarázata; olyan fejtegetés, amely természetében eléggé különbözik Hicksétől. A maximalizáló magatartás például alig jelent meg Cassel modelljében. Az egyedi fogyasztókkal kapcsolatban Cassel feltételezte azt is, hogy az egyedi háztartások kereslete az árak függvénye; de a háztartások keresletét nem akarta a preferenciákból

vagy a hasznossági függvényekből levezetni. A termelést illetően rögzített koefficiensekkel jellemezhető technológiákat tételezett fel; így modelljében valójában nem volt tere a vállalatok profitmaximalizáló magatartásának; a ráfordítások keresletét — az áraktól függetlenül — teljes egészében meghatározta a kibocsátás. Még világosabban, Cassel megkülönböztetett termelt javakat és elsődleges erőforrásokat, s a javak e két osztályát élesen elhatárolhatónak tételezte fel. Az egyének kezdetben csak elsődleges erőforrásokkal rendelkeznek, és csak termelt javak iránt támasztanak keresletet. A termelt javakat elsődleges erőforrásokból állítják elő; legyen a_{ij} a j-edik termelési tényezőnek az a mennyisége, amelyet egy egység i-edik termék termeléséhez felhasználnak. Legyen $\boldsymbol{P}$ a termelt javak, $\boldsymbol{F}$ pedig az erőforrások halmaza.

Az i-edik termelt jószág kereslete tetszőleges árvektor esetén

$$\sum_h x_{hi}(p_1, \ldots, p_n) = x_i;$$

ekkor az i-edik terméket előállító iparág j-edik tényező iránti kereslete: $a_{ij}x_i$, és a j-edik termelési tényező összes keresletét úgy kapjuk meg, hogy az összes termelő iparág keresletét összeadjuk. Másfelől a j-edik tényező induló kínálata $\sum_h \bar{x}_{hj}$, s így a j-edik tényező keresletének és kínálatának egyenlőségét kifejező feltétel

$$\sum_h \bar{x}_{hj} = \sum_{i \in P} a_{ij} x_i.$$

Miközben j az $\boldsymbol{F}$ halmazon változik, x_i-kre egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Stackelberg [37] észrevette azt, hogy könnyen előfordulhat, hogy ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, például akkor, ha több a termelési tényező, mint a termelt jószág.

Cassel annak a tételnek a felhasználásával zárta le rendszerét, amely szerint konstans volumenhozadék esetén a profitnak nullának kell lennie. Ekkor ugyanis az árnak a fajlagos (az egy egység termelésében felhasznált) tényezőköltségek összegeivel kell egyenlőnek lennie, minden termelt jószágra vonatkozóan, azaz

$$p_i = \sum_{j \in F} a_{ij} p_j \quad (i \in \boldsymbol{P}).$$

Könnyen igazolható — mutatta ki körülbelül Stackelberggel egyidőben Neisser [28] — hogy a teljes Cassel-rendszer csak akkor teljesül, ha néhány tényező ára negatív.

K. Schlesinger [36] bécsi bankár és amatőr közgazdász — döntő hatást váltva ki a kérdést követő vitában — észrevette, hogy Stackelberg és Neisser kritikája megválaszolható — különösen ami az elsődleges erőforrásokat illeti — a sarokegyensúlyok lehetőségének felismerésével. Néhány erőforrás egyszerűen felesleges lehet, s ezért ezeket szabad jószágnak kell tekinteni. Így a tényezők keresletének és kínálatának egyenlőségét a következő feltételekkel kell helyettesíteni:

$$\sum_h \bar{x}_{hj} \geqq \sum_{i \in P} a_{ij} x_i, \quad p_j = 0,$$

ha szigorú egyenlőtlenség áll fenn. ($j \in \boldsymbol{F}$)

Ezzel a módosítással Schlesinger azt sejtette, hogy meg lehet mutatni, létezik olyan egyensúlyi helyzet, amelyben minden ár nemnegatív. Felkeltette Abraham Wald matematikus érdeklődését a probléma iránt, és Wald [38], [39] nagyszerű tanulmánysorozatban — amelyet a [40]-ben foglalt össze — mutatta meg, hogy az egyensúly valóban létezik, bár elég erős feltevéseket kellett tennie, és elemzését pusztán a Cassel-modell különböző változataira korlátozta. Wald érvelése rettentő bonyolult volt, és munkájáról, ami egy német nyelvű matematikai folyóiratban jelent meg, az amerikai matematikai-közgazdászok csak jó tíz évvel később kezdtek tudomást venni.

Ugyanebben az időben jelentetett meg egy tanulmányt John von Neumann [29], matematikus, amelynek hosszabb távon nagyobb hatása volt, bár témája kevésbé tartozott a tárgyhoz. Tanulmánya Cassel modelljének továbbfejlesztett változatát tartalmazta egy stabilan növekvő gazdaságra. Célja az volt, hogy megmutassa egy olyan növekedési pálya létezését, amely mentén minden termék maximális ütemben arányosan bővül. Gazdasági szempontból a modell némiképp furcsa volt, amennyiben egyáltalán nem szerepelt benne a fogyasztás; valamely időszak kibocsátásai a következő időszak kibocsátásait létrehozó tevékenységek ráfordításai voltak. Három olyan figyelemre méltó pontja volt a tanulmánynak, amely nagy hatást gyakorolt az általános egyensúlyelmélet fejlődésére: 1. A termelés szerkezetét újszerű módon jellemezte: Feltette, hogy a tevékenységeknek egyetlen rögzített halmaza létezik, s hogy mindegyiket a lehetséges ráfordításoknak és kibocsátásoknak egy vektora jellemzi, valamint azt, hogy technológiailag minden tevékenység bármilyen szinten megvalósulhat. Ezzel általánosította a rögzített koefficiensű modellt, amelyben minden kibocsátást egyetlen tevékenység hozott létre. Azok a megvalósítható tevékenységkombinációk, amelyek esetén egyetlen ráfordítás teljes felhasználása sem haladja meg az előző termelésből rendelkezésre álló mennyiséget. 2. A maximális növekedés pályája egy fajta versenyegyensúlyként jellemezhető, abban az értelemben, hogy matematikailag lehetséges és értelmes volt a változók egy olyan új vektorának bevezetése, amelyet árvektornak lehetett tekinteni. Bármelyik működő tevékenység nulla profitot hozott; a többi tevékenység pedig vagy nulla vagy negatív profitot. A tevékenységi szintek ilyen jellegű megválasztását ezért profitmaximalizáló magatartásnak lehet tekinteni, ahol a maximum néhány „sarkot" is magában foglalhat. Továbbá bármely olyan termék árának nullának kell lennie, amelynek — mint ráfordításnak — a kereslete kisebb, mint a rendelkezésre álló mennyiség; így a versenyegyensúlyi pontok között sarokmegoldások is előfordulhatnak. 3. A maximális növekedési ütemet eredményező árak és relatív mennyiségek létezésének bizonyítási módszere megkívánta egy, a kombinatorikus topológiából származó tétel felhasználását, amely általánosítása Brouwer fixponttételének. Matematikai szempontból az egyensúly létezésének bizonyítása Neumann növekedési modelljében a kétszemélyes nullaösszegű játék minimax tételének általánosítása volt, amelyet Neumann néhány évvel korábban már tanulmányozott. Neumann és Morgenstern [30] nagy jelentőségű könyvének megjelenését követő érdeklődés a játékelmélet iránt erősen

hatott az új matematikai technikák — különösen a konvex halmazok elméletének — bevezetésére az általános egyensúlyelméletbe.

Néhány évvel később S. Kakutani [19] Neumann fixponttételének egy egyszerűsítését dolgozta ki, amely alapvető eszközévé vált az egzisztenciatételek bizonyításának. Tekintsük át röviden Brouwer és Kakutani fixponttételeit. A pontok egy halmazát akkor mondjuk kompaktnak, ha zárt és korlátos, és akkor konvexnek, ha a halmaz bármely két pontját összekötő egyenes szakasz teljes egészében a halmazon belül fekszik. Legyen C egy kompakt, konvex halmaz. Legyen $f(x)$ egy vektorfüggvény, amely C minden pontjához hozzárendeli C egy pontját. Ekkor Brouwer tétele azt mondja ki, hogy ha $f(x)$ leképezés folytonos, akkor van legalább egy olyan pont, x^*, amely önmagába képződik le, azaz, amelyre $f(x^*)=x^*$.

Az eddig használt indexjelölésnek megfelelően, n darab n változót tartalmazó valós értékű $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ függvénnyel rendelkezünk. Ha ezek a függvények folytonosak, és ha az $(f_1, \ldots, f_n)$ pont valamilyen C konvex halmazban fekszik, valahányszor $(x_1, \ldots, x_n)$ ebben a halmazban fekszik, az $f_i(x_1, \ldots, x_n)=x_i$ egyenletrendszernek van legalább egy megoldása C-ben.

Egzisztenciaprobléma esetén egy ilyen matematikai eszköz alkalmazása természetes. Előzőekben már megjegyeztük, hogy ha egyszer megengedjük a konstans volumenhozadékot, akkor meg kell engednünk azt a lehetőséget is, hogy a profitmaximalizáló választás eredménye a termelési folyamatok egy egész halmaza lehessen, amelynek — valamely adott árrendszer mellett — minden eleme egyformán profitábilis. Ezért kell függvények helyett a pont—halmaz leképezés vagy, ahogy néha nevezik *a megfeleltetés* sokkal általánosabb fogalmával dolgoznunk. Kakutani tétele ezzel a sokkal általánosabb helyzettel foglalkozik. Egy kompakt és konvex C halmaz minden $x=(x_1, \ldots, x_n)$ pontjához hozzárendeljük C egy részhalmazát, mondjuk $\Phi(x)$-et. Azt mondjuk, hogy x^* e megfeleltetésnek fixpontja, ha x^* hozzátartozik ahhoz a halmazhoz, amelyet x^*-hez rendeltünk, azaz $\Phi(x^*)$-hoz.

Kakutani tétele azt mondja ki, hogy egy ilyen fixpont létezik, ha két feltétel teljesül: $\Phi(x)$ konvex halmaz minden x-re; és ahogy x változik, $\Phi(x)$ folytonos egy bizonyos értelemben, szakszerűbben kifejezve, ha $\Phi(x)$ rendelkezik *a felülről félig folytonosság*ként ismert tulajdonsággal.

V. PARETO-HATÉKONYSÁG, VERSENYEGYENSÚLY ÉS KONVEXITÁS

Érdeklődésem középpontjában először a Pareto-hatékonyság és a versenyegyensúly közötti összefüggés állt. Mégpedig azért, mert az 1940-es évek végén jelentős vita folyt a közgazdászok között a lakbérek szabályozásából származó hatékonyságromlásról, és azokról a különböző javaslatokról, amelyek célja — valamilyen átmeneti úton — a szabad piac hatékonyságának elérése volt. A hatékonyságra vonatkozó nem formalizált érvek egy részének sarkalatos pontja az az elképzelés, hogy

a lakbérek szabályozása idején az emberek nem megfelelő lakásokat bérelnek, mondjuk túl nagyokat. Meglepő volt számomra, hogy egy egyén csak egyetlen, s nem néhány fajta lakást bérel. Az egyedi optimumok a „sarkokon" voltak, tehát az egyes egyének nem tudták a helyettesítési határrátákat kiegyenlíteni a szabad piacra való átpártolás útján. Az egyszerű esetek elemzése diagramok segítségével mégis azt sugallta számomra, hogy a versenyegyensúly és a Pareto-hatékonyság hagyományos azonosítása helyes, bár nem bizonyítható a differenciálszámítás lokális technikájának segítségével.

Hamarosan felismertem, hogy megfelelő segítséget nyújt a konvex halmazok elmélete, és különösen a szétválasztási tétel. Induljunk ki egy Pareto-hatékony elosztásból és tekintsünk minden olyan logikailag lehetséges elosztást, amelyet az előbbivel szemben mindenki preferál. Természetesen egyetlen ilyen elosztás sem lehet megvalósítható, mert különben a kiinduló elosztás nem volna Pareto-hatékony. Minden ilyen elosztás az összes egyénnek vagy vállalatnak valamennyi termékre vonatkozó keresletének vagy kínálatának kinyilvántítása. Ezért az egyének és vállalatok keresletének és kínálatának összeadásával — az előjeleket megfelelően alkalmazva — meghatározhatjuk valamennyi termék túlkeresletét. Legyen $\boldsymbol{Z}$ az összes ilyen módon képzett, $(z_1, \ldots, z_n)$ túlkeresleti vektorokból álló halmaz. Minthogy ezek egyike sem megvalósítható, mindegyikre igaznak kell lenni, hogy legalább egy termék túlkereslete pozitív. A halmazelmélet nyelvén: a $\boldsymbol{Z}$ halmaznak és a nempozitív ortánsnak — ami az összes olyan $(z_1, \ldots, z_n)$ vektor halmaza, amelyre $z_i \leqq 0$, minden i esetén — nincs közös pontja.

A konvex halmazokra vonatkozó szétválasztási tétel kimondja, hogy ha két konvex halmaz diszjunkt, akkor létezik egy hipersík, amely úgy választja el őket, hogy az egyik halmaz az egyik oldalon, a másik a másik oldalon van. Jelölésekkel: ha $\boldsymbol{C}_1$ és $\boldsymbol{C}_2$ diszjunkt konvex halmazok az n-dimenziós térben, akkor léteznek olyan — nem mind nulla — p_i $(i=1, \ldots, n)$ és c számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqq c$ minden $\boldsymbol{C}_1$-ben levő $x=(x_1, \ldots, x_n)$-re, és $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqq c$ minden $\boldsymbol{C}_2$-ben levő x-re. Alkalmazzuk ezt a tételt a most vizsgált esetre. A nempozitív ortáns nyilvánvalóan konvex halmaz; tételezzük fel egy pillanatra, hogy $\boldsymbol{Z}$ konvex. Ekkor találhatunk olyan — nem mind nulla — $p_i (i=1, \ldots, n)$ és c számokat, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \geqq c \quad a\ \boldsymbol{Z}\text{-ben levő } z = (z_1, \ldots, z_n)\text{-re},$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \leqq c, \quad \text{ha } z_i \leqq 0 \text{ minden } i\text{-re}.$$

A második feltételből könnyen belátható, hogy egyetlen i-re sem lehet $p_i < 0$. Ezért p_i minden i-re nemnegatív, és mivel van legalább egy nemnulla p_i, legalább egy i-re pozitív. Szokásos kifejezéssel élve azt mondhatjuk, hogy a $p=(p_1, \ldots, p_n)$ vektor *szemipozitív*.

Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \leqq 0, \quad \text{ha } z_i < 0 \text{ minden } i\text{-re},$$

s ezért semmit sem veszítünk $c \leqq 0$ feltevésével. Másfelől, ha $z_i = 0$-t vesszük minden i-re, akkor azt látjuk, hogy $c \geqq 0$. Ezért a c-t rögzíthetjük a 0-n.

A Pareto-hatékony elosztás feltételei ekkor

$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \geqq 0$ a $\boldsymbol{Z}$-ben levő z-re és p szemipozitív

Legyen $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ az éppen vizsgált Pareto-hatékony elosztás által meghatározott túlkeresletvektor. Ez úgy lesz egyben megvalósítható is, ha $z_i^0 \leqq 0$, minden i-re, s ezért

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i^0 \leqq 0.$$

Tételezzük fel — ahogy az általában elfogadható —, hogy $\boldsymbol{Z}$-ben vannak olyan pontok, amelyek tetszőlegesen közel vannak z^0-hoz. Ekkor nyilvánvalóan

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i^0 = 0,$$

s mivel $z_i^0 \leqq 0$ minden i-re, $p_i \geqq 0$ minden i-re,

$$\text{ha} \quad z_i^0 < 0, \quad p_i = 0.$$

Most már láthatjuk, hogy a Pareto-hatékony elosztás a kínálat és kereslet egyensúlya abban az általánosított értelemben, hogy „sarkokat" is magában foglalhat.

Azt is látjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (z_i - z_i^0) \geqq 0 \qquad \text{a } \boldsymbol{Z}\text{-ben levő } z\text{-kre.}$$

Térjünk vissza a túlkereslet definíciójához, ami az egyéni és vállalati keresletek és kínálatok összege.

$$z_i = \sum_h x_{hi} - \sum_h \bar{x}_{hi} - \sum_f y_{fi},$$

ahol $y_f (y_{f1}, \ldots, y_{fn})$ az f vállalat ráfordításainak és kibocsátásainak egy technológiailag lehetséges vektora és $x_h = (x_{h1}, \ldots, x_{hn})$ a h-adik egyén fogyasztásának egy lehetséges vektora. A Pareto-hatékony elosztás által meghatározott túlkeresletek pedig a következő formában írhatók fel:

$$z_i^0 = \sum_h x_{hi}^0 - \sum_h \bar{x}_{hi}^0 - \sum_f y_{fi}^0,$$

és ekkor, ha z a $\boldsymbol{Z}$ halmazhoz tartozik, akkor minden h-ra azt kell kapnunk, hogy a h-adik egyén $(x_{h1}, \ldots, x_{hn})$ fogyasztási vektora preferált a Pareto-hatékony elosztás esetén adódó $(x^0_{h1}, \ldots, x^0_{hn})$ vektorhoz képest. Ekkor

$$\sum_h \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_{hi} - \sum_{i=1}^{n} p_i x^0_{hi} \right) - \sum_f \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_{fi} - \sum_{i=1}^{n} p_i y^0_{fi} \right) \leqq 0,$$

ha h-adik egyén x_h-t preferálja x^0_h-lal szemben, minden h-ra.

Ezen egyenlőtlenség leglényegesebb sajátossága, hogy x_h és y_f vektorváltozók egymástól függetlenek. Nem nehéz belátni, hogy ez az egyenlőtlenség csak akkor állhat fenn, ha külön-külön minden egyénre és minden vállalatra fennáll. Egy f-edik vállalat számára ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y^0_{fi} \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i y_{fi} \qquad \text{minden lehetséges } y_f\text{-re,}$$

azaz, ha p_i-ket árakként értelmezzük minden vállalat maximalizálja a profitját. Az egyének esetében ennek az összefüggésnek a megfelelő értelmezése kevésbé egyszerű; egy adott Pareto-hatékony elosztás által meghatározott fogyasztási vektor a legolcsóbb módja egy rögzített kielégítettségi szint megszerzésének.

Mindent összevetve bebizonyosodott, hogy ha $\boldsymbol{Z}$ konvex halmaz, akkor a Pareto-hatékony elosztást el lehet érni úgy, hogy az egyben a piac versenyegyensúlyi állapota is legyen, abban az értelemben, hogy találhatók olyan árak és a kiinduló készletek olyan megfelelő elosztása, amely esetén minden egyén minimális költséggel éri el kielégítettségi szintjét, minden vállalat maximalizálja profitját, és minden piac egyensúlyban van, abban az általánosított értelemben, amely megengedi a sarokegyensúlyi helyzeteket is.

$\boldsymbol{Z}$ konvexitásának szükségessége élesebb megvilágításba helyezi a neoklasszikus elméletnek mindig is alapját képező konvexitási feltevéseket. $\boldsymbol{Z}$ konvexitása levezethető a következő két feltevésből: 1. a fogyasztási vektoroknak egy adott vektorhoz képest preferált halmaza minden egyénre vonatkozóan konvex; 2. a technológiailag lehetséges vektorok halmaza minden vállalatra vonatkozóan konvex.

Az eredményként kapható tételek azt mondják ki, hogy alkalmas konvexitási feltételek mellett annak, hogy egy elosztás Pareto-hatékony legyen az a szükséges feltétele, hogy a piacon mint versenyegyensúly valósulhasson meg. Ennek a kutatásnak egyik melléktermeke volt a megfordított tétel bizonyítása: egy versenyegyensúly mindig Pareto-hatékony, s ez a tétel minden konvexitási feltétel nélkül igaz.

Ezek az eredmények az 1951-ben publikált Arrow [1] műben jelentek meg. De az a gondolat, hogy a konvex halmazok elmélete a megfelelő eszköz, nyilvánvalóan a levegőben volt. Amíg én Stanfordban dolgoztam, Gerard Debreu ugyanaezekre az eredményekre jutott a Cowles Comission for Research in Economicsnál, Chicagóban [12].

VI. A VERSENYEGYENSÚLY LÉTEZÉSE

Megint egymástól függetlenül dolgozva, s egymás tevékenységéről nem tudva, Debreu és én elkezdtük Kakutani fixponttételét az egyensúly létezésének problémájára alkalmazni. Ebben az esetben a megfelelő időben kéziratot cseréltünk, hogy felismerhessük közös erőfeszítéseinket és egy mindkettőnk által alkalmazott túlságosan szigorú feltevés enyhítésének szükségességét (Arrow—Debreu [7]).

Tanulmányaink nélkülözhetetlen előfeltétele volt Tjalling Koopmansnak [21] a termelés elemzéséről szóló alapvető munkája. Ebben rendszeres áttekintéssé bővítette Neumann-nak a gazdaság termelési szerkezetéről szóló munkáját. A termelési szerkezetet tevékenységek halmazaként fogta fel, amelyek mindegyike bármilyen szinten folytatható, de az általános szinteket korlátozzák a kezdeti erőforráskorlátok. Munkájában a döntő újdonság azoknak a feltevéseknek az explicit kifejtése volt, amelyek biztosítják, hogy a kibocsátások megvalósítható halmaza — bármely véges kezdeti erőforrás halmaz esetén — korlátos legyen. Kiderült, hogy ez a korlátosság „globális" tulajdonság. Azaz az egyedi tevékenységek természetére vonatkozó feltevések (például, hogy minden tevékenységnek legalább egy inputot fel kell használnia) nem voltak elégségesek ahhoz, hogy a gazdaság mint egész korlátosságát biztosítsák. Meg kellett kívánni, hogy egészében egyetlen tevékenységkombináció se tegyen lehetővé termelést ráfordítások nélkül.

Ha a vállalatok viselkedését inkább egy megfeleltetés, mint egy függvény írja le, akkor az első kérdés az egyensúly definíciója. Az egyszerűség kedvéért továbbra is felteszem, hogy a h-adik egyedi fogyasztó döntéseit az árak $z_h(p)$ egyértékű függvényeként lehet ábrázolni. Egy árvektor akkor határoz meg versenyegyensúlyt, ha a kínálat és kereslet minden piacon kiegyensúlyozott, beleértve a sarkok lehetőségét is, és emellett, minden vállalat *valamilyen* profitmaximalizáló ráfordítás—kibocsátás vektort választ. Formálisan azt mondhatjuk, hogy p^* árvektor, y_f^* input-output vektorok és e $x_h^*=x_h(p^*)$ fogyasztási vektorok együttvéve versenyegyensúlyt alkotnak, ha a következő feltételek fennállnak:

a) p^* szemipozitív;

b) $\sum_h \bar{x}_{hi}+\sum_f y_{fi}^* \leqq \sum_h x_{hi}^*$, minden i termékre;

c) $p_i^*=0$ minden olyan termékre, amelyre *b)*-ben szigorú egyenlőtlenség áll fenn;

d) $y_f^*=$ az f vállalat számára technológiailag lehetséges $\sum_{i=1}^{n} p_i^* y_{fi}$ input-output vektorok egyike, amely maximalizálja a vállalat profitját.

Mindehhez természetesen hozzáértettük, hogy az egyének keresleti függvényét $x_h(p)$-t úgy definiáljuk, mint az előzőekben, azaz mint a legjobban preferált fogyasztási kombinációt a költségvetési korláton belül,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_{hi} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_{hi}:$$

pillanatnyi céljaimnak megfelelően el fogom hanyagolni, hogy az egyének jövedelme profitot is foglalhat magában; ez a módosítás némi analitikus bonyolultság árán kezelhető, de nem jelent igazi nehézséget.

Feltételezem, hogy 1. a lehetséges input-output vektorok halmaza bármely vállalat számára konvex, és 2. az egyedi keresleti függvények folytonosak, ezt a feltevést a későbbiekben újra vizsgálom.

Mivel a gazdaság számára az össztermelés lehetőségei korlátosak, meg lehet mutatni, hogy nem csorbítjuk az általánosságot azzal a feltétellel, hogy minden egyes vállalat számára a lehetséges input-output vektorok halmaza korlátos (tulajdonképpen feltesszük, hogy a halmaz kompakt). Ekkor bármely árvektor esetén van legalább egy profitmaximalizáló input-output vektor, de ez általában lehet egy egész halmaz is, mondjuk $\boldsymbol{Y}_f(p)$. Ez a halmaz azonban minden bizonnyal konvex, s továbbá p változásával a megfeleltetés — az előbb már definiált értelemben — felülről félig folytonos.

A következőképpen határozzunk meg egy túlkeresletet leíró megfeleltetést: tekintsünk az $\boldsymbol{Y}_f(p)$ profitmaximalizáló megfeleltetésből egy tetszőleges lehetséges y_f vektort, minden f-re. Valamennyi vállalat ilyen jellegű választását alapul véve képezzük az összes áru, egész gazdaságra vonatkozó túlkeresletét

$$z_i = \sum_h x_{hi}(p) - \sum_f y_{fi} - \sum_h \bar{x}_{hi}.$$

Legyen $Z(p)$ az összes $(z_1, \ldots, z_n)$ vektort tartalmazó halmaz, amelyet az y_f vektoroknak $\boldsymbol{Y}_f(p)$ profitmaximalizáló megfeleltetésből való összes lehetséges — az egyes vállalatokra vonatkozóan egymástól független — kiválasztása útján képezhetünk. Nem nehéz megmutatni, hogy $\boldsymbol{Z}(p)$ minden p-re konvex, valamint p-t változónak tekintve, felülről félig-folytonos megfeleltetés. Emellett fontos, hogy a Walras-törvény is fennáll; azaz, ha z a $\boldsymbol{Z}(p)$-hez tartozik, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i = 0.$$

A $\boldsymbol{Z}(p)$ megfeleltetés minden árvektorhoz meghatározza a túlkeresletek egy halmazát; az egyensúlyi árvektor p^* egy olyan vektor, amelyre $\boldsymbol{Z}(p^*)$-nek van legalább egy olyan eleme, amelyre $z_i \leqq 0$, minden i-re. Most bevezetjük a túlkeresletek egy leképezését; nagyon durván fogalmazva azt akarjuk, hogy az alacsony túlkeresletekhez alacsony vagy pontosabban nulla árak tartozzanak. Mivel az árakat tekintve az egész rendszer nulladfokú homogén, az árszínvonal az általánosság csorbítása nélkül tetszőlegesen rögzíthető. Feltételezzük tehát, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Mivel az árak szemipozitívak, azt is feltesszük, hogy $p_i \geqq 0$ minden i-re; s az ezeket a feltételeket kielégítő árvektorok halmazát, az árvektorokból álló szimplexet (ár-

szimplexet) P-vel fogjuk jelölni. Ezután definiáljuk a következő megfeleltetést, amely a túlkereslet minden egyes vektorához kijelöli az árszimplex egy részhalmazát: legyen $\bar{z}$ a z_i komponensek közül a legnagyobb bármely $z=(z_1, \ldots, z_n)$-re; ekkor $P(z)$-t az egységszimplexben levő árvektorok olyan halmazaként határozzuk meg, amelyekre $p_i=0$ minden olyan i termékre, amelyre $z_i<\bar{z}$. Szavakkal kifejezve, az árak összegének egynek kell lenni, de ez az összeg csak azok között a termékek között oszlik meg, amelyek túlkereslete maximális. Ez a szabály némiképp mesterkélt, de elégséges a bizonyításhoz.

Tekintsük az összes (z, p) páros halmazát, amely a túlkereslet vektor és az árvektorpárokból álló halmaz. Minden ilyen párhoz meghatározzuk a $Z(p)\times P(z)$ párok halmazát (a halmazok bármely S, T párjára vonatkozóan az $S\times T$ jelölés a vektorpároknak azt a rendezett halmazát jelenti, amelyeket úgy nyerünk, hogy vesszük S tetszőleges vektorát, s ezt követi T tetszőleges vektora). További érveléssel megmutatható, hogy Kakutani tétele érvényes. A párok leképezésének van egy fixpontja (z^*, p^*), amely a $Z(p^*)\times P(z^*)$-hoz tartozik. Definíció szerint

$$z^*\in Z(p^*), \quad p^*\in P(z^*)$$

Legyen $\bar{z}^*$ a $z^*=(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ vektor legnagyobb komponense. Ekkor $p_i^*=0$ $z_i^*<\bar{z}^*$-re. Ezért

$$p_i^* z_i^* = p_i^* \bar{z}^*$$

Walras törvénye szerint

$$0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^* z_i^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* \bar{z}^* = \bar{z}^* \sum_{i=1}^{n} p_i^* = \bar{z}^*,$$

és mivel a legnagyobb túlkereslet nulla, az összes túlkereslet nempozitív és ezért p^* valóban egyensúlyi árvektor.

Ennek az okoskodásnak sok változata lehetséges, amelyek különböző módon világítják meg a kérdést. Lionel McKenzie [25] Debreu-vel közös munkámtól függetlenül bizonyította az egyensúly létezését; ő egyszerűen inkább feltette a kínálati és keresleti függvények létezését, mint hogy a termelés és fogyasztás szerkezetének mélyebben fekvő fogalmaival elemezte volna azokat. A versenyegyensúlyra vonatkozó egzisztenciatételek rendszeres bemutatását lásd Debreu [13] és Arrow és Hahn ([8] 2—5. fejezet).

Még egy nyitva maradt kérdést kell most felvetnünk. Feltettük, hogy az egyének keresleti függvényei folytonosak. Az egyik meglepő felfedezés azonban — amire Debreu-vel közös kutatásunk során jutottunk — az volt, hogy ez a folytonosság az egyének viselkedésére tett összes szokásos szigorú feltétel mellett sem áll fenn mindenhol az árszimplexben, hacsak nem élünk nagyon mesterkélt feltételekkel. A nehézséget az okozza, hogy az egyén jövedelme is függ az áraktól, és ha azoknak a termékeknek az ára, amelyekkel az egyén eredetileg rendelkezett, nullára csökken, akkor jövedelme is nulla lesz. Ha azonban néhány ár és jövedelem nulla lesz, akkor a szabaddá vált javak iránti kereslet nemfolytonosan felugorhat. Szemléltetésül té-

telezzük fel, hogy a kiinduló állapotban egy egyén csak egy jószággal, mondjuk a munkával rendelkezett. Mindaddig, amíg e jószág ára pozitív, visszatarthat belőle valamennyit saját használatára, de egyetlen esetben sem fogyaszthat többet, mint amennyivel eredetileg rendelkezett. De ha a munka ára nullára csökken, akkor bármilyen — általa választott — mennyiségben támaszthat másoktól keresletet ugyanarra a munkafajtára.

A versenyegyensúly létezése tehát függ azoktól a feltevésektől, amelyek biztosítják, hogy a kiinduló állapotban minden egyén rendelkezzen legalább egy olyan termékkel, amely feltétlenül pozitív értékű. Ezeket a feltevéseket itt nem fejtem ki; az Arrow—Debreu műben szereplő eredeti feltevéseken Gale [14], McKenzie [26], [27] és Arrow—Hahn ([8] 5. fejezet 4.rész) munkái finomítottak.

VII. ÁLTALÁNOS EGYENSÚLY ÉS BIZONYTALANSÁG

Ha egyszer az egyensúly létezésének vizsgálatához létrehoztunk egy átfogó megközelítési rendszert, akkor ezt számos különböző irányban lehet alkalmazni. Erre példa azoknak a modelleknek az elemzése, amelyek ilyen vagy olyan módon a kompetitív rendszer tökéletlenségeit mutatták be. Az egzisztenciatétel bizonyításával kapcsolatos követelmények minden esetben szükségessé tették a feltevések határozott, szigorú kifejtését. Ez a követelmény — úgy tűnik — nagyon gyümölcsözőnek bizonyul. Jelenleg is folynak ilyen jellegű munkák, főleg olyan területeken, mint a jövőbeli piacok elemzése, a várakozások és a pénzelmélet, de az időnk nem engedi, hogy minden egyes esetre megvilágítsuk milyen gyorsan változik a szóban forgó kutatási terület.

Egy másfajta megközelítés a versenyfeltételek megtartása, de új összefüggésben való értelmezése. Erre példa az általános egyensúlyelmélet kiterjesztése bizonytalan kimenetelek esetére (Arrow [3]; Debreu [13] 7. fejezet). Feltételezzük, hogy a termelésben van valamiféle bizonytalanság, például az időjárás következtében. Egyfajta időjárás az egyik termék termelőjének kedvez és sújtja a másikat, míg egy másfajta időjárás hatása ellenkező előjelű. Ha feltesszük, hogy az egyének idegenkednek a kockázattól, akkor van tere egy — mindkét fél számára jövedelmező — biztosítási ügyletnek. Még ha el is tekintünk a kockázattal szembeni idegenkedéstől, az egyének és vállalatok a bizonytalan jövőre tervezve szeretnék biztossá tenni, hogy a kereslet termékük iránt és a termelésük kölcsönösen megfeleljen egymásnak. Így például, ha bizonytalanság van a gabonakínálat terén, akkor a molnár preferálhatja az e bizonytalanság miatt előre nem látható, jövőbeli munkára szóló szerződést.

Vegyük át a valószínűségelméletből a *világ állapotának* fogalmát, ami a világ egy olyan leírása, amely pontosan meghatározza az összes javak induló készletét és a valamennyi rendelkezésre álló technológiai lehetőséget. A bizonytalanság azt jelenti, hogy nem tudjuk melyik állapot fog valójában bekövetkezni. A h-adik egyénnek az i-edik termékből a kiinduló állapotban meglevő készleteit $\bar{x}_{his}$-sel jelölhetjük,

ha az s-edik állapot következik be. Ehhez hasonlóan egy vállalat lehetséges input-output vektorai is függhetnek az s-edik állapottól; legyen $y_{fs}=(y_{f1s}, \ldots, y_{fns})$ az f vállalat egy lehetséges input-output vektora, ha az s-edik állapot áll fenn.

Bármely elosztás megvalósíthatósága függni fog az s-edik állapottól, s ezért ennek megfelelően kell változni a fogyasztási és termelési kötelezettségeknek is. Ezért bármely egyén döntéseit külön vektorral kell ábrázolnunk minden s-edik állapot esetén: $x_{hs}=(x_{h1s}, \ldots, x_{hns})$. Nyilvánvaló azonban, hogy minden érintett számára az az optimális, hogy előzetesen, egymástól függetlenül az összes lehetséges ilyen jellegű döntést előbb hozzák meg, mint hogy tudnák, a világ mely állapota fog valóban érvényesülni. Ez az előzetes döntés az, amely lehetővé teszi a biztosításból, a kockázatcsökkentésből eredő nyereséget. Ezért — valójában — az x_h vektorra kell gondolnunk, amely rögzített h esetén x_{his} komponenseket tartalmaz, ahol i a termékeken, s a világ állapotain fut végig.

Arra jutottunk, hogy a világ különböző állapotaiban a fizikailag azonos termékeket gazdaságilag különböző termékeknek tekintsük. Az eljárás teljesen hasonló Hicks a jelenbeli és jövőbeli termékekről adott elemzéséhez [15]; amelyben a fizikailag azonos termékek különböző időpontokban különböző termékekként szerepelnek.

Ezek után az egész eddigi elemzést megfelelő újraértelmezéssel alkalmazhatjuk. A megszokott értelemben vett termékeket *esetleges* termékekkel helyettesítjük; ami egy adott termék vásárlási és eladási ígérete akkor és csak akkor, ha a világ egy bizonyos állapota következik be. Ekkor a piac esetleges árakat határoz meg. A piac megtisztítása az esetleges piacok megtisztítását jelenti; a kötelezettségek elég rugalmasak ahhoz, hogy azokat mindig teljesíteni lehessen.

Meg kell jegyezni, hogy a preferenciarendezés az esetleges termékek vektorain tartalmazza mind a világ különböző állapotainak valószínűségére vonatkozó megítélés elemeit, mind a megszokott értelemben vett ízléselemeket. Minden más tényezőt változatlanul hagyva, egy valószínűtlennek vélt állapotban kevésbé lesz élénk a kereslet.

Kidolgozhatók ennek a modellnek a következményei. Nyilvánvaló, hogy az igényelt ún. esetleges termékek nincsenek a szükséges mennyiségben, de a modern piacokon rendelkezésre álló sokféle értékpapír (kötvény) részleges helyettesítőként szolgál. Az én gondolkodásomban az általános egyensúly bizonytalanság melletti modellje ugyanannyira normatív ideál, mint amennyire empirikus leírás. Az, ahogy a valóságos világ különbözik a modell kritériumaitól, a társadalompolitika számára azt sugallja: úgy fejlessze a hatékonyságot, hogy a kockázat vállalása megoszoljon.

A valóságban nem véletlen az, hogy nem minden — a hatékonysághoz szükséges — esetleges piac létezik, hanem olyan szükségszerű tény, amelynek fontos következményei vannak a gazdasági intézmények működésére és szerkezetére nézve. Durván fogalmazva az egyes eseményekről szóló információk, még az események bekövetkezte után sem egyenlően terjednek a lakosság körében. Két ember nem köthet olyan szerződést, amely egy bizonyos esemény vagy állapot bekövetkezésétől függ, ha valójában csak egyikük fog tudni az esemény bekövetkezéséről. Ennek sajá-

tos példája az, amit a biztosításban és a közgazdasági irodalomban „morális kockázatként" ismernek. Maga a biztosítás léte úgy változtatja az egyének magatartását, hogy kevésbé törődnek a kockázat elkerülésével. Az a biztosítási politika, amelyet a kockázatvállalás optimális elosztása igényelne, csak az elkerülethetlen kockázatokat fedezné és megkülönböztetné ezek hatását az egyén viselkedéséből következő hatásoktól. Valójában azonban a biztosító csak az eredményt tudja megfigyelni, például egy tűz vagy egy üzleti siker, illetve bukás esetében, és nem tudja azt egzogén és endogén alkotórészekre bontani. Általánosan, az esetleges szerződések csak a kölcsönösen megfigyelhető eseményekre építhetők, de a világ állapotának olyan vonásaira nem, amelyet csak az egyik és nem mindkét résztvevő ismerhet.

Bár itt nincs időm a kérdés kifejtésére, fenntartom, hogy az információk egyenlőtlenségéből adódó elosztási nehézségeknek olyan egészen különböző területeken is jelentőségük van, mint az orvosi ellátás vagy a faji megkülönböztetés. (lásd Arrow [4], [6]). Általános formában először Roy Radner [32] fejtette ki azokat a nehézségeket, amelyeket az információk különbözősége okoz a kockázatvállalás optimális elosztásának elérésében.

VIII. A TÁRSADALMI VÁLASZTÁS ELMÉLETE

Az általános versenyegyensúly mindenekelőtt azt mutatja meg, hogy a piacon keresztül koordinált, egymástól független magándöntések útján milyen mértékben érhető el az erőforrások társadalmi elosztása. Biztosak lehetünk abban, hogy valójában nemcsak hogy elérhető egy elosztás, de az eredmény egyúttal Pareto-hatékony is lesz. Hangsúlyoztuk azonban, hogy ebben a folyamatban semmi nem garantálja, hogy az így kialakult elosztás méltányos lesz. Valóban, az elmélet megmutatta nekünk, hogy a végső elosztás függni fog a készletek kezdeti megoszlásától és attól, hogy kinek a tulajdonában vannak a vállalatok. Ha a piac előnyös tulajdonságaira akarunk támaszkodni, de egyúttal méltányosabb elosztást is akarunk elérni, az elmélet inkább a kezdeti elosztás megváltoztatásának stratégiáját sugallja, mint azt, hogy valamelyik későbbi fázisban avatkozzunk be az elosztási folyamatba.

Így még a döntéshozatal decentralizálásának leginkább kedvező feltétele mellett is elengedhetetlenül szükség van az elosztásra vonatkozó társadalmi vagy kollektív választásokra. Ami azt illeti, nagyon sok olyan más helyzet is van, amikor szükséges vagy legalább is kívánatos a piacnak a kollektív döntéshozással való helyettesítése. Mind a politikai tudományok művelői, mind a közgazdászok tárgyalták — a maguk eltérő módján — az állam nélkülözhetetlen szerepét. A közgazdászok között e viták az externalitások, a növekvő hozadék és a piaci kudarcok körül lángoltak fel; e fogalmak tisztázása és alkalmazása egyike a modern közgazdasági gondolkodás legnagyobb eredményeinek, most azonban csak arra van időm, hogy annyiban emlékeztessem Önöket e fogalmakra, amennyire ez a kollektív döntéshozás normatív és leíró elemzéséhez szükséges.

A társadalmi választás vonatkozásában minden egyénről feltehetjük, hogy van egy bizonyos preferenciarendezése az összes lehetséges társadalmi állapotok halmazán. Ez a rendezés nemcsak a saját fogyasztási igényeit fejezi ki, de társadalmi attitűdjeit, az elosztás igazságosságáról vagy a kollektív választások másokra vonatkozó hasznáról alkotott nézeteit is. Az ordinalista nézőpont nem teszi lehetővé e preferencia határozott mennyiségi kifejezését, legalábbis olyan kifejezését, amelynek bármiféle interperszonális érvényessége van.

A klasszikus utilitarianizmus kiköti, hogy az alternatív társadalmi állapotok közti választást a társadalom tagjaira ható következményeik jegyében kell megítélni; vagyis a társadalmi választásokra vonatkozó egyedi preferenciaskálák kategóriáiban, ha a jelenlegi terminológiát használjuk. Az egyedi preferenciák sokfélesége szempontjából ez nyilvánvalóan nem elégséges alap a választáshoz. A klasszikus utilitarianizmusban implicit, Bergson munkájában pedig explicit módon szerepel, hogy van egy második szint, amelyen az egyedi megítélések aggregálódnak valamivé, amit talán jóléti megítélésnek nevezhetnénk.

A jóléti megítélések kialakulása logikailag azonos azzal, amit *alapszabálynak* (constitution) fogok nevezni. Az alapszabály egy olyan szabály, amely az egyedi preferenciarendezések minden lehetséges halmazához hozzákapcsol egy társadalmi választási szabályt. Következésképp a társadalmi választási szabály olyan szabály, amellyel a megvalósítható alternatívák bármely halmazából kiválasztható a társadalmilag preferált akció.

Az eddigiek alapján, az alapszabály leírása tulajdonképpen tautológia, legalábbis akkor, ha abból a nézetből indulunk ki, hogy a társadalmi választásnak az egyéni preferenciarendezéseken kell alapulnia. A valódi kérdés azonban az, hogy milyen feltételeket kell szabni az alapszabálynak.

Az egyik feltétel — ami már Bergson művében is szerepel — az, hogy az egyéni preferenciák bármely adott halmaza által meghatározott társadalmi választási szabálynak eleget kell tennie egy rendezés formális követelményeinek; azaz legyen minden lehetséges alternatív társadalmi állapot rangsorolható, és ekkor a társadalmi választásnak az alternatívák bármely halmazából a rendelkezésre álló halmazon végrehajtott rendezés szerinti legpreferáltabb alternatívának kell lennie. Ezt szokták a *kollektív racionalitás* feltételének nevezni.

A második feltétel, megint Bergsonnal egyetértésben, a *Pareto-elv*; a társadalmi választási folyamatnak sohasem lehet olyan eredménye, amely mellett van más, olyan megvalósítható alternatíva, amit a saját preferenciarendezése szerint mindenki előnyben részesítene.

A harmadik, egy kissé ellentmondásos feltétel a *diktatúra hiányának feltétele:* az alapszabálynak olyannak kell lennie, hogy ne létezhessen olyan egyén, akinek preferenciái — a többiek preferenciáira való tekintet nélkül — automatikusan társadalmiakká válnak.

A negyedik — általam javasolt — feltétel az *irreleváns alternatívák függetlenségének feltétele* vitathatóbb, bár én kiállnék amellett, hogy gyakorlatilag erősen indokolt:

az alternatívák bármely halmazából történő társadalmi választás csak az egyének — az adott halmazban szereplő — alternatívák közti rendezésétől függ. Hogy lássuk miről van szó, tételezzük fel, hogy egy társadalomnak választania kell néhány alternatíva között, s ezt meg is teszi. A döntés meghozatala után új, logikus lehetőségként tekinthető alternatíva merül fel, amire azonban az előzőekben nem gondoltak, és ami még nem megvalósítható. Az egyének kiterjeszthetik preferenciarendezésüket az új alternatíva rangsorukba való beillesztésével; de vajon érinti-e egyáltalán egy nem választható alternatíváról szóló preferenciainformáció a már meghozott döntést?

A szavazás bármely formája minden bizonnyal kielégíti az irreleváns alternatívák függetlenségének feltételét; soha nem kérdezik, illetve nem veszik figyelembe a szavazóknak a jelöltek és nemjelöltek közti vagy pusztán a nemjelöltekre vonatkozó preferenciáit.

Kiderül (Arrow [2], [5]), hogy ez a négy ésszerű tapogatózó követelmény ellentmondásos. Azaz, ha bármilyen alapszabályt gondolunk ki, mindig található az egyedi rendezéseknek egy olyan halmaza, amely azt eredményezi, hogy az alapszabály megsérti e feltételek egyikét. Ennek a paradoxonnak egy speciális formája régi. A többségi szavazás a társadalmi választás vonzó módszere. Mint az összes többi szavazási módszer, ez is kielégíti az irreleváns alternatívák függetlenségének feltételét, minden bizonnyal a Pareto-elvet és a diktatúra hiányának feltételét is. Condorcet azonban már 1785-ben rámutatott, hogy a többségi szavazás nem vezethet rendezéshez. Pontosabban felléphet az intranzivitás. Tekintsük a következő példát. Három alternatíva van — x, y és z —, amelyek között választani kell. A szavazók egyharmadának rangsora x, y, z, egyharmadának y, z, x és egyharmadának z, x, y. A szavazók többsége preferálja x-et y-nal szemben, y-t z-vel szemben, és ugyancsak a többség preferálja z-t x-szel szemben. Sajnos ez az eredmény nem tulajdonítható a többségi szavazás megszüntethető tökéletlenségének. A társadalmi választás négy feltétele kölcsönösen ellentmond egymásnak.

A társadalmi választás paradoxonának még nem tisztázottak a filozófiai és elosztási következményei. Bizonyos, hogy nincs egyszerű megoldás. Remélem, hogy nem elbátortalanító akadályként, hanem kihívásként fogadják ezt a paradoxont.

IRODALOM

[1] *Arrow, K. J.:* An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics. Megjelent: A. J. Neyman (szerk.:) Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability c. kötetben. Berkeley—Los Angeles. 1951, 507—532. old.

[2] *Arrow K. J.:* Social Choice and Individual Values. New York, 1951.

[3] *Arrow, K. J.:* Le Role de Valeurs Boursieres pour la Repartition la Meilleure des Risques. Econometrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scoentifique, Vol. XI. 1953. 41—47. old.

[4] *Arrow, K. J.:* Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care. Amer. Econ. Rev., Dec. 1963. 53. 941—973. old.

[5] *Arrow, K. J.:* Social Choice and Individual Values. New York, 1963.

[6] *Arrow, K. J.:* Models of Racial Discrimination. Megjelent: A. H. Pascal (szerk.) Racial Discrimination in Economic Life c. kötetben. Lexington, 1972.

[7] *Arrow, K. J.—Debreu, G.:* Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, July, 1954. 22, 265—290. old.

[8] *Arrow, K. J.—Hahn, F. H.:* General Competitive Analysis. San Francisco, 1971.

[9] *Bergson, A.:* A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics. Quart. J. Econ., Feb. 1938. 52, 310—334. old.

[10] *Cassel, K. G.:* Theoretische Sozialökonomie. Erlangen 1918.

[11] *Condercet, M.:* Essai sur l'application de l'analyse a la probabilité des decisions rendues a la pluralité des voix. Paris, 1785.

[12] *Debreu, G.:* The Coefficient of Resource Utilization. Econometrica, July, 1951. 19. 273—292. old.

[13] *Debreu, G.;* Theory of Value. New York, 1959.

[14] *Gale, D.:* General Equilibrium of Linear Models, (kiadatlan kézirat), 1957.

[15] *Hicks, J. R.:* Érték és tőke. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[16] *Hicks, J. R.—Allen, R. G. D.:* A Reconsideration of the Theory of Value. Economica, Feb. 1934. 1, 52—76. old. 196—219. old.

[17] *Hotelling, H.:* Demand Functions with Limited Budgets. Econometrica, Jan. 1935. 3. 66—78. old.

[18] *Hotelling, H.:* The General Welfare in Ralation to Problems of Taxation and Railway and Utility Rates. Econometrica, July, 1938. 6. 242—269. old.

[19] *Kakutani, S.:* A Generalization of Brouwer's Fixed-Point Theorem, Duke Mathematical J. 1941. 8. 451—459. old.

[20] *Keynes, J. M.:* The General Theory of Employment Interest and Money. New York, 1936.

[21] *Koopmans, T. C.:* Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. Megjelent: Koopmans (szerk.): Activity Analysis of Allocation and Production c. kötetben. New York, 1951. 3. fejezet.

[22] *Kornai János:* Anti-Equilibrium. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1971.

[23] *Lange, O.:* Say's Law: A Restatement and Criticism. Megjelent: Lange és mások (szerk.) Studies in Mathematical Economics and Econometrics c. kötetben. Chicago, 1942. 49—68. old.

[24] *Leijonhufvud, A.:* On Keynesian Economics and the Economics of Keynes: A Study of Monetary Theory. New York, 1968.

[25] *McKenzie, L.:* On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems. Econometrica, Apr. 1954. 22. 147—161. old.

[26] *McKenzie, L.:* On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market. Econometrica, Jan. 1959. 27, 54—71. old.

[27] *McKenzie, L.:* On the Existence of General Equilibrium: Some Corrections. Econometrica, Apr. 1961. 29. 247—248. old.

[28] *Neisser, H.:* Lohnhöhe und Beschäftigungsgrad im Marktgleichgewicht. Weltwirschaftliches Archiv, 1932. 36. 415—455. old.

[29] *Neumann, von J.:* Über ein ökonomisches Gelichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines Mathematischen Kolliquiums, 1939. 8, 73—83. old..

[30] *Neumann, von J.:—O. Morgenstern* Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, 1944.

[31] *Pareto, V.:* Manuel d'Économic Politique, Paris, 1909.

[32] *Radner, R.:* Competitive Equilibrium under Uncertainty. Econometrica, Jan. 1968. 36. 31—58. old.

[33] *Samuelson, P. A.:* A Note on the Pure Theory of Consumer Behavior. Economica, Feb. 1938. 4. 61—71. old.

[34] *Samuelson, P. A.:* Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Mass, 1947.

[35] *Samuelson, P. A.:* Maximum Principles in Analytical Economics. Megjelent: Les Prix Nobel en 1970. c. kötetben, Stockholm, 1971. 273—288. old.

[36] *Schlesinger, K.:* Über die Produktionsgleichungen der ökomische Wertlehre. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 1933—34. 6. 10—11. old.

[37] *Stackelberg, H. von:* Zwei Kritische bemerkungen zur preistheorie Gustav Cassels. Zeitschrift für Nationalökonomie, 1933. 4. 456—472. old.

[38] *Wald, A.:* Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuená Produktionsgleichungen. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 1933—34. 6, 12—20. old.

[39] *Wald, A.:* Über die Produktionsgleichungen der ökonomische Wertlehre. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 1934—35. 7. 1—6. old.

[40] *Wald, A.:* Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie. Zeitschrift für Nationalökonomic, 1936. 7. 637—670. old.

II.

NÖVEKEDÉS ÉS INTERTEMPORÁLIS PROBLÉMÁK

*A közületi beruházás hozama és az optimális költségvetési politika**

Figyelembe véve a tárgyalásra kerülő anyag terjedelmét és módszertani jellegét, érdemesnek tűnik a főbb pontokat előre vázolni. Ez az előzetes összefoglaló — rövid terjedelme miatt — szükségképpen nagyon hézagos. Célunk a könyv alapállításainak önmagában is érthető leírása, ami bizonyos esetekben pontosan követi az egész mű tárgyalásának menetét, máskor viszont eltér tőle. Ezért az összefoglaló és az I. fejezet kezdete között némi egyenetlenséget tapasztalhat az olvasó, amiért elnézést kérünk.

A zárójelben levő hivatkozások a könyv fejezeteire és szakaszaira vonatkoznak.

I. AZ ALAPKÉRDÉSEK

A versenygazdaság társadalmi értékelésében szokás a társadalmi költségeket a piaci árakkal becsülni. Vajon miért nem elégít ki sokunkat az, hogy a tőkehozam piaci rátáját használjuk mint a haszonáldozat költségét (opportunity cost). Néhány, ezzel kapcsolatos nehézséget már régóta hangsúlyoznak, mások pedig adódnak a közgazdaságtan elméletéből (I. 1—2, V. 1—2).

a) Nem egy, hanem egy egész sereg piaci hozamráta van. Melyik az, amelyeknek a használata a megfelelő? Ténylegesen a hozamráták halmaza még nagyobb, mint amekkorának látszik, mivel a hitelosztás léte maga után vonja számos árnyékár létezését, amelyeket a piacon nem figyelünk meg.

b) Mivel nagyon kevés ismeretünk van a jövő piacáról, a jóléti gazdaságtannak árakra és különösen a kamatláb elosztási szerepére vonatkozó érvelése erősen vitatható. A klasszikus eset csak akkor lenne érvényes, ha az árakra vonatkozó várakozások pontosak lennének.

c) A jövő kockázatos, a létező kockázatviselő piacok elvben nem elég teljesek és differenciáltak az optimális elosztás megvalósításához. Ezért felmerül az a kérdés,

* (Társszerző: *M. Kurz*) A Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy c. mű összefoglaló fejezete (Summary). Baltimore and London. The John Hopkins Press. 1970.

hogy az állami beruházásokból származó jövőbeli jövedelmek értékelésébe hogyan vezessük be a bizonytalanságot. Lehetőség erre a diszkonttényező módosítása.

d) Feltesszük, hogy az állami beruházások elsősorban közjavak beruházásai; azaz olyan áruké, amelyek az elidegeníthetetlenségük, vagy a növekvő hozadék miatt, nem bízhatók önmagukban a piacra. Ezért ezeknek az áruknak a költsége és ebből következően a közületi beruházások hozama nem térülhet meg teljes mértékben. Így fellép e beruházások (adókkal és kölcsönökből történő) finanszírozásának kérdése, és e kérdés megoldása hathat a megfelelő diszkontlábra.

e) Széles körben elterjedt az az elvárás, hogy az állam vagy a közösség — amelynek megbízottja az állam — különleges felelősséget viseljen a jövő iránt, amely túlmutat azon, amelyet a jelenlegi piac szereplői sugallnak. Formális közgazdaságtani kifejezéssel élve: az időbeli teljes optimalizálás a megszületendő és az élő nemzedékek közti — nyilvánvalóan lehetetlen — cserét feltételezné. Az államot ebben az esetben úgy képzeljük el, mint aki burkoltan a még meg nem születettek nevében cselekszik.

Az első három tényező kétségtelenül nagyon szoros kapcsolatban van egymással. Mivel a kockázatviselés kiegészíti a beruházást, a kockázatviselő piacok szűkössége akadályozza a jövőre vonatkozó szerződések megkötését. A kamatlábak sokasága és a hitelelosztás széles köre világosan a hitelkockázat biztosításának nem létező külön piacait helyettesíti. Szigorúan véve, addig nincs egyetlenegy kockázatmentes kamatláb sem, ameddig az ármozgások és a kamatláb jövőbeli értéke bizonytalan (a kamatláb változásai miatt tőkenyereség és -veszteség keletkezik). A bizonytalanság utóbbi forrása hiányzik a tartós betéteknél, és majdnem teljesen hiányzik a rövid lejáratú váltóknál, de sajnos a hosszú távú kamatlábak a hosszú távú befektetések legtermészetesebb diszkontrátái. De még ha volna is olyan kamatláb, amit lényegében kockázatmentesnek tekinthetnénk, ebből még nem következne szükségszerűen, hogy ez méri az egyének időpreferenciáját. Ilyen kamatláb nyilván alkalmatlan lenne olyan egyénnél, aki semmilyen kockázatmentes értékpapírt nem tart és nem bocsát ki. Továbbá, az a tény, hogy egy egyén, aki hosszú időszakra tervez, tudja, hogy a jövőben nem kölcsönözhet kockázatmentes kamatláb mellett, bonyolult és nehezen érthető módon befolyásolja az ő folyó fogyasztási és részvényvásárlási döntéseit. Feltételezhető, hogy a kockázatmentes ráta alábecsülné az egyén valódi időpreferenciáját.

Így három alapvető problémát látunk a társadalmi diszkontláb és a piaci kamatláb azonosításában: *a)* eltérések vannak a piaci értékek és a piaci viselkedés között, mivel a tőkepiacok tökéletlenek; *b)* eltérések vannak az állami beruházási javak társadalmi értéke és magánköltsége között; *c)* eltérések vannak a jövőt illetően a társadalmi és a magánértékek között. Egy negyedik, speciálisabb problémát már kiemelten említettünk: a tőkepiac tökéletlenségét, amelynek okozója a részvénytársasági jövedelemadó.

2. GAZDASÁGPOLITIKA EGY VEGYESGAZDASÁGBAN (V.)

Egy tökéletesen és eszményien centralizált gazdaságban az imént felsorolt eltérések lényegtelenek lennének; a központi tervhivatal képes lenne elkészíteni és végrehajtani egy optimális beruházási tervet. E politikai kiszámítása során hasznos lehet bizonyos Lagrange-szorzók meghatározása, amelyek diszkontlábakként értelmezhetők.

Olyan gazdaságban, ahol mind az állami szektor, mind a magánszektor részt vesz a gazdasági döntésekben, a probléma elvileg bonyolultabb. Végül is a közületi beruházási terveket a fogyasztási és magánberuházási tervek figyelembevételével kell kidolgozni, és fordítva; ugyanis e tevékenységek mindegyike ugyanazokért az erőforrásokért versenyez, és a közületi, illetve a magánberuházások, valamint bármely mai beruházás, illetve mai (vagy a holnapi) fogyasztás között komplementáris viszony van. Az állam nem képes közvetlenül szabályozni a fogyasztást vagy a magánberuházást, de *eszközeivel* képes hatni rájuk (mint pl. adókkal és adósságok vállalásával, illetve megszüntetésével). Ezért az államnak a közületi beruházásokról és a gazdaságpolitikai eszközök megválasztásáról együtt kell döntenie. Mivel a közületi beruházások volumenének meghatározása burkoltan a határhatékonyságról való döntés — azaz a diszkontlábról való döntés —, ez a hozzáállás ekvivalens azzal a szokásosabb megfogalmazással, hogy a társadalmi diszkontláb a finanszírozás módjától függ.

Tárgyalásunk legvilágosabb módja az, ha e kérdéscsoportot a gazdaságpolitika Tinbergen-féle elméletének dinamikus megfelelőjeként tekintjük. Az államról feltételezzük, hogy meghatározott céljai vannak, és ezek elérésére az eszközök egy adott halmaza rendelkezésére áll. Kiszámítható, hogy mi volna az úgynevezett *közösség számára optimális politika*, egy az összes változótól (esetünkben a közberuházásoktól, a magánberuházásoktól és a fogyasztástól) függő politika, amelyet egy korlátlan hatalommal rendelkező és tökéletesen igazságos állam alkalmazna. Ekkor az első kérdés az lehet, hogy ún. közösség számára optimális politika egyáltalán megvalósítható-e az állam által megfelelően választott eszközértékekkel (values of instruments). Formálisan és általánosabban azt mondhatjuk, hogy egy adott elosztási politika egy adott eszközhalmazzal *szabályozható*, ha azoknak létezik olyan — általában időben változó — értékrendszere, amelynél az állami és a magánszektor együtt megvalósítja e politikát (V.0, V.3).

A közösség számára optimális politika szabályozhatósága természetesen függ a rendelkezésre álló eszközök számától és erejétől. Amennyiben a megadott eszközökkel nem szabályozható a közösség számára optimális politika, akkor a „második legjobb" politika után kell néznünk; amely az eszközök adott halmazával elérhető legjobb politika. (V.4)

3. A BERUHÁZÁSI POLITIKA MINT IDŐBELI OPTIMALIZÁLÁS (I.3)

A társadalmi diszkontláb kérdésének elemzésekor felmerülő néhány probléma megegyezik a beruházási politika összes problémájával. E problémák a tőke és a beruházás közti állomány—folyam (stock—flow) viszonyban rejlenek — a tőke határozza meg a kibocsátást és a beruházást, ez az a része a kibocsátásnak, amely a tőke növelését szolgálja. A tőke az állományjellegű fogalom, melyet mennyiségi egységekben mérünk; a beruházás viszont — a fogyasztáshoz és a kibocsátáshoz hasonlóan — folyam jellegű, ezért időegységre jutó mennyiségekben mérjük. Ha csak egy árut és csak egyfajta tőkét feltételezünk a tőkefelhalmozás alapképlete a következő (az értékcsökkenéstől eltekintve):

$$\dot{K} = I \tag{1}$$

ahol K a tőkeállomány, I a beruházási intenzitás, és a pont a K felett a K időbeli változási sebességét jelöli. Ha Y a kibocsátás és C a fogyasztás, akkor (1)-et a következő azonossággal egészíthetjük ki:

$$Y = C + I \tag{2}$$

és még valamilyen, Y-t K-val összekötő, termelési kapcsolattal. Egy tökéletesen centralizált gazdaságban az állam eszközei minden pillanatban C és I, amelyeket úgy kell megválasztania, hogy a (2) feltétel mellett valamilyen alkalmasan választott — az egész fogyasztási pályát figyelembe vevő — hasznossági függvény maximális legyen.

A probléma ilyen egyszerű megfogalmazásának jelentős következményei vannak az elemzésnél. Sok korábbi elemzés egyszerűen az állami beruházások közvetlen hozadékát értékelte. A későbbi szerzők felismerték, hogy az állami beruházások hozadéka (az úgynevezett throw-off) jövőbeli fogyasztásra, magán-, illetve állami beruházásra is felhasználható. Azonban még ezek a szerzők is szükségtelenül merev feltevésekkel éltek a jövőbeli allokációra vonatkozóan. Konkrétabban: néhányan feltételezték, hogy a hozadéknak a későbbi állami beruházásokhoz viszonyított aránya rögzített. De ez ellentmondásos nézőpontot tükröz. A beruházási politika célja: adott pillanatban az optimális döntések meghatározása, de ekkor azt is fel kell tennünk, hogy a jövőbeli beruházások optimálisak.

A jelenlegi és a jövőbeli beruházások egyidejű, egymással összhangban levő optimalizálása olyan matematikai technikák alkalmazását követeli meg, amelyek modern alakjukban „dinamikus programozásként" és „az optimális szabályozás elméleteként" ismertek. (II.)

4. TERMELÉSI ÉS ÉRTÉKELÉSI FELTEVÉSEK

Feltételezzük, hogy a tőke két típusa létezik: magán és állami, valamint, hogy az Y kibocsátás bármely pillanatban e két típusú tőke mennyiségének, K_p-nak és K_g-nek, illetve az L munkaerőnek a függvénye. Továbbá feltesszük, hogy a munkaerő állandó π ütemben nő. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor minden változó állandó hozadékú, a technikai haladás munkamegtakarító jellegű (labor-augmenting), és a termelékenység növekedési üteme állandó, τ.

$$Y = F(K_p, K_g, e^{\tau t} L), \tag{1}$$

ahol t az idő. Az F függvény konkáv és elsőfokú homogén. Ha $\gamma = \pi + \tau$ definiálja a növekedés természetes ütemét, és legyen

$$y = e^{-\gamma t} Y, \quad k_p = e^{-\gamma t} K_p, \quad k_g = e^{-\gamma t} K_g, \tag{2}$$

ekkor

$$y = f(k_p, k_g), \tag{3}$$

ahol $f(k_p, k_g)$ szigorúan konkáv (I.5, II.1, IV.1—2).

Kevésbé ismert, hogy a növekvő hozadék bizonyos esetei ugyanígy felírhatók. Alapvető az a feltételezés, hogy az állami tőke munkamegtakarító, ami a munkaerőprogramoknak biztosan nagyon jól megfelel. Tegyük fel, hogy az állami tőke és a munka együttműködhet — esetleg növekvő hozadékkal — egy közbülső áru termelésében, amit „képzett munkának" nevezhetünk; ami aztán együttműködik a magántőkével, állandó hozadékú kibocsátást eredményezve. A képzett munkára vonatkozó termelési függvényt speciálisan $H(K_g, L^\delta)$-nak vesszük, ahol H konkáv és elsőfokú homogén. A $\delta > 1$ eset képviseli a növekvő hozadékot.

E megfogalmazást általánosíthatjuk, feltéve, hogy a technikai haladás munkamegtakarító jellegű, üteme τ'. A termelési feltevések most

$$Y = G[K_p, H(K_g, L_E^\delta)] \tag{4}$$

alakot öltik alkalmas $\delta > 0$-ra, ahol G és H elsőfokú homogén és konkáv függvények. valamint $L_E = Le^{\tau' t}$. (Ez a legáltalánosabb alak, amelyben lehetséges kiegyensúlyozott növekedés.) Ha most definiáljuk, hogy $\gamma = \delta(\pi + \tau')$, $\tau = \gamma - \pi$, és alkalmazzuk a (2) definíciót, újból levezethetjük a (3)-at, a $\gamma = \pi + \tau$ összefüggéssel együtt (I.5, III.5, IV.8).

Az alternatív politikákat értékelő célfüggvényt itt

$$\int_0^\infty e^{-\varrho t} P(t) U[\bar{c}(t)]\, dt, \tag{5}$$

-nek vesszük, ahol ϱ a hasznosságokra vonatkozó diszkonttényező (amely nem szükségképpen vonatkozik az árukra), P a népesség, $\bar{c}$ az egy főre jutó fogyasztás

és U a hasznosság-intenzitás. Nem kíséreljük meg e célfüggvény részletes alátámasztását, reméljük, hogy elfogadják mint kézenfekvőt; azonban néhány kiegészítő megjegyzést teszünk. *a)* Az (5) kifejezés figyelmen kívül hagyja a jövedelemelosztási megfontolásokat, amelytől mi elvonatkoztatunk. *b)* Az időbeli additivitás és a diszkontálási eljárás stacioneritása nagyon ésszerűnek látszik a hosszú távú következmények elemzésénél. *c)* A végtelen időtáv azt az alapvető nézőpontot tükrözi, hogy a beruházások következményei nagyon sokáig fennmaradnak; bármely rövid távú vizsgálat megköveteli az időszak végén a tőkeállomány valamilyen értékelési módszerét; az egyetlen megfelelő értékelés: a jövőbeli használati érték. *d)* A hasznosságot az egy főre jutó fogyasztáshoz kapcsoljuk, mivel ez az, amit az átlagos egyén kap; azonban ha a különböző nemzedékek különböző számú egyénből állnak, akkor a társadalomnak a diszkontált hasznosságok összegét kell maximalizálni; ellenkező esetben hatrányos megkülönböztetésben részesülnek a népesebb nemzedékek. *e)* Bizonyos állami tőkék közvetlenül hozzájárulnak a fogyasztók kielégítéséhez, és általánosabb volna, ha U nemcsak $\bar{c}$-től, hanem az egy főre jutó állami tőkétől, $\bar{k}_g$-től is függne. A könyv részletes tárgyalásában az általánosabb feltevést alkalmazzuk, csak ebben az összefoglalóban élünk az egyszerűbb feltevéssel. (I.4).

Tételezzük fel még, hogy $U(\bar{c})\,(1-\sigma)$-fokú homogén $(\sigma>0)$, e függvények családja nagy és rugalmas. Ha definiáljuk

$$c = P(t)\bar{c}e^{-\gamma t} = P(0)\bar{c}e^{-\gamma t} \tag{6}$$

összefüggést (azaz az összfogyasztást kiigazítva a növekedés természetes ütemével), akkor néhány elemi számolási művelet megmutatja, hogy

$$e^{-\varrho t}P(t)\,U(\bar{c}) = [P(0)]^{\sigma}e^{-\gamma t}U(c),$$

ahol

$$\omega = \varrho+\sigma\tau, \quad \lambda = \omega-\gamma. \tag{7}$$

A $[P(0)]^{\sigma}$ állandó elhanyagolható a maximalizálási feladatokban, így a célfüggvényt

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}U[c(t)]\,dt. \tag{8}$$

alakba írhatjuk. Feltesszük, hogy $\lambda>0$.

Definíció szerint

$$Y = C+I_p+I_g, \quad \dot{K}_p = I_p, \quad \dot{K}_g = I_g,$$

ahol I_p és I_g rendre a magán- és az állami beruházások intenzitása, és a szimbólum feletti pont a változó idő szerinti deriváltját jelöli. Ha most bevezetjük a növekedés szerint normalizált beruházási intenzitásokat:

$$i_p = e^{-\gamma t}I_p, \quad i_g = e^{-\gamma t}I_g, \tag{9}$$

akkor a (2)-ből és a (6)-ból következően

$$y = c+i_p+i_g, \quad k_p = i_p-\gamma k_p, \quad k_g = i_g-\gamma k_g. \tag{10}$$

Ezen átalakítások után valószínűleg legegyszerűbb feltételezni, hogy időben állandó népességgel és technikával van dolgunk, ahol a jövőbeli hasznosságot λ-val diszkontáljuk, és mindkét tőke értékcsökkenése γ. Az előző tárgyalásból és speciálisan a (8), a (2) és a (10) képletekből következik, hogy egy ilyen statikus modell teljesen izomorf azzal a dinamikus modellel, amellyel elsődlegesen foglalkozunk (III.1—2, IV.1—2).

5. A KÖZÖSSÉG SZÁMÁRA OPTIMÁLIS POLITIKA (IV)

Első lépésben hasznos azt az időbeli allokációs politikát vizsgálni, amelyet egy olyan teljesen centralizált gazdaság folytatna, amely megválaszthatja a fogyasztását és mindkét típusú tőkeberuházását. Induljunk ki a két tőke adott kezdeti mennyiségéből. Ekkor a feladat az, hogy úgy válasszuk meg az eszközöket — c fogyasztást, és i_p, i_g magán-, illetve állami beruházást — az idő függvényében, hogy a (8) vagy az (5) célfüggvény maximális legyen. Megjegyezzük, hogy bármely időpontot választva indulásként a jövő ugyanolyan szerkezetű: ezért világos, hogy az eszközök választása csak k_p és k_g függvénye.

Egy optimális politika — feltevéseink mellett — egy stacioner egyensúlyhoz fog tartani, k_p és k_g (a kétféle tőkenövekedés kiigazított állományai) értékéből képzett párhoz: nevezzük őket rendre k_p^∞-nek, illetve k_g^∞-nek. Az említett feltevések mellett ha k_p és k_g kezdeti érték rendre k_p^∞ és k_g^∞, akkor az optimális politika szerint csak állandóak maradnak; ekkor az ún. növekedéshez igazított fogyasztás, és a kétféle beruházás értékei, rendre c, i_p és i_g szintén állandóak. Azonban a most következő tárgyalás nem szorítkozik kizárólag a kiegyensúlyozott növekedési pályákra: a kezdő feltételek tetszőlegesek lehetnek.

Abban az esetben, ha a kétféle tőke a két szektor között szabadon mozoghat, akkor egy a közösség számára optimális politika ezt a két fajta tőkét egynek tekintheti. Speciálisan legyen $k=k_p+k_g$; ekkor bármely pillanatban a teljes k-t úgy kell a két szektor között elosztani, hogy a kibocsátás maximális legyen. (A feltevés szerint a tőke a jövőben úgy osztható el, ahogy kívánjuk, ezért a folyó kibocsátás maximalizálása nyilvánvalóan felülmúl bármely más politikát.) A kibocsátás maximalizálása azt követeli meg, hogy

$$f_g = f_p; \tag{11}$$

azaz azt a közismert elvet, miszerint az állami tőkehozadéknak egyenlőnek kell lennie a magántőke hozadékával.

Azonban fontos megjegyezni, hogy még ha ez a helyzet fenn is áll, ezzel még nem jellemeztük teljesen a politikát; önmagában ez semmiképpen sem határozza

meg a végrehajtandó beruházások volumenét. Szükségünk van az optimális politika teljes leírására.

Ebben az esetben az eljárás nagyon egyszerű. Mivel k_p-t és k_g-t úgy választjuk, hogy adott k mellett a kibocsátás maximális legyen; a kibocsátás a (3)-ból meghatározható:

$$y = g(k) = \max_{k_p+k_g=k} f(k_p, k_g). \tag{12}$$

A (10)-ből adódóan

$$\dot{k} = i-\gamma k, \quad y = c+i, \tag{13}$$

ahol $i=i_p+i_g$ a teljes ún. növekedéshez igazított beruházás. A c és az i eszközöket az idő — jobban mondva k — függvényeként úgy választjuk meg, hogy maximalizáljuk az (5) célfüggvényt a (12) és a (13) feltételek, valamint adott $k=k_0$ kezdőérték mellett.

Minden javasolt fogyasztási áramhoz (consumption stream) tartozik egy implicit kamatláb, amint azt a következő bekezdésben megmutatjuk; ekkor egy optimális felhalmozási politika olyan, amely esetében a tőke határterméke (amely a (11) szerint mindkét fajtánál ugyanaz) egyenlő a fogyasztáshoz tartozó kamatlábbal. (III.1—2, IV.1—2).

Adott fogyasztási áramra a fogyasztáshoz tartozó diszkonttényező t időpontban egyszerűen a jövő és a jelen fogyasztásának helyettesítési határrátája; az (5) vagy a (8) figyelembevételével határhasznuk hányadosa, amelyet módosítani kell a jövőbeli hasznosság diszkontálásával:

A fogyasztáshoz tartozó diszkonttényező=

$$= (\textit{Hasznosság diszkonttényezője}) \times \left(\frac{\textit{A jövőbeli fogyasztás határhaszna}}{\textit{A jelen fogyasztás határhaszna}} \right).$$

Mivel a szorzat (relatív) változási sebessége tényezői (relatív) változási sebességének összege, és a kamatláb a diszkontálási tényező változási sebességének ellentettje, így

A fogyasztáshoz tartozó kamatláb=
=(a hasznosság kamatlába)−(a fogyasztás határhasznának változási sebessége).

Alkalmazzuk ezt az állítást a (18)-ra:
a (növekedéshez igazított) fogyasztási határhaszon változási sebessége

$$= \frac{1}{U'(c)}\frac{dU'(c)}{dt} = \frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c} = \frac{U''(c)c\dot{c}}{U'(c)c} = \sigma\frac{\dot{c}}{c}.$$

Így a növekedéshez igazított fogyasztásnak megfelelő kamatláb $\lambda+\sigma(\dot{c}/c)$. Mivel a növekedéshez igazított fogyasztás a fogyasztás növekedési üteménél γ-val lassabban nő; a (7)-ből adódóan:

$$\text{a fogyasztáshoz tartozó kamatláb} = r_c = \omega+\sigma(\dot{c}/c). \tag{14}$$

Ekkor a szokásos érvelés szerint az optimalitás azt követeli, hogy

(15) $$f_p = f_g = g' = r_c;$$

azaz a beruházás mindkét fajtájának értékelésében használt kamatláb meg kell hogy egyezzen az egyének változó fogyasztási áramának értékelésében implicit módon használt kamatlábbal.

Elemi megjegyzéseink nagyon fontos és nem mindig megértett következménye az, hogy a beruházási intenzitást (ebben az esetben mindkét típusú beruházását) nem csak a kamatláb határozza meg. A (15) azt mondja, hogy a tőkeállomány bármely időpontban kapcsolatban áll a kamatlábbal. A növekedéshez igazított tőkeállomány változása (ami a tőkeállomány normális növekedésének fenntartásán kívül szükséges) megköveteli a kamatláb változását.

Valóban a (15)-ben a rövid távú okozati lánc inkább a létező tőkeállománytól halad a kamatlábig, mint fordítva. Ez utóbbi viszont nem a fogyasztást (következésképpen a beruházást) határozza meg, hanem a fogyasztás változási sebességét. A (14)-ből és a (15)-ből

(16) $$\dot{c}/c = [g'(k) - \omega]/\sigma.$$

Ez az egyenlet a

(17) $$\dot{k} = g(k) - c - \gamma k,$$

kifejezéssel együtt, amely a (13)-ból és a (12)-ből vezethető le, a tőkeállomány és a fogyasztási szint időbeli fejlődését kormányzó differenciaegyenlet-párt adja. A tőkeállomány kezdeti értéke — lévén eszköz — adott, viszont a fogyasztásé nem.

Ténylegesen a fogyasztás kezdeti értékét abból a feltételből kell meghatározni, hogy a két időbeli pályának konvergálnia kell stacioner értékeihez. Ezek viszont úgy találhatók meg, ha $\dot{c}$ és $\dot{k}$ értékét a (16)-ban, illetve a (17)-ben rendre nullának vesszük:

(18) $$f_p^\infty = f_g^\infty = g'(k^\infty) = \omega,$$

(19) $$c^\infty = y^\infty - \gamma k^\infty.$$

Azaz hosszú távon mindkét tőke határhatékonyságának egyenlőnek kell lennie a szubjektív időpreferencia paraméterével; a beruházás akkora, amekkora a tőkeállományoknak a növekedés természetes ütemében történő növeléséhez szükséges; a fogyasztás annyi, amennyi marad a kibocsátásból.

A (16)-ból következik, hogy a fogyasztás addig növekszik, amíg a kamatláb a hosszú távú szubjektív időpreferencia felett van; azaz ha a kezdeti tőkeállomány alacsony, akkor a fogyasztás is alacsony, és fokozatosan nő állandósult (steady state) értékéig, ahogyan a tőke nő állandósult értékéig. A beruházás valamint a hozam jelenlegi és jövőbeli rátájának kapcsolata összetett; első megközelítésben azt mondhatjuk, hogy a növekedéshez igazított beruházás arányos a hozadék pillanatnyi rátája és az állandósult állapotú időpreferencia (ω) közti különbséggel.

Megismételve, a beruházások optimális szintjét — eltekintve a normális növekedéstől — nem a kamatláb, hanem elsősorban saját jövőbeli változásai határozzák meg. Az optimális beruházási politika kamatláb szerinti meghatározásának csak akkor és van értelme, ha a beruházási tevékenység szintje megfelelő.

6. SZABÁLYOZHATÓSÁG RÖGZÍTETT MAGÁNMEGTAKARÍTÁSI HÁNYADOS MELLETT

Most az ún. közösség számára optimális politika szabályozhatóságával foglalkozunk, valamint azzal az esettel, amikor kénytelenek vagyunk „második legjobb" politikát keresni, amennyiben a közösség számára optimális politika nem szabályozható a 2. pontban levők értelmében. A szabályozhatóság lehetősége a magánpiac működésétől és az állam számára rendelkezésre álló eszközök tartományától függ.

Az 1. pontban röviden megjegyeztük, hogy indokolt az a feltételezés, hogy a magánmegtakarítási magatartás nem döntő jellemzője az egyéni időpreferenciának. Kevés adat van arra, hogy a megtakarítások a valóságban érzékenyek volnának a hozadékrátákra, bár korai volna azt mondani, hogy az ellenkezője bizonyított. Azt az egyszerű feltevést alkalmazzuk, hogy a magánmegtakarítások az elkölthető jövedelmeknek rögzített s hányadát alkotják:

$$s_p = sy_d, \tag{20}$$

ahol s_p és y_d rendre a növekedéshez igazított magánmegtakarítások, illetve az elkölthető jövedelmek.

Az állam számára rendelkezésre álló eszközök tartományáról több alternatív feltételezéssel élünk. Az első eset tükrözi leginkább a tényleges gyakorlatot: az állami beruházások finanszírozása kizárólag a jövedelemadóból történik. A kölcsönök — legalább is békeidőben — viszonylag csekélyek a teljes költségvetéshez képest, és inkább foglalkoztatáspolitikai, mint elosztási célokat szolgálnak. Ebben az esetben legegyszerűbb, ha eltekintünk az adósságoktól. Legyen x a jövedelmi adó kulcsa. Ekkor

$$y_d = (1-x)y, \tag{21}$$

$$c = (1-s)y_d. \tag{22}$$

A magántőke képzése egyenlő a magánmegtakarítással; a növekedéshez igazítás miatt

$$\dot{k}_p = sy_d - \gamma k_p, \tag{23}$$

míg az állami tőkeképzés egyenlő az adókkal:

$$\dot{k}_g = xy - \gamma k_g. \tag{24}$$

Az optimális politika célja: a (8) célfüggvény maximalizálása a fenti korlátok mellett. Először figyeljük meg, hogy a közösség számára optimális politika csak véletlenül lehet szabályozható. A (23)-ból és a (22)-ből:

$$(\dot{k}_p+\gamma k_p)/c = s/(1-s).$$

Ekkor határértékben

$$\gamma k_p^{\infty}/c^{\infty} = s/(1-s).$$

Ha a közösség számára optimális politika megvalósítható lenne, a bal oldal értéke s-től független volna, és akkor az egyenlőség csak véletlenül állhat fenn.

Mivel általában a közösség számára optimális politika nem szabályozható, „második legjobb" politikát keresünk. Heurisztikusan a következőképpen járhatunk el. Bármely adott k_p és k_g kezdőértékre létezik egy optimális politika, amely a (8) diszkontált összhasznosság maximális értékét szolgáltatja: nevezzük ezt az értéket $W(k_p, k_g)$-nek. Ekkor k_p árnyékára a hasznosság kategóriáiban kifejezve

$$p_p = \partial W/\partial k_p,$$

és hasonlóan, az állami tőkére

$$p_g = \partial W/\partial k_g.$$

Bármely időpontot tekinthetünk kezdőpontnak; ezért a két időfüggvény — $p_p(t)$ és $p_g(t)$, amelyeket a szabályozáselméletben segédváltozóknak neveznek — társítható az optimális politikával. Így bármely tőkefajta kiegészítése értékelhető ezekkel. Ugyanakkor c fogyasztás $U(c)$ pillanatnyi hasznosságot nyújt, így a teljes nemzeti jövedelem — hasznosságban mérve — nem más, mint

$$H = U(c)+p_p k_p+p_g k_g,$$

vagy a (23)-ból és a (24)-ből:

(25) $$H = U(c)+p_p(sy_d-\gamma k_p)+p_g(xy-\gamma k_g).$$

Mivel mindig kívánatos H növelése, az egyetlen eszközt, x-et, úgy kell megválasztani, hogy H maximális legyen. (Felhívjuk a figyelmet, hogy mind c, mind y_g függ x-től.) Ekkor $\partial H/\partial x=0$-ból

(26) $$(1-s)U'(c)+sp_p = p_g$$

adódik, amely olyan egyenletként fogható fel, amely x-et k_p, k_g, p_p és p_g segítségével határozza meg. Jegyezzük meg, hogy az állami tőke növelésének terhe, amelyet adóból finanaszíroznak, $1-s$ és s arányban jut a fogyasztásra és a magánmegtakarításra.

Még meg kell határoznunk a segédváltozók időbeli alakulását. A felhasználandó egyenletek (a bennük szereplő hasznossági kategóriák és segédváltozók alapján) a tőketartás egyensúlyi feltételének megfelelői: a határhatékonyság plusz a tőke-

nyereség egyenlő kell hogy legyen a kamatláb és az ár szorzatával. Mivel most hasznosságokkal foglalkozunk, a „kamatláb" egyszerűen λ. A „határhatékonyság" pedig a H-hoz való hozzájárulás. Így a magántőkére vonatkozó egyenlet

$$(\partial H/\partial k_p) + \dot{p}_p = \lambda p_p,$$

és hasonló az állami tőkére vonatkozó egyenlet. A (25)-ből, némi egyszerűsítés után, azt kapjuk, hogy

$$\dot{p}_p = \omega p_p - p_g f_p \tag{27}$$

$$\dot{p}_g = \omega p_g - p_g f_g. \tag{28}$$

Ezek az egyenletek, a (23)-mal, a (24)-gyel és a (26)-tal együtt teljes dinamikus rendszert alkotnak. Ekkor ha a kezdeti feltételek adottak, a megoldás definiált. A $k_p(0)$ és a $k_g(0)$ kezdeti értékek történelmileg adottak, azonban a segédváltozók kezdeti értékeit úgy kell választani, hogy a megoldás a stacioner értékhez konvergáljon.

Nem könnyű egyszerű értelmezést adni egy ilyen kölcsönösen összefüggő rendszerre. Az elemzéshez nemcsak f_p és f_g hozadékrátára van szükségünk, hanem a segédváltozókra és változási sebességükre is. Azonban e megoldások kiszámíthatók.

Némi betekintést nyújt a stacioner értékek vizsgálata, amelyeket a korábbival megegyezően ∞ felső indexszel jelölünk. A tőkeállomány stacioneritása, amelyek mozgását a (23) és a (24) definiálja, azt vonja maga után, hogy

$$sy_d^\infty = \gamma k_p^\infty,$$

$$x^\infty y^\infty = \gamma k_g^\infty.$$

Szorozzuk be a második egyenletet s-sel és adjuk hozzá az elsőhöz, felhasználva az y_d definícióját:

$$sf(k_p^\infty, k_g^\infty) = \gamma(k_p^\infty + sk_g^\infty), \tag{29}$$

amely a Harrod—Domar összefüggés egyik alakja. A segédváltozók stacioneritása, amelyek mozgását a (27) és a (28) definiálja, azt vonja maga után, hogy

$$f_p(k_p^\infty, k_g^\infty) = (p_p^\infty/p_g^\infty)\omega, \tag{30}$$

$$f_g(k_p^\infty, k_g^\infty) = \omega.$$

A (29) és (31) egyenletekben csak k_p és k_g szerepel, így ezek az egyenletek meghatározottak. Ekkor a segédváltozók aszimptótikus aránya — a (30)-ból és a (31)-ből — ugyanez, mint a kétféle tőke határhatékonyságának aránya.

A (31) egyenlet egy kissé meglepő: az állami tőke hosszú távú hozadékrátája egyenlő az időpreferencia társadalmi rátájával, még akkor is, ha a magántőke hozama egészen különböző is. Ez azért igaz, mert az állami beruházásokból származó előnyök növelik a nemzeti jövedelmet, és így részben megtakarítják azt. Ezért az állami beruházások hozadéka közvetve a magánberuházásokból származó előnyök valamely részét is magában foglalja. Kiderül, hogy kiegyensúlyozott növekedés

esetén ez az előny pontosan ellensúlyozza a magánberuházások, állami beruházások megkezdéséből adódó, hátrányát.

A közösség számára optimális politika szabályozhatatlansága és egy második legjobb politikára való áttérés szükségessége a fenti tárgyalásban abból adódott, hogy egyetlen pénzügyi eszközre szorítkoztunk: a jövedelemadóra. Abból a célból, hogy illusztráljuk a szabályozhatóság lehetőségét több eszköz alkalmazása mellett, tegyük fel, hogy a fogyasztási adó kulcsa különbözhet a megtakarítási adókulcstól, de továbbra is megköveteljük a költségvetés egyensúlyát (nincs kölcsön). (VI.7). A rögzített megtakarítási hányadost a továbbiakban úgy fogjuk érteni, hogy az adóztatás utáni megtakarítások és a fogyasztás a teljes személyi jövedelmeknek rögzített részei. Így a megtakarítások sY-nal egyenlőek, de az állam ennek x_s részét elvonja, tehát a magánmegtakarítások $s(1-x_s)Y$-ra csökkennek. Hasonlóan a fogyasztás: $(1-s)(1-x_c)Y$. Az állami adóbevételek, következésképpen az állami beruházás nem más mint

$$[sx_s+(1-s)x_c]Y.$$

Ekkor

$$\dot{k}_p = s(1-x_s)y-\gamma k_p, \tag{32}$$

$$\dot{k}_g = [sx_s+(1-s)x_c]y-\gamma k_g, \tag{33}$$

$$c = (1-s)(1-x_c)y. \tag{34}$$

Tegyük fel, hogy az állam szabályozni kívánja a közösség számára optimális politikát vagy bármely más megvalósítható politikát. Mivel

$$c+i_p+i_g = y,$$

ahol

$$\dot{k}_p = i_p-\gamma k_p, \quad \dot{k}_g = i_g-\gamma k_g,$$

világos, hogy ha az állam képes úgy megválasztani az eszközök értékét — a két adókulcsot —, hogy a (32—34) három egyenlet közül kettő teljesüljön, akkor a harmadik magától teljesül. Bármely adott politika esetén, a fogyasztás és a kétféle tőke időfüggvényének meghatározásához csak a (34)-et kell megoldani x_c-re, a fogyasztási adókulcsra, és x_s-re a megtakarítási adókulcsra. A fogyasztási adó tehát azt biztosítja, hogy az együttes beruházás megfelelő legyen, míg a megtakarítási adó elosztja ezt a tőkeképzés két formája között.

A szabályozhatóság úgy is megvalósítható, ha az állam kölcsönt vehet föl, és vagy jövedelem- vagy fogyasztási adót szedhet. Érdemesnek tűnik megjegyezni, hogy az eszközök puszta megszámlálása (azaz ha legalább annyi eszköz van, mint cél — a ford.) nem elegendő a szabályozhatósághoz: a kölcsönök és a megtakarítási adó nem biztosítja a szabályozhatóságot. (VI.8).

Ezért az a szabály, hogy az állami beruházásokhoz tartozó diszkontláb meg kell hogy egyezzen a magánszektoréhoz tartozóval, nemcsak megfelelő beruházási szintet kíván meg, hanem — egy vegyesgazdaságban — azt is, hogy a finanszírozást az adók (vagy adók és kölcsönök) egyetlen megfelelő kombinációjával valósítsák meg.

7. SZABÁLYOZHATÓSÁG TÖKÉLETESEN RACIONÁLIS FOGYASZTÓKNÁL (VII, VIII)

A rögzített megtakarítási hányadot kimondó feltevésünk talán szélsőségesen hangsúlyozza a fogyasztó rövidlátását. Ezzel ellentétes szélsőséges feltevés: a fogyasztó úgy választja fogyasztási pályáját az időben, hogy maximalizálja a diszkontált hasznosságok összegét — ismerve az összes jövőbeli kamatlábat és bérszintet. Ekkor azt kérdezhetjük, hogy milyen feltételek mellett szabályozható a közösség számára optimális politika.

Bár általánosabb eseteket is elemezhetnénk, most arra az esetre szorítkozunk, amikor nem tér el egymástól a közösségi és a magánértékelés. Tehát feltesszük, hogy a fogyasztó ugyanazt a célfüggvényt — az (5)-öt, illetve a (8)-at — maximalizálja, mint az állam.

Továbbá feltesszük, hogy az állam kölcsönt vehet föl, illetve nyújthat, valamint egyfajta adót vethet ki. Azt is feltételezzük, hogy a kötvények a fogyasztó szempontjából tökéletes helyettesítői a magántőkének; azaz az államkötvények kamatlába azonos a magántőke határhatékonyságával. (Feltesszük, hogy az államkötvények rövid lejáratúak, így a tőkenyereségektől eltekinthetünk.)

Most csak az eredményeket összegezzük. Fontos az a tény, hogy lehet kezdeti államadósság, mivel annak kamatait minden esetben ki kell fizetni az állami beruházások finanaszírozása mellett. Valóban ha a kezdeti adóssság értéke megfelelő, akkor a közösségi szempontból optimális politikának megfelelő állami beruházás választása, amelyet csak kölcsönből fedezünk — optimális. (VIII.2.) A szokásos értelemben vett jövedelemadó nem alkalmazható: a megtakarítások jól ismert kettős adóztatása révén lerombolná az optimalitást. Azonban, ha a kezdeti adósság különbözik az imént leírt kritikus kezdeti értéktől, akkor egy kezdeti tőkeadó (amelynek nincs ösztönző hatása) felhasználható arra, hogy az adósságot a megfelelő szintre változtassuk, amely után ismét egyedül a kölcsönökből fedezhetők a beruházások. A kezdeti tőkeadót a jövedelemadó valamilyen határeseteként képzelhetjük el (VIII.3).

A legérdekesebb az az eset, amikor az egyetlen adó a fogyasztási adó. (VIII.4). Kiderül, hogy a közösség számára optimális politika olyan fogyasztási adóval valósítható meg, amelynek kulcsa állandó; az állami beruházás megmaradó része kölcsönökből fedezhető. Természetesen e maradék rész lehet negatív, amikor is az állam visszafizeti adósságának egy részét, sőt kölcsönt nyújt a magánszektornak. Szerencsére a fogyasztási adókulcs állandóságának egyszerű értelmezése van. Ha a *magánvagyont* úgy definiáljuk, mint az államadósság, a magántőke és a jövőbeli bérek diszkontált összegét — a diszkontálásnál a közösség számára optimális politika implicit bérei és kamatlábai szerepelnek (bér egyenlő a munka határtermékével) — ekkor a fogyasztási adókulcs a magánvagyon és a jövőbeli fogyasztás jelenértékének hányadosa. A fogyasztási adókulcs így egyebek között az adósság kezdeti értékeitől is függ.

8. KOCKÁZAT ÉS A HOZADÉK RÁTÁJA

Eddigi elemzésünk azon az implicit feltevésen alapult, hogy az állami beruházások kockázatmentesek. Ha nem azok, akkor megelégszünk azzal az általános szabállyal, hogy a bizonytalan költségeket és előnyöket a várható értékükön kell kiszámítani, és a kockázatmentes beruházásoknak megfelelő hozadéki ráta szerint kell diszkontálni őket. Ez az állítás nem minden esetben alkalmazható, de következik bizonyos feltételezésekből, amelyek — néhány kivétellel — közelítőleg teljesülnek.

Először, tegyük fel, hogy: *a)* a kockázatviselés optimális elosztása a szóban forgó állami beruházás előtt megvalósul, és *b)* az állami beruházás véletlen hozadékai statisztikailag függetlenek a gazdaság korábbi hozadékaitól. Ekkor megmutatható, hogy a javasolt új beruházást akkor és csak akkor kell bevezetni, ha várható nettó hozadéka pozitív. (I.2).

A statisztikai függetlenség feltevése első közelítésként nem látszik ésszerűtlennek. Azonban nagyon sokszor a kockázatviselés optimalitása a magánszektorban már kétségesebb. Mégis, eredményeink jó része érvényes marad, ha e feltevést elejtjük, hiszen a kockázatok elosztása az összes adófizető között nemcsak azt vonja maga után, hogy bárki kockázata elenyésző, hanem azt is, hogy a kockázati jutalmak teljes összege is nullához tart, ha az egyének száma a végtelenhez tart — és ez az előbbinél erősebb feltevés. Ha az állam elfogadja a várható érték ismérvét, míg a magánszektor nem, akkor egy állami beruházás kiszoríthat egy nagyobb várható értékű magánberuházást; azonban ez helyes, mert az állam értékes kiegészítő tevékenységet végez azzal, hogy olyan kockázatot visel, amelyet a magánszektor nem vállal.

Megjegyezzük azonban, hogy előfordulhat olyan eset, amikor az állami beruházásokból az egyénekre jutó előnyök növelik az egyének bizonytalanságát. Példa erre a bizonytalan hozamú vízforrással való öntözés biztos szárazság esetén. Ekkor valóban a kockázatmentes rátánál magasabb diszkontlábat kell alkalmazni; de elemzésünk szerint előnyösebb lenne az államnak, ha biztosítást ajánlana az öntöző víz hiánya ellen, és ezután értékelné a vízellátás és a biztosítás együttesét a kockázatmentes ráta esetén.

Jegyezzük meg, hogy nem azzal érveltünk a kockázatmentes ráta mellett, hogy az állam nagyon sok terv között megoszthatja kockázatait; Hirschleifer (1966. 270—75. old.) helyesen állítja, hogy minden egyes tervet külön kell értékelni, ha megfelelő diszkonttényezőket alkalmaznak.

9. NÉHÁNY SZÓ BEFEJEZÉS HELYETT

Az irodalomban több olyan szempontot vizsgáltak, amelyet nem vettünk figyelembe. Valóban, feltettük, hogy — eltekintve a magán- és a társadalmi időpreferencia eltérésétől — a társadalmi diszkontláb meghatározásának kérdése a piaci szerkezet tökéletlenségeinek bizonyos elemeiből adódik: az állami beruházás termékeinek el-

idegeníthetetlenségéből, a visszafizetendő kezdeti adósság létezéséből és a 6. pontban ismertetett magántőke piacának tökéletlenségeiből, amelyek a rögzített megtakarítási hányad feltételezésében tükröződnek. Burkoltan feltételeztük, hogy a piaci szerkezet egyébként tökéletes. Azonban, ha a piaci szerkezetben máshol is vannak tökéletlenségek — ilyen például a monopolista ártorzulás, a fogyasztási adók vagy a részvénytársasági jövedelemadó, amely néhány, de nem az összes, magánberuházást sújtja —, akkor az elemzés sokkal bonyolultabbá válik. Bármilyen javasolt politikát az összes szóba jöhető kereszthatás figyelembevételével kell értékelni. A probléma egy másik elhanyagolt vonatkozása: az állami kötvények kamatlába és a magántőke hozadéka közti viszony. Az eddigiekben és lényegében a könyv elemzésében végig feltettük, hogy a kettő egyenlő akkor, amikor az állami kölcsönfelvételt mint a finanszírozás egyik lehetséges eszközét tekintettük. Ténylegesen távolról sem ez a helyzet. Ez felveti azt a lehetőséget, hogy ha a közberuházást kötvényekkel finanszírozzák, akkor az állam ténylegesen ikerterméket hoz létre; a beruházás kötvényteremtési lehetőségeket hoz létre, amelyeket előnyben részesítünk a magántőkével szemben. Ez azt sugallja, hogy az állami kötvények kamatlába megfelelőbb diszkontláb, mint a megfigyelt hozadékráták átlaga.

Az igazságos megtakarítás Rawls-féle elve[*1]

1. A FELADAT ÉS A MODELL

Az igazságosság kérdése természetesen alapvető az erőforrások elosztásában. A közgazdasági gondolkodás története során sohasem létezett mindenki által elismert ismérv, de legalábbis a közgazdászok filozófikusabb köreiben többé-kevésbé elfogadtak egy hasznossági ismérvet. Azaz feltételezzük, hogy minden egyén (i) számára létezik egy személyek közötti összehasonlítható hasznossági függvény; legyen az i-edik egyén fogyasztása c_i, hasznossági függvénye $U_i(c_i)$; ekkor igazságos vagy optimális elosztásának olyan elosztást nevezünk, amely maximalizálja

$$\sum_i U_i(c_i)$$

összeget, ahol a c_i változókat a technológia, az erőforrások kezdeti készlete, az információs nehézségek és az áruk egyének közti átadásakor fellépő egyéb problémák korlátozzák.

Rawls [4] ettől eltérő ismérvet javasolt az igazságos elosztás kritériumára. Úgy képzeli el a társadalmat, hogy minden egyes tagja ismeri „az eredeti helyzet" lehetséges erőforrás-elosztást, de egyik tagja sem tudja, hogy végül melyik szerepet kapja. A társadalom tagjainak el kell dönteniük azt, hogy milyen ismérv szerint osszák el az árukat. Rawls úgy érvel, hogy az egyének ésszerűen nem a hasznosságösszegben fognak megegyezni, hanem a társadalom legrosszabb helyzetű tagja jó-

* Rawls's principle of just savings. The Swedish Journal of Economics, Vol. 75. 1973. 323—335. old.

[1] Ezt a munkát részben a National Science Foundation Grant GS—3269 A2 támogatta, amelyet az Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University részére nyújtott. Ezt a tanulmányt a Churchill College-ban kezdtem el írni, amikor a John Simon Guggenheim Memorial Fellowship támogatásával Angliában voltam, és a Stanford Universityn fejeztem be. Hálás vagyok Partha Dasguptának; a vele folytatott beszélgetéseim hatására sikerült pontos jellemzését adni a Rawls-féle igazságos megtakarításnak, amely iránti érdeklődésem korábban is elég mély volt. Hálás vagyok Frank Hahnnak azért a sok óráért, amelyet a hamis megoldások kiirtására fordított és természetesen John Rawlsnak, hiszen az ő mélyreható munkája késztetett bennünket az együgyű utilatarizmus felülvizsgálatára. Rawls igazságelméletének ezen és más vonatkozásairól szóló további fejtegetést tartalmaz *Dasgupta* [2] és *Arrow* [1].

létének maximalizálásában (hiszen bármelyikük kerülhet a legrosszabb helyzetbe), azaz a $\min_i U_i(c_i)$ mennyiséget maximalizálják a c_i változókra vonatkozó korlátok mellett. Eltekintek itt Rawls tárgyalásának részleteitől, többek közt azoktól az egyéb korlátoktól, amelyeket az erőforrások elosztására mond ki (különös jellemzőjük, hogy Rawls végtelenül nagyobb értéket ad a szabadságnak, mint az áruknak); eltekintek továbbá Rawls azon érvelésének érvényességétől, amellyel az eredeti helyzettől eljut a maximum ismérvig[2] (lásd Arrow [1]-ben szereplő megjegyzéseket ezzel kapcsolatban).

Az igazságosság egyik lényeges vonatkozása az időbeliség. Milyen az áruk igazságos elosztása a különböző nemzedékek egyénei között? Az időbeli igazságosság kérdése alapvetően csak egy tapasztalati ponton különbözik az egyidejű elosztás problémájától: nevezetesen abban, hogy az erőforrások produktívak, így egy korábbi nemzedéktől egy későbbi nemzedék javára történő transzfer eredményeként általában a későbbi nemzedék áruegységben mérve többet kap, mint amennyit a korábbi nemzedék feláldoz. Ebben az esetben egyenlősítő jellegű megközelítésünk valahogy felborul; nyilván, ha egyáltalán tekintettel vagyunk a jövő nemzedékeire (ahogyan az igazságosság követeli), és ha a várakozás jutalma elég nagy, akkor hajlandók vagyunk valamennyi áldozatot hozni a jövő egyéneiért, még akkor is, ha azok jobban fognak élni, mint mi. Áldozatvállalásunk azonban nem végtelen; ez általában úgy fogalmazható meg, hogy feltesszük; mind nálunk, mind náluk a határhaszon csökkenő; így egy bizonyos pontnál az áruban mért előny megszűnik előny lenni hasznosságban mérve.

Ennek illusztrálására bevezetünk egy nagyon egyszerű termelési modellt, majd elemezzük Rawls ismérvének következményeit. Feltételezzük, hogy csak egyetlen áru létezik.

Minden nemzedéken belül az összes egyén egyforma, tehát feltehetjük, hogy minden nemzedék egyetlen egyénből áll. Ez egyben azt is jelenti, hogy a népesség stacionárius; az elemzés könnyen alkalmazható növekvő népességre, de ez csak eltereli a figyelmet az igazságosság azon jelentéséről, amelyet elemzésünk ad. Egyetlen árunk egyaránt fogyasztható, vagy alkalmazható tőkeként, ez utóbbi esetben van hozadék. Legyen K_t a felhalmozott tőke mennyisége a t-edik időszak elején. Ebben az időszakban a rendelkezésre álló készlet egy részét — c_t-t — elfogyasztják, és a maradékot — $K_t - c_t$-t — a termelésben használják fel. Minden ily módon a termelésben felhasznált egység α egységet eredményez a következő időszak elején, azaz

$$K_{t+1} = \alpha(K_t - c_t). \tag{1.1}$$

Hacsak nincs más kikötésünk, magától értetődő, hogy a gazdaság produktív, azaz minden beruházott egység több mint egy egységnyi kibocsátást eredményez, azaz

$$\alpha > 1. \tag{1.2}$$

[2] *Wickrey* [6], 329. old.; [7], 523. old. és *Harsányi* [3] alkalmazták az „eredeti helyzet" érvelést a hasznosságösszeg maximalizálásának igazolására.

Az egyén a t-edik időszakban a c_t fogyasztásból elégíti ki igényeit, továbbá feltesszük, hogy bármely adott fogyasztási szint minden időszakban azonos mennyiségű hasznosságot nyújt, azaz létezik egy olyan $U(c)$ függvény, amelyre a hasznosságösszeg maximalizálásának kritériumához hasonlóan

$$\sum_{t=0} U_t(c_t)^*$$

mennyiség maximalizálandó, ahol a c_t változók eleget tesznek az (1.1) korlátozó feltételnek, valamint annak a nyilvánvaló feltételnek, hogy

(1.3) $$K_t \geqq 0 \qquad \text{minden } t\text{-re, és } K_0 \text{ adott.}$$

Ésszerű megkövetelni, hogy a jövő — bármely időpontot véve kiindulásnak — egyforma legyen. Ebből az következik, hogy a maximalizálandó hasznosságösszegnek a következő speciális alakkal kell rendelkeznie:

(1.4) $$\sum_{t=0} \beta^t U(c_t)$$

tetszőlegesen rögzített β-ra és tetszőleges $U(c)$ függvényre; β a *szubjektív diszkontláb*. Az $U(c_t)$ értéket a c_t fogyasztásból *azonnal* adódó kielégültségi szintként lehet értelmezni.

Rawls maximin ismérve az időtényezőt figyelembe véve a

(1.5) $$\min_t U(c_t)$$

maximalizálása az (1.1) és az (1.3) feltételek mellett. Ezt az értelmezést használta Solow [5], bár felismerte, hogy ez nem az, amit Rawls javasolt. Nyilvánvaló (és néhány távoli eredményből is következik), hogy az (1.5) maximalizálása minden nemzedéknél nulla megtakarításhoz vezetne, mivel nem lehet kárpótolni az első nemzedéket megtakarításaiért, amelynek következtében rosszabbul élnének, mint bármelyik utódjuk.

Rawls saját nézete megtalálható idézett művének [4] 44. szakaszában. Valójában ez a tárgyalás nem világos. Ő a következőképpen válaszol az itt felvetett problémára; „mivel feltesszük, hogy egy nemzedék törődik közvetlen leszármazottjaival, például az apák törődnek fiaikkal, meghatározható egy igazságos megtakarítási elv, pontosabban, ezeknek az elveknek bizonyos határai" (288. old.).

* Az erdeti angol szöveg és a képlet ellentmondásban van egymással. A tanulmány és különösen a következő bekezdés alapján a következő javítás kínálkozik: ... feltesszük, hogy a különböző időszakok fogyasztásaiból származó hasznosságok összeadódnak. Legyen $U_t(c_t)$ a t-edik időszak c_t fogyasztásából származó hasznosság. (A ford.)

Ezt a mondatot tekintem a Rawls-féle elemzés alapjául az igazságosság időbeli vonatkozásában.[3] Úgy tűnik számomra, hogy e feltevés egyértelműen meghatároz egy igazságos megtakarítási elvet, és nem csupán az „ilyen elvek bizonyos határait" és az így megállapított megtakarítási elvvel ugyanazok a problémák, mint a $\min_t U(c_t)$ maximalizálásához tartozó nulla megtakarítással. Bizonyos körülmények mellett előfordulhatnak megtakarítások, de ezeket szükségképpen túlfogyasztások követik.

Az imént idézett mondat alapján, feltesszük, hogy a t-edik nemzedékhez tartozó egyén hasznossági függvénye $W(c_t, c_{t+1})$, amely a saját és a következő nemzedék fogyasztásától függ. Ekkor *Rawls ismérve* a maximalizálandó

$$\min_t W(c_t, c_{t+1})$$

alakot ölti. Egyszerűség kedvéért, Dasgupta ([2], A. 2.2.) feltevésével egyetértve, feltételezzük, hogy W additíven szeparálható mind a két változója szerint és hogy a t-edik egyén ugyanannyi hasznosságot szán a $t+1$-edik egyénnek, mint amennyit a $t+1$-edik egyén saját magának, valamint a hasznosságfüggvény minden t-re ugyanaz, és végül a jövő nemzedék kielégítettsége a ma nemzedékének kielégítettsége alapján diszkontálható. Képletben:

$$W(c_t, c_{t+1}) = U(c_t) + \beta U(c_{t+1}) \tag{1.7}$$

Szokás szerint feltesszük, hogy

(1.8) $U(c)$ növekvő, differenciálható és konkáv.

Végül, nem zárjuk ki, hogy $\beta = 1$ az (1.7)-ben; mindegyik nemzedék ugyanúgy törődik utódaival, mint saját magával. Azonban kizárjuk a $\beta > 1$ lehetőségét.

2. MEGENGEDETTSÉGI FELTÉTELEK

Szükségünk van az (1.1) és az (1.3) megengedettségi feltételek (feasilbility conditions) egyszerű újrafogalmazására. Minden t-re, és u-ra, $u \geqq t$, kifejezhetjük az u időszak tőkéjét a t időszak tőkéjével és a t-edik, $t+1$-edik, ..., $u-1$-edik időszak fogyasztásával:

$$K_u = \alpha^{u-t}\left(K_t - \sum_{v=t}^{u-1} \alpha^{t-v} c_v\right). \tag{2.1}$$

[3] John Rawls tájékoztatott arról, hogy nem szándékozott a maximumelvet nemzedékek közti igazságosságra alkalmazni. De úgy tűnik számomra, hogy az a logika, amely az „eredeti helyzet"-ből származtatja a maximumelvet, ugyanúgy alkalmazható nemzedékek közti összehasonlításra.

Ez nyilvánvalóan fennáll $u=t$-re is, és az általános eset egyszerű u szerinti indukcióval adódik az (1.1)-ből, mivel

$$K_{u+1} = \alpha K_u - \alpha c_u = \alpha K_u - \alpha^{u+1-t}\alpha^{t-u}c_u;$$

Ha a (2.1)-ben levő K_u-t behelyettesítjük, akkor u helyére $u+1$-et írva (2.1)-t kapjuk meg.

Ha (2.1)-ben t helyére nullát, u helyére t-t írunk, azonnal láthatjuk, hogy a (3.1) feltétel — amely szerint a tőke sohasem lehet negatív — átfogalmazható:

$$\sum_{v=0}^{t-1} \alpha^{-v} c_v \leqq K_0, \qquad \text{minden } t\text{-re.}$$

Azonban a bal oldali összeg minden tagja nemnegatív, azaz követelményünk egyenértékű a közismert

$$\sum_{v=0}^{\infty} \alpha^{-v} c_v \leqq K_0 \tag{2.2}$$

feltétellel.

Létezik egy olyan $\bar{c}$ fogyasztási szint, amely esetében a tőke érintetlen marad, azaz nincs megtakarítás. Az (1.1)-ből $t=0$ és $K_1=K_0$ figyelembevételével láthatjuk, hogy $K_0=\alpha(K_0-\bar{c})$ vagy

$$\bar{c} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) K_0. \tag{2.3}$$

Világos, hogy az 1. sz. időszakban, mivel $K_1=K_0$, a $\bar{c}$ fogyasztás $K_2=K_1=K_0$ tőkét eredményez, azaz az állandó $\bar{c}$ fogyasztás valóban állandó — K_0 kezdeti — szinten tartja K_t-t.

Tetszőlegesen adott programból kiindulva, tekintsünk egy tetszőleges alternatív, mondjuk $\{c'_t\}$ programot, amelyre

$$\sum_{v=t}^{u-1} \alpha^{t-v} c'_v = \sum_{v=t}^{u-1} \alpha^{t-v} c_v. \tag{2.4}$$

Ekkor a (2.1) miatt, ha $K_t=K'_t$, akkor szükségképpen $K_u=K'_u$.
A (2.4)-et kielégítő változtatások változatlanul hagyják az u-adik időszaktól kezdődő lehetőségeket. Speciálisan, ha $u=t+2$, abban az esetben fennál, ha

$$K_t = K'_t \quad \text{és} \quad c'_t + \alpha^{-1} c'_{t+1} = c_t + \alpha^{-1} c_{t+1}, \quad \text{akkor} \tag{2.5}$$

$$K_{t+2} = K'_{t+2}.$$

A (2.5)-t kielégítő változatokat *kiegyensúlyozott* változatoknak fogjuk nevezni.

Ugyanígy adódik, hogy a kiegyensúlyozatlan változtatások növelik vagy csökkentik a tőkeállományt. Az utóbbi esetben ha a csökkenés végtelen sokszor megismétlődik, az (1.3) megengedettségi feltétel — amely szerint a tőkeállománynak nem-

negatívnak kell lennie — végül is nem teljesül. A következő lemmában az állandó tőke szintű fogyasztástól való eltéréseket vizsgáljuk meg.

1. lemma. Tételezzük fel, hogy $\alpha>1$, *és a* (2.3) *definiálja* $\bar{c}$*-t. Ha van olyan* $\delta>0$, amelyre

$$c_{2t}+\alpha^{-1}c_{2t+1} \geqq \bar{c}(1+\alpha^{-1})+\delta$$

minden t-re teljesül, akkor a $\{c_t\}$ *program nem megengedett.*

Bizonyítás. Tetszőleges program esetén (2.1)-ben u helyett írjunk $(2t+2)$-t és t helyett $2t$-t.

$$K_{2t+2} = \alpha^2[K_{2t}-(c_{2t}+\alpha^{-1}c_{2t+1})]. \tag{2.6}$$

Speciálisan, ha $c_t=\bar{c}$ minden t-re, akkor a (2.6) teljesül $K_{2t+2}=K_{2t}=K_0$ esetén:

$$K_0 = \alpha^2[K_0-\bar{c}(1+\alpha^{-1})]. \tag{2.7}$$

Legyen

$$c_{2t}+\alpha^{-1}c_{2t+1}-\bar{c}(1+\alpha^{-1}) = h_t, \tag{2.8}$$

Vonjuk ki a (2.7)-et a (2.6)-ból, és használjuk fel a (2.8) definíciót:

$$K_{2t+2}-K_0 = \alpha^2[(K_{2t}-K_0)-h_t]. \tag{2.9}$$

Definiáljuk a következő mennyiséget:

$$x_t = \alpha^{-2t}(K_{2t}-K_0).$$

Szorozzuk be a (2.9)-et α^{-2t-2}-vel:

$$x_{t+1} = x_t-\alpha^{-2t}h_t.$$

Mivel $x_0=0$,

$$x_t = -\sum_{u=0}^{t-1}\alpha^{-2u}h_u.$$

Tegyük fel, hogy

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{u=0}^{t-1}\alpha^{-2u}h_u > 0. \tag{2.10}$$

Ekkor alkalmas $\varepsilon>0$-ra $x_t<-\varepsilon$ tetszőleges nagy t-re. Mivel $\alpha^{-2t}K_0<\varepsilon$ minden elegendő nagy t-re, $x_t<-\alpha^{-2t}K_0$ valamilyen t-re. De x_t definíciója szerint ez azt vonja maga után, hogy $K_{2t}<0$, tehát a $\{c_t\}$ program nem megengedett.

A *lemma* feltevése mellett $h_u\geqq\delta$ minden u-ra, következésképpen a (2.10) biztosan teljesül.

Az 1. lemma következménye: A fogyasztás megengedett állandó szintjének maximuma a (2.3)*-ban definiált* $\bar{c}$.

Bizonyítás. Ha $\tilde{c}>\bar{c}$, akkor $\tilde{c}(1+\alpha^{-1})>\bar{c}(1+\alpha^{-1})$ így az *1. lemma* szerint a $\tilde{c}$ állandó fogyasztási szint nem lenne megengedett.

Az *1. lemma* könnyen általánosítható úgy, hogy érvényes legyen kettőnél hosszabb időintervallumú fogyasztási pályára is.

2. lemma. Tegyük fel, hogy $\alpha>1$, *és a* (2.3) *definiálja* $\bar{c}$*-t. Ha van olyan* $\delta>0$, *amelyre*

$$\sum_{v=mt}^{m(t+1)-1} \alpha^{mt-v} c_v \geqq \bar{c} \sum_{v=mt}^{m(t+1)-1} \alpha^{mt-v} + \delta$$

minden t-re teljesül, akkor a $\{c_t\}$ *program nem megengedett.*

Bizonyítás: A (2.6)-nak megfelelően

$$K_{m(t+1)} = \alpha^m \left[K_{mt} - \sum_{v=mt}^{m(t+1)-1} \alpha^{mt-v} c_v \right].$$

A bizonyítás további része teljesen azonos az előzővel.

Pusztán a formai teljesség kedvéért vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a gazdaság nem produktív az áruk termelésében, azaz $\alpha \leqq 1$.

3. lemma. Ha $\alpha \leqq 1$, *akkor minden megengedett* $\{c_t\}$ *programra,* $\sum_{t=0}^{\infty} c_t$ *konvergens, következésképpen* $c_t \to 0$, *ha* $t \to +\infty$.

Bizonyítás. A megengedettséghez szükséges, hogy $K_{t+1} \geqq 0$, tehát az (1.3) figyelembevételével, hogy $K_t \geqq c_t$. Innen

$$K_{t+1} = \alpha(K_t - c_t) \leqq K_t - c_t,$$

tehát

$$K_t \leqq K_0 - \sum_{u=0}^{t-1} c_u.$$

A $K_t \geqq 0$ feltételből ekkor következik a lemma állítása.

3. IGAZSÁGOS MEGTAKARÍTÁS EGY HASZNOSSÁGPRODUKTÍV GAZDASÁGBAN

Egy gazdaság akkor *hasznosságproduktív*, ha bármely adott megengedett fogyasztási programban, ahol két egymást követő időszakban, t-ben és $t+1$-ben, a fogyasztás azonos, a t-edik egyén ennél előnyösöbbnek tart egy olyan kiegyensúlyozott változatot, amelyben c_{t+1} nagyobb és c_t kisebb. Más szavakkal, ha a gazdaság eléggé produktív, azaz ha α megfelelően nagyobb mint 1, akkor az egyén még abban az esetben is előnyösnek tartja fogyasztása egy részének átengedését a következő nemzedéknek, ha bizonyos mértékig diszkontálhatja hasznosságnyereségét.

4. lemma. Egy gazdaság akkor és csak akkor hasznosságproduktív, ha $\alpha\beta>1$.

Bizonyítás. Induljunk ki egy olyan programból, ahol a fogyasztás t-ben is és $t+1$-ben is c. Tegyük fel, hogy a t-edik egyén ennél előnyösebbnek tartja (c, c) egy olyan kiegyensúlyozott változatát, (c_t, c_{t+1})-et, ahol $c_{t+1}>c$. Azaz

$$U(c_t)+\beta U(c_{t+1}) > U(c)+\beta U(c) \tag{3.1}$$

$$c_t+\alpha^{-1}c_{t+1} = c(1+\alpha^{-1})$$

vagy

$$(c_t-c)+\alpha^{-1}(c_{t+1}-c) = 0 \tag{3.2}$$

Mivel $U(c_t)+\beta U(c_{t+1})$ konkáv mind a két változójában az (1.8) alapján; a (3.1) csak akkor teljesülhet, ha W deriváltja (c, c)-ben a (c_t, c_{t+1}) irányban pozitív:

$$U'(c)(c_t-c)+\beta U'(c)(c_{t+1}-c) > 0,$$

vagy $U'(c)>0$-val osztva

$$(c_t-c)+\beta(c_{t+1}-c) > 0. \tag{3.3}$$

De a (3.2) és a (3.3) egyidejűleg akkor is csak akkor teljesülnek $c_{t+1}-c_t>0$ esetén, ha $\alpha\beta>1$.

Megjegyezzük, hogy minden produktív gazdaságban, akár hasznosságproduktív, akár nem, az igazságos megtakarítási politika szükségszerűen kizárja a jólét állandó növelését. Az igazságos megtakarítási politika nem szükségképpen követeli meg a hasznosság állandó szintjét, ahogy az az (1.7)-ben szerepelt; de minden olyan nemzedéket, amelynek hasznossági szintje magasabb, minimális hasznosságszintű nemzedék előz meg, illetve követ. Mivel később pontosabb eredményeket kapunk, most csak a bizonyítás vázlatát közöljük, amely tovább pontosítható.

1. tétel. Tegyük fel, hogy $\alpha>1$. *Ekkor olyan* $\{c_t\}$ *program esetén, amely a megengedett programok között maximalizálja az* (1.7)*-ben definiált* $W(c_t, c_{t+1})$ *minimumát, szükségképp fennáll: a)* $W(c_0, c_1)=\min_t W(c_t, c_{t+1})$ *és b) ha* $W(c_u, c_{u+1})>\min_t W(c_t, c_{t+1})$, *akkor* $W(c_v, c_{v+1})=\min_t W(c_t, c_{t+1})$ $v=u-1$*-re és* $v=u+1$*-re.*

Bizonyítás. a) Csökkentsük egy kicsit c_0-t és növeljük c_t-t $(t>0)$ a többlettőke beruházásából származó jövedelemből. Ha $W(c_0, c_1)$ nagyobb volna, mint a minimum, akkor az utóbbi növekedne, amennyiben a csökkentés elegendően kicsiny ahhoz, hogy $W(c_0, c_1)$ ne váljon minimummá.

b) Tegyük fel, hogy mind a $W(c_u, c_{u+1})$, mind a $W(c_{u+1}, c_{u+2})$ a minimum felett helyezkedik el. Ugyanúgy, mint az *a)*-ban kismértékben csökkentsük c_{u+1}-et, és növeljük a későbbi c_t-ket. Ez növelni fogja a $W(c_t, c_{t+1})$-et minden $t>u+1$-re. A változtatás csökkenti mind a $W(c_u, c_{u+1})$-et, mind a $W(c_{u+1}, c_{u+2})$-t, de megfelelően kicsi változtatás esetén még mindig az eredeti minimum felett maradnak. Most kismértékben növeljük meg c_t-t $t=u$ esetén. Ez arányosan csökkenti K_{u+1}-et.

Ha c_{u+1}-et ugyanennyivel csökkentjük, akkor K_{u+2} változatlan marad; a későbbi c_t-k megengedettek maradnak. Világos, hogy a $W(c_t, c_{t+1})$ nő minden $t>u$ esetén. Ismét csökkenhet a $W(c_u, c_{u+1})$ és ismét csökken a $W(c_{u+1}, u_{t+2})$, de a változtatásokat megfelelően kicsinek tartva, mindketten az eredeti minimum felett maradnak. Így $W(c_t, c_{t+1})$ minden t-nél az eredeti minimum felett van, és ez ellentmond feltevésünknek, amely szerint az eredeti program Rawls értelmében igazságos megtakarítási szabály volt.

Miután bemutattuk a megoldások általános jellemzőit, rátérünk az optimális politika pontos jellemzésére.

2. tétel. Tegyük fel, hogy $\alpha\beta>1$ *és* $\beta\leqq 1$. *Ekkor az a megengedett program, amely maximalizálja* $\min_t W(c_t, c_{t+1})$*-et, a következőképp jellemezhető: Válasszunk olyan* c_0^*, c_1^* *párt, amely maximalizálja a* $W(c_0, c_1)$*-et a* $c_0+\alpha^{-1}c_1=\bar{c}(1+\alpha^{-1})$ *feltétel mellett; ekkor az optimum esetén* $c_t=c_0^*$, *ha t páros, és* $c_t=c_1^*$, *ha t páratlan. Erre a politikára a következő tulajdonságok teljesülnek:* $c_0^*<c_1^*$, $W(c_t, c_{t+1})=\min_t W(c_t, c_{t+1})$, *ha t páros;* $W(c_t, c_{t+1})>\min_t W(c_t, c_{t+1})$, *ha t páratlan, egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha* $\beta=1$.

Bizonyítás. A hasznosságproduktivitás definíciójából és a *4. lemmá*ból adódik, hogy $c_0^*<c_1^*$. A program szerkezete miatt $W(c_t, c_{t+1})$ ugyanez minden páros t-nél. Legyen most t páratlan, ekkor $c_t=c_1^*$ és $c_{t+1}=c_0^*$. Tudjuk, hogy $U(c_1^*)>U(c_0^*)$. Szorozzuk meg mindkét oldalt $1-\beta\geqq 0$-val, és végezzünk el bizonyos átrendezéseket.

$$U(c_0^*)+\beta U(c_1^*) \leqq U(c_1^*)+\beta U(c_0^*) = W(c_t c_{t+1})$$

egyenlőtlenség szigorúan teljesül, ha $\beta<1$. A bal oldal azonban $W(c_t, c_{t+1})$ közös értéke, minden páros t esetén. Így a minimum minden páros t esetén megvalósul.

Most tekintsünk bármely olyan $\{c_t'\}$ programot, amelyre

$$\min_t W(c_t', c_{t+1}') > \min_t W(c_t, c_{t+1}).$$

Ekkor alkalmas $\varepsilon>0$-ra igaz kell hogy legyen

$$W(c_t', c_{t+1}') \geqq W(c_t, c_{t+1})+\varepsilon, \qquad \text{minden páros } t\text{-re.}$$

De a $\{c_t\}$ politika szerkezete miatt a jobb oldali W maximális a $c_t+\alpha^{-1}c_{t+1}=\bar{c}(1+\alpha^{-1})$ feltétel mellett. Legyen b a $c_0+\alpha^{-1}c_1$ minimális értéke a következő feltétel mellett:

$$W(c_0, c_1) \geqq W(c_0^*, c_1^*)+\varepsilon.$$

Ekkor világos, hogy $b>c_0^*+\alpha^{-1}c_1^*$, és a minimum definíciója miatt

$$c_t'+\alpha^{-1}c_{t+1}' \geqq b = (c_0^*+\alpha^{-1}c_1^*)+\delta = \bar{c}(1+\alpha^{-1})+\delta, \quad \delta>0.$$

Ha ebben az egyenlőtlenségben t helyett $2t$-t írunk, akkor az *1. lemmá*ból látjuk, hogy a $\{c_t'\}$ program nem megengedett, tehát a $\{c_t\}$ politika optimális.

Továbbra is kérdéses, hogy az így meghatározott fűrészfog alakú függvény megfelel-e az igazság bármelyik intuitív gondolatának.

4. TOVÁBBI NEMZEDÉKEK FIGYELEMBEVÉTELE: KÖZELÍTÉS AZ UTILITARIZMUSHOZ

Tegyük fel, hogy az egyén nemcsak a következő, hanem a további nemzedékekkel is törődik, mondjuk m számú őt követő nemzedékkel. Ekkor az (1.7)-et a következőképpen szükséges általánosítani:

$$W_t = W(c_t, \ldots, c_{t+m}) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i U(c_{t+i}) \tag{4.1}$$

és $\min_t W_t$-t kell maximalizálni az előzővel azonos (1.1) és (1.3) megengedettségi feltételek mellett. A hasznosságproduktivitás feltételének megfelelően feltételezzük, hogy azonos fogyasztás esetén $t+i$ és $t+j$ időszakban $(0 \leqq i < j \leqq m)$, a gazdaság elegendően produktív ahhoz, hogy a t-edik nemzedék előnyösnek tartsa a $t+i$-edik időszaki fogyasztás egy részének elhalasztását a $t+j$-edik időszakra, az összes többi időszak fogyasztását állandónak hagyva. Ez a kikötés azt kívánja, hogy

$$\alpha^{-(t+i)} c_{t+i} + \alpha^{-(t+j)} c_{t+j}$$

legyen állandó a (2.2) szerint (egyenlőség esetén, amely mindig nyilvánvalóan fennáll, ha nincs telítődés a fogyasztásban). Ebből következik, hogy c_{t+j} kicsiny h növelését $\alpha^{i-j}h$ csökkenésének kell kísérnie c_{t+i}-ben. Mivel minden más fogyasztás változatlan, W_t növekedése azonos $\beta_i U(c_{t+i}) + \beta_j U(c_{t+j})$ növekedésével. Ha a kiinduláskor $c_{t+i} = c_{t+j} = c$, akkor a fogyasztás későbbre halasztása első közelítésben W_t-t

$$\beta_i U'(c)(-\alpha^{i-j}h) + \beta_j U'(c)h$$

-val növeli. Közelítésünk akkor és csak akkor pozitív, ha $\beta_j \alpha^j > \beta_i \alpha^i$. Feltesszük, hogy ez az egyenlőtlenség fennáll minden i-re és j-re, $0 \leqq i < j \leqq m$.

Azt is feltételezzük, hogy $\beta_i \geqq \beta_{i+1}$, amely a $\beta \leqq 1$ feltétel általánosítása. Ez azt jelenti, hogy a későbbi nemzedékekkel egyre kevesebbet törődünk, vagy legfeljebb ugyanannyit, mint az előzőkkel.

3. tétel. Tegyük fel, hogy a t-edik nemzedék hasznosságát a (4.1) *definiálja, hogy* $\alpha^i \beta_i$ *nő* i *szerint,* $i \leqq m$ *esetén, és hogy* β_i *nem növekszik* i *szerint. Ekkor az a megengedett program, amely maximalizálja* $\min_t W_t$*-t, a következőképpen jel-*

lemezhető. Válasszunk olyan c_i^**-ot* $(i=0, \ldots, m)$*, amely maximalizálja* $W(c_0, \ldots, c_m)$*-et a következő feltétel mellett:*

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha^{-i} c_t = \bar{c} \sum_{i=0}^{m} \alpha^{-i},$$

ahol $\bar{c}$ *az állandó tőkeállományhoz tartozó fogyasztás. Ekkor az optimumnál* $c_{(m+1)t+i}=c_i^*$ $(0 \leqq i \leqq m)$*. E politikánál a következő tulajdonságok teljesülnek:* $c_i^*<c_{i+1}^*$; $W_t=\min_t W_t$, *ha* t *osztható* $m+1$*-gyel; minden más* t*-re* $W_t \geqq \min_t W_t$, *és az egyenlőtlenség szigorú, ha* $\beta_i>\beta_{i+1}$ *valamilyen* $i<m$*-re.*

Bizonyítás. Abból a feltételből, hogy $\alpha^i \beta_i$ növekvő, akárcsak a *4. lemmá*nál, most is következik, hogy $c_i^*<c_{i+1}^*$ $(i<m)$. Az optimum szerkezete miatt W_t ugyanaz minden olyan t-re, amely osztható $m+1$-gyel. Annak igazolásához, hogy a minimum minden ilyen t-nél megvalósul, elegendő azt megmutatni, hogy $W_r \geqq W_0$ $(r \leqq m)$.

A javasolt program az r-edik, ..., $m+r$-edik nemzedékre rendre $c_r^*, \ldots, c_m^*, c_0^*, \ldots, c_{r-1}^*$. Ekkor

$$W_r = \sum_{i=0}^{m-r} \beta_i U(c_{r+i}^*) + \sum_{i=m-r+1}^{m} \beta_i U(c_{i-m+r-1}^*) = \sum_{i=0}^{m-r} \beta_i U(c_{r+i}^*) + \sum_{i=0}^{r-1} \beta_{i+m-r+1} U(c_i^*).$$

$$W_0 = \sum_{i=0}^{m} \beta_i U(c_i^*) = \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i U(c_i^*) + \sum_{i=r}^{m} \beta_i U(c_i^*) = \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i U(c_i^*) + \sum_{i=0}^{m-r} \beta_{i+r} U(c_{i+r}^*).$$

$$W_r - W_0 = \sum_{i=0}^{m-r} (\beta_i - \beta_{i+r}) U(c_{i+r}^*) + \sum_{i=0}^{r-1} (\beta_{i+m-r+1} - \beta_i) U(c_i^*).$$

Mivel β_i monoton csökken i szerint és c_i^* növekszik i szerint, látjuk, hogy $\beta_i - \beta_{i+r} \geqq 0$, következésképpen $(\beta_i - \beta_{i+r}) U(c_{i+r}^*) \geqq U(c_r^*)(\beta_i - \beta_{i+r})$. Hasonlóan $\beta_{i+m-r+1} - \beta_i \leqq 0$, $U(c_i^*) \leqq U(c_{r-1}^*)$, $(i \leqq r-1)$, következésképpen $(\beta_{i+m-r+1} - \beta_i) U(c_i^*) \geqq U(c_{r-1}^*)(\beta_{i+m-r+1} - \beta_i)$. Továbbá az első egyenlőtlenség szigorúan teljesül, ha $0<i \leqq m-r$ és $\beta_i>\beta_{i+r}$ a második, ha $0 \leqq i<r-1$ és $\beta_i>\beta_{i+m-r+1}$. Mivel β_i nem növekvő, látható, hogy ha $\beta_j>\beta_{j+1}$ bármely $j<m$-re, akkor $\beta_i>\beta_k$ bármely $i \leqq j$-re és $k \geqq j+1$-re. Figyelembe véve az összes lehetőséget, látható, hogy ha $\beta_j>\beta_{j+1}$ valamilyen $j<m$-re, akkor az egyik egyenlőtlenségnek teljesülnie kell.

$$W_r - W_0 \geqq A U(c_r^*) + B U(c_{r-1}^*),$$

ahol

$$A = \sum_{i=0}^{m-r} (\beta_i - \beta_{i+r}), \quad B = \sum_{i=0}^{r-1} (\beta_{i+m-r+1} - \beta_i)$$

és az egyenlőtlenség szigorú, ha $\beta_j>\beta_{j+1}$ valamilyen $j<m$-re. Továbbá fennáll $A \geqq 0$ és

$$A+B = \sum_{i=0}^{m-r} \beta_i - \sum_{i=r}^{m} \beta_i + \sum_{i=m-r+1}^{m} \beta_i - \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i = \sum_{i=0}^{m} \beta_i - \sum_{i=0}^{m} \beta_i = 0,$$

így $W_r - W_0 \geqq A[U(c_r^*) - U(c_{r-1}^*)] \geqq 0$, ahol szigorú egyenlőtlenség áll fenn, ha nem azonos minden β_i.

Így a javasolt program $t=0$ esetén és minden $m+1$-gyel osztható t-nél eléri a $\min_t W_t$-t.

Ha nem volna optimális, akkor létezne egy alternatív $\{c_t'\}$ program, amelyre a hozzátartozó W_t' hasznosságsorozat — egyebek között — a következő tulajdonságú lenne: $W_t' = W_0 + \varepsilon$ minden olyan t-re, amely $m+1$-gyel osztható, és ε alkalmasan választott pozitív szám. A bizonyítás hátralevő része pontosan azonos a *2. tétel* megfelelő részével, a $\{c_t'\}$ program meg nem engedettsége a *2. lemmával* igazolható.

Így a gondoskodás több nemzedékre történő kiterjesztése a diszkontált hasznosságok összegének maximalizálásához vezet, ahol az összegzés a kezdőponttól a figyelembe vett nemzedékek számáig megy, és ezen túl a megoldás periódikusan ismétlődik, ahol a periódus hossza a fenti összeg tagszámával egyenlő.

1. megjegyzés. Ha végtelen horizontot vagy legalábbis az emberiség kipusztulásáig terjedő időszakot választunk, akkor a maximin ismérv egyszerűen a hasznossági ismérvvé válik, maximalizáljuk $\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t U(c_t)$-t. Ha minden nemzedékre tekintettel vagyunk, akkor a maximin és a hasznosság ismérv közti különbség eltűnik.

2. megjegyzés. Ha a vizsgált időszak nagyon rövid, túl erős lehet az a feltevés, hogy $\alpha^i \beta_i$ növekszik a vizsgált időszakban. Mivel e szorzat nulla az adott időszakon kívül, feltehetjük, hogy a vizsgált időszak végén kicsinnyé válik. Ekkor c_i^* a továbbiakban már nem nő, és a $W_r \geqq W_0$ egyenlőtlenséghez vezető okoskodás érvénytelenné válik. E feltételek közül néhány megszorítóvá válik, azaz a megoldás természetének változnia kell. Nyitott kérdés, hogy ilyen körülmények mellett milyen a maximin politika.

3. megjegyzés. A *3. tétel* érvényes $m=0$ esetén, amikor is az egyes nemzedékek nem törődnek a jövővel. Ekkor a maximin politika nyilvánvalóan a $\bar{c}$ állandó fogyasztást jelenti. Így az 1. pont egyik megjegyzése jogos.

5. NEM PRODUKTÍV GAZDASÁGOK

A teljesség kedvéért megvizsgáljuk a maximin politikákat nem produktív gazdaságokban is. Csak az $m=1$ esetet tekintjük (amikor csak a következő nemzedékre vagyunk tekintettel). A gazdaság lehet fizikailag nem produktív: $\alpha \leqq 1$ vagy hasznosság szempontból nem produktív: $\alpha > 1$, de $\alpha\beta \leqq 1$.

Az $\alpha \leqq 1$ esetet lényegében már elintéztük a *3. lemmával.* Ekkor minden megengedett politika esetén c_t szükségképpen nullához tart, tehát $W(c_t, c_{t+1})$ lehetséges legkisebb értékéhez tart: $W(0, 0) = (1+\beta)U(0)$-hoz. Ebben az esetben lehetséges,

hogy $W(c_t, c_{t+1})$ minimuma nem létezik. Mindig található olyan megengedett program, amelynél $c_t > 0$ minden t-re, például $c_t = c_0 \varrho^t$ bármely $\varrho < \alpha$-ra és $c_0 = K_0(\alpha - \varrho)/\alpha$. Az inf $W(c_t, c_{t+1})$ azonban mindig definiálva van.

4. tétel. Ha $\alpha \leqq 1$, akkor $\inf W(c_t, c_{t+1}) = (1+\beta)U(0)$ *minden megengedett programra.*

Az $\alpha\beta \leqq 1$ eset érdekesebb.

5. tétel. Ha $\alpha\beta \leqq 1$ és $\alpha > 1$, *akkor az a megengedett program, amely maximalizálja* $\min_t W(c_t, c_{t+1})$*-et, az állandó tőke szintű állományhoz tartozó fogyasztás, amely szintén állandó.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk a következő indirekt feltevést: Létezik olyan megengedett $\{c_t\}$ program, amelyre

$$W(c_t, c_{t+1}) \geqq W(\bar{c}, \bar{c}) + \delta', \qquad \text{valamilyen } \delta' > 0.$$

Mivel W konkáv, és $\partial W/\partial c_t = U'(c_t)$, $\partial W/\partial c_{t+1} = \beta U'(c_{t+1})$ azt kapjuk, hogy

$$W(c_t, c_{t+1}) \leqq U'(\bar{c})(c_t - \bar{c}) + \beta U'(\bar{c})(c_{t+1} - \bar{c}) + W(\bar{c}, \bar{c}),$$

azaz

$$U'(\bar{c})[(c_t - \bar{c}) + \beta(c_{t+1} - \bar{c})] \geqq \delta'$$

vagy

$$(c_t - \bar{c}) + \beta(c_{t+1} - \bar{c}) \geqq \delta \quad \delta > 0 \tag{5.1}$$

ahol $\delta = \delta'/U(\bar{c})$.

Most t szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk az alábbi két állítást:

a) $$K_{2t} \leqq K_0$$

b) $$(c_{2t} - \bar{c}) + \alpha^{-1}(c_{2t+1} - \bar{c}) \geqq \delta.$$

Világos, hogyha *b)* teljesül, akkor az *1. lemma* szerint a $\{c_t\}$ program nem megengedett, és ezzel befejeztük a bizonyítást. Ekkor *a)* is fennáll $t = 0$ esetén. Megmutatjuk, hogy tetszőleges t-re *a)*-ból következik *b)*, és ha *a)* és *b)* teljesül valamilyen t-re, akkor *a)* teljesül $t+1$-re.

Az *a)*-ból következik a *b)*: Nyilvánvaló, hogy a (2.2) érvényes marad, ha 0-t tetszőleges t kezdőidővel helyettesítjük, speciálisan $2t$-vel.

$$\sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)} c_u \leqq K_{2t} \leqq K_0. \tag{5.2}$$

Az (5.1)-ben írjunk t helyett u-t, szorozzuk be $\alpha^{-(u-2t)}$-nel és összegezzük $u \geqq 2t$-re:

$$\sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}(c_u - \bar{c}) + \beta \sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}(c_{u+1} - \bar{c}) > 0, \tag{5.3}$$

De

$$\sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}(c_{u+1}-\bar{c}) = \alpha \sum_{u=2t+1}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}(c_u-\bar{c}) = \alpha \sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}(c_u-\bar{c}) - \alpha(c_{2t}-\bar{c}).$$

Helyettesítsünk be az (5.3)-ba:

$$(1+\alpha\beta) \sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}(c_u-\bar{c}) > \alpha\beta(c_{2t}-\bar{c}) \tag{5.4}$$

Mivel

$$\sum_{u=2t}^{\infty} \alpha^{-(u-2t)}\bar{c} = \bar{c} \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^{-u} = K_0,$$

az (5.2)-ből következik, hogy az (5.4) bal oldala nempozitív. Következésképpen $c_{2t}<\bar{c}$, és az (5.1)-ből — t helyett $2t$-t írva —

$$c_{2t+1} > \bar{c}. \tag{5.5}$$

Feltevésünk szerint $\alpha\beta \leqq 1$ vagy $\beta \leqq \alpha^{-1}$. Az (5.1)-ből és az (5.5)-ből a *b)* következik.

Az *a)*-ból és a *b)*-ből következik az *a)* $t+1$-re: A *b)*-ből és a (2.8)-ből $h_t>0$. Az *a)*-ból és a (2.9)-ből *a)* fennáll $t+1$-re, amivel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] *Arrow, K. J.:* Some Ordinalist-Utilitarian Notes on Rawls's Theory of Justice. Journal of Philosophy 70, 1973, 245—263. old.

[2] *Dasgupta, P.:* On Some Problems Arising from Professor Rawls's Conception of Distributive Justice. Theory and Decision, 1974.

[3] *Harsányi, J.:* Cardinal Utility in Welfare Economics and the Theory of Risk-Bearing. Journal of Political Economy, 1953. 61. 434—435. old.

[4] *Rawls, J.:* A Theory of Justice. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971.

[5] *Solow, R. M.:* Intergenerational Equity and Exhaustible Resources. Review of Economic Studies, 1974.

[6] *Vickrey, W. S.:* Measuring Marginal Utility by Reactions to Risk. Econometrica, 13. 1945. 319—333. old.

[7] *Vickrey, W. S.:* Utility, Strategy, and Social Decision Rules. Quarterly Journal of Economics, 74. 1960. 507—535. old.

Optimális készletpolitika[*1]

Az optimális készletpolitikát először egy egyszerű modellből származtatjuk, amelyben előre ismert a jövőbeli (állandó) kereslet és több más lényeges mennyiség. Majd a bizonytalansági modeliek (egy statikus és egy dinamikus) vizsgálatával folytatjuk, amelyekben a kereslet ismert eloszlású valószínűségi változó. A legjobb maximális készletet és a legjobb újrarendelési pontot a kereslet eloszlásának, a rendelési költségnek, illetve a hiány okozta kárnak a függvényében határozzuk meg.

1. BEVEZETÉS

Szeretnénk vázolni egy módszert a késztermékek optimális készletezési szabályainak levezetésére. Nemcsak az üzleti vállalkozásokkal kapcsolatban létezik a készletprobléma, hanem olyan nem profitra termelő cégek esetében is, mint amilyenek a különböző közületi létesítmények és az ezekhez tartozó vállalatok, fiókirodák. Sőt, a készlet fogalma általánosítható úgy, hogy ne csak az árukat foglalja magában, hanem a felhasználható munkaerő-tartalékokat és a különböző egyéb tartalékeszközöket is. Bár a késztermékkészletek problémája a legegyszerűbb, a fogalom kiterjeszthető olyan árukra is, amelyek bizonyos költséggel átalakíthatók egy vagy több késztermékké, amennyiben erre szükség van. Megjegyzéseink a „rugalmas tervezés" későbbi, általánosabb elemzésének előkészítését szolgálják.

* (Társszerző: *T. Harris—J. Marschak*) Optimal Inventory Policy. Econometrica Vol. 19. No. 3. 1951. július 250—272. old.

[1] Ez a dolgozat 1950 nyarán, a RAND Corporation Logisztikai Konferenciájára (Santa Monica, California) készült. Újranyomására a Cowles Bizottság Dolgozataként kerül sor. Új sorozat, No. 44.

A szerzők hálájukat fejezik ki a Cowles Bizottság állandó tagjainak észrevételeikért és bírálatukért és külön Gerard Debreu-nek, részletes és segítőkész megjegyzéseiért és tanácsaiért. Herbert A. Simon (Carnegie Műszaki Egyetem) bírálata, Allen Newell (a RAND Corporation), Joyce Friedmann, Joseph Kruskal és C. B. Tompkins (mindhárman a George Washington Egyetem Tengerészeti Kutatások Logisztikai Tervezés Hivatala) kutatókkal folytatott viták szintén ösztönzőnek bizonyultak.

A szerzők sajnálják, hogy *Pierre Massé* [17] fontos munkájáról cikkük befejezése előtt nem szereztek tudomást.

Azt a mennyiséget fogjuk nevezni „nettó hasznosságnak", amelyet a döntéshozó maximalizálni igyekszik. A profitra termelő vállalatok esetében ez alkalmasan közelíthető a profittal; a pénzbevétel és a pénzkiadás különbségével. Egy nem profitra termelő intézmény, például egy kórház, gyakran képes pénzbeli költségeit közvetlenül kiszámítani és gyakran köteles feladatai teljesítéséből származó „bruttó hasznosságot", amely a profitra termelő vállalat „bruttó bevételének" felel meg[2], pénzben felbecsülni.

Bármely döntéshozó nettó haszna általában valószínűségi változó, amely bizonyos feltételektől függ (pl. változóktól vagy változók viszonyaitól). E feltételek közül egyeseket képes szabályozni, másokat nem. Az előbbiek a politikai eszközök (cselekvési szabályok, stratégiák). A szabályozhatatlan feltételeket általában bizonyos változók együttes valószínűségi eloszlása definiálja. Az ésszerű politika lényege az, hogy adottnak véve a szabályozhatatlan feltételek valószínűségi eloszlását, a szabályozható feltételeket úgy rögzítsük, hogy a nettó hasznosság várható értéke maximális legyen. Ha e valószínűségi eloszlás nem véletlen változók valamilyen halmazává fajul, akkor a „bizonyosság" esetéről beszélhetünk. Ebben a határesetben a nettó hasznosság nem valószínűségi változó, tehát magát a nettó hasznosságot kell maximalizálni.

Ebben a tanulmányban a döntéshozó a készletek gazdája. Véletlennek tekintünk legalább egy szabályozhatatlan feltételt: mégpedig a döntéshozó termékére irányuló keresletet. A többi szabályozhatatlan feltételt állandóként vagy állandó paraméterű összefüggésként kezeljük: a szállítási időt, a rendelési költséget, a készlet és a készletezési költség viszonyát, az árat, illetve viszonyát a rendeléshez (a „kínálati függ-

[2] Egy nem profitra termelő szervezet vezetőjének, akárcsak egy családfőnek, alternatív cselekedeteinek kimenetelét preferenciarendezése szerint kell elrendeznie. Sőt, ha a választások olyan alternatív „sorsjátékok" között tehetők, hogy mindegyiket a kimenetelek különböző valószínűségi eloszlása jellemzi, akkor — mint azt Neumann és Morgenstern [18] bizonyították — a kimenetelekhez numerikus „hasznosságok" rendelhetők olyan módon, hogy a választott sorsjáték várható hasznossága a legmagasabb.

Komoly probléma merül fel a profitra vagy a nem profitra termelő szervezetek alszerveinek döntései esetén. Az alszervezet vezetője köteles olyan döntést hozni, amely nem a saját, hanem a felettes szervezetének várható hasznosságát vagy bevételét maximalizálja. Nem képes kiszámítani saját cselekedetének saját hasznosságára vagy bevételére gyakorolt hatását, mert nem ismeri a többi alszervezet cselekedeteit. Azonban a felettes szervezet képes közvetlen döntés helyett a „belső árak" bizonyos halmazáról tájékoztatni alárendeltjeit. E halmaz a következő tulajdonságú: Ha minden alszervezet ezeken az „árakon" számított „nettó bevételét" maximalizálja (azaz ha a jelen vagy a jövőbeli ráfordításainak és kibocsátásainak a megfelelő „árral" szorzott algebrai összegét maximalizálja), akkor a felettes szerv hasznossága szintén maximális. Bármely két „belső ár" aránya egyenlő a megfelelő ráfordítások és kibocsátások helyettesítési arányaival, anélkül, hogy a helyettesítés csökkentené a felettes szerv jólétét, (adott technológiával és erőforrásokkal). Lásd *Koopmans* [11] [12] és *Debreu* [4].

Bárhol, ahol közvetlen pénzügyi számítások nem látszanak lehetségesnek, e dolgozatban a „hasznosság" és a „bevétel" szavak egymással felcserélhetők; egy alszervezet „bevételét" a felettes szerv által megállapított „belső árakon" kell számítani.

vényt"); a bruttó bevételt (vagy általánosabban: a bruttó hasznosságot). Így a spekulációs készleteket kizártuk vizsgálatunkból.

Ami a szabályozható feltételeket illeti, feltesszük, hogy a döntéshozó csak rendelésének nagyságát képes szabályozni (diszkrét időpontokban). Ez a megközelítés kirekeszt például olyan műveleteket mint az eladási ár rögzítése, a hirdetés, a kereslet befolyásolása, alkudozás a vevőkkel vagy a versenytársakkal.

Úgy gondoljuk, hogy speciális modellünk egy működőképes első megközelítés. Azzal, hogy a rendelés nagyságát tekintjük az egyedüli szabályozott feltételnek és a kereslet az egyedüli szabályozhatatlan feltétel, figyelembe veszük a leglényegesebb kérdéseket, amelyek felmerülnek az üzleti és közülti szervezetek gyakorlatában[3].

2. A BIZONYOSSÁG ESETE

A) Legyen x a szervezet terméke iránti — időegységre eső — keresletnek ismert állandó nagysága. Legyen a bruttó hasznosság (azaz a költségek levonása előtti hasznosság), amelyet a szervezet e kereslet kielégítése útján nyer, időegységenként

$$ax+a_0.$$

A nem profitra termelő szervezet esetén a_0 a szervezet „létezésének" (being) értékét fejezi ki (a szót először a Brit Tengerészettel kapcsolatban használták). Ha a szervezet kereskedelmi vállalat, a az eladási ár; egyébként pedig a a szervezet egységnyi tevékenységének értéke. Általában a valamilyen függvénye x-nek. Céljainkra elegendő, ha feltesszük, hogy a állandó és $a_0=0$. Jelöljük $b(q)$-val egy egység beszerzési árát, ha a rendelési nagyság q. Feltesszük, hogy $qb(q)$ növekvő függvénye q-nak és hogy $b'(q)\leqq 0$ (a nagy rendelések viszonylag olcsóbbak). Legyen K egy rendelés költsége, függetlenül nagyságától. Legyen a z nagyságú készlet egységnyi időre vonatkozó készletezési költsége

$$c_0+2cz,$$

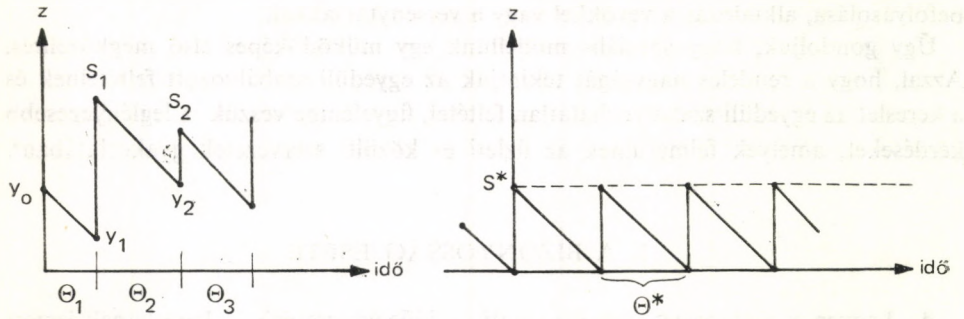
ahol c_0 a készletezés állandó költsége.

Általában c_0 a maximális készlettel, a c pedig a pillanatnyi készlettel (tönkremenés, súlyveszteség és elavulás miatt) és a beszerzési árral változik. Azonban feltesszük, hogy c_0 és c állandó.

B) Pozitív K mellett a folytonos rendelés költsége végtelen lenne. Ezért diszkrét időközönként kell rendelni. Legyen 0 az első rendelési időpont. Legyen θ_i az i-edik időköz hossza. A szállítás mennyisége az i-edik időközben $x\theta_i$. Az 1.*a ábrán* az összes lefelé lejtő egyenes közös meredeksége az időegységre eső kereslet: x.

[3] A feladat megfogalmazása előtt a készletszabályozásról szóló elérhető irodalomról tanulmány készült, amely szabadon használta *T. H. Whitin* [24] (Princeton Egyetem) és *Louise B. Haack* [9], (George Washington Egyetem) által készített összefoglaló bibliográfiákat, amelyek a nevezett egyetemeken folyó, a Tengerészeti Kutatási Hivatal céljait szolgáló tervekhez készültek.

Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett, az optimális politika olyan, amilyen az 1.*b ábrán* látható: az időközök — esetleg az elsőt kivéve — ugyanazzal az optimális hosszal és ugyanazzal a legmagasabb és legalacsonyabb készletszinttel rendelkeznek.



1. a és 1. b ábra

Először azzal a feltevéssel élünk, hogy azonnal teljesítik a rendeléseket. Ekkor az i-edik időköz elején rendelt mennyiség

$$q_i = S_{i-1} - y_{i-1} \geqq 0,$$

ahol S_{i-1} és y_{i-1} rendre az i-edik időköz elején a feltöltés utáni, illetve előtti készletet jelöli. Mivel ezen időközben a szállítás

$$x\theta_i = S_{i-1} - y_i,$$

következésképpen

(2.1) $$q_i = x\theta_i + y_i - y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

míg az i-edik időköz átlagkészlete

(2.2) $$\bar{z}_i = (S_{i-1} + y_i)/2 = (x\theta_i + 2y_i)/2 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Az i-edik időközben elért nettó hasznosság (egyelőre eltekintve a diszkontálástól)

(2.3) $$u(\theta_i) = ax\theta_i - q_i b(q_i) - 2c\bar{z}_i\theta_i - K.$$

A (2.1) és a (2.2) szerint ez csökkenő függvénye az $y_i \geqq 0$-nak. Ezért adott θ_i és y_{i-1} esetén $u(\theta_i)$ akkor maximális, ha $y_i = 0$. Továbbá legyen $y_0 = 0$: ha a vállalat működését $y' > 0$ készlettel kezdi, akkor legjobb politikája az, ha addig nem rendel, amíg a készlet tart, azaz y'/x ideig; és ez az időpont tekinthető a kezdetnek. Ekkor a (2.3) szerint $u(\theta_i)$ adott θ_1 mellett akkor a legnagyobb, amikor $y_1 = 0$; és bármilyen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ hosszúságú intervallumsorozatnál az $U = \sum_{i=1}^{n} u(\theta_i)$ összeg maximumát $y_1 = \ldots = y_n = 0$ esetén veszi fel.

Tegyük fel, hogy a vállalat egy bizonyos adott T hosszúságú időszakra maximalizálja hasznosságösszegét — figyelmen kívül hagyva az idő mindenfajta diszkontálását. Azaz $U=\sum_{i=1}^{n} u(\theta_i)$ mennyiséget maximalizálja $\left[\text{ahol } \sum_{i=1}^{n} \theta_i = T\right]$, következésképpen a hasznosság időbeli átlagát, $U/T=\sum_{i=1}^{n} \theta_i v(\theta_i)/\sum \theta_i$-t maximalizálja, ahol $v(\theta_i)=$ $=U(\theta_i)/\theta_i$. Láttuk, hogy ez azt követeli meg, hogy $y_i=0$ $(i=1, 2, \ldots)$ teljesüljön minden $\{\theta_i\}$ sorozatra. Továbbá U/T, lévén a $v(\theta_i)$ mennyiségek súlyozott átlaga, akkor veszi fel maximumát, ha minden $v(\theta_i)$ egyenlő $\max_{\theta_i} v(\theta_i)=v(\theta^*)$-gal. De a (2.1)—(2.3) szerint figyelembe véve, hogy $y_i=0$, $i\geqq 0$-t:

$$v(\theta) = ax-[xb(x\theta)+cx\theta+K/\theta] = ax-C(\theta), \tag{2.4}$$

ahol a szögletes zárójelben levő mennyiség az időegységre eső teljes költség, $C(\theta)$. Ha $v(\theta)$ maximális, és $C(\theta)$ minimális $\theta=\theta^*$ mellett, akkor

$$C'(\theta^*) = 0 = x^2 b'(x\theta^*)+cx-K/(\theta^*)^2. \tag{2.5}$$

A rendelések közötti optimális θ^* időszak így meghatározható c és K költségparaméterek, valamint a $b(q)$ beszerzésiár-függvény függvényében — feltéve, hogy a döntéshozó az U hasznosságösszeget maximalizálja anélkül, hogy valamit is diszkontálna az alatt az idő alatt, amíg tart a kezdő készlet.

Így (összhangban az 1.*b* ábrával), abban az esetben, amikor a rendeléseket azonnal teljesítik (szállítási idő=0), periódikusan ismétlődő változást kapunk az

$$S^* = x\theta^* \tag{2.6}$$

maximumkészletről

$$y = 0,$$

minimumkészletre, ahol a θ^* periódus kielégíti a (2.5)-öt.

C) Feltételezzük, hogy a beszerzésiár-függvény lineáris, azaz $b''(q)=0$ és

$$b(q) = b_0-b_1 q,$$

tegyük fel, hogy $b_1\geqq 0$. Ekkor a (2.5) szerint

$$\theta^* = \sqrt{K/x(c-b_1 x)}. \tag{2.7}$$

A (2.4)-ben szereplő $v(\theta)$ maximumára vonatkozó másodrendű feltételekből látható, hogy a (2.7)-ben a négyzetgyök alatti mennyiség mindig pozitív (azaz nem lenne pozitív és véges készletezési periódus, ha a rendelésmennyiség egységnyi növelése az áru árát jobban csökkentené, mint amennyi a többletkészletezési költség). A (2.6)-ot alkalmazva, az optimális maximumkészlet

$$S^* = \sqrt{Kx/(c-b_1 x)}. \tag{2.8}$$

Mint várható, így az optimális rendelésnagyság, következésképpen az optimális rendelési időköz annál nagyobb, minél nagyobb a rendelés költsége, K; minél kisebb az egységnyi (határ) készletezési költség, c; és minél nagyobb a rendelés nagyság hatása az egységárra, b_1.

Úgy véljük, hogy ez lényegében ugyanaz a megoldás, mint R. H. Wilsoné ([25], [26], [27], [28]), — aki korábban a Bell Telefon Társaságnál dolgozott, — valamint más szerzőké; (lásd Alford és Banks [1]). Az 1.*b ábra* érvényességét bizonyítottuk be, (amelyet rendszerint intuitíve elfogadnak) és megmutattuk, hogyan kell értékelni az optimális készletezési periódust.

D) Ha most bevezetjük a konstans szállítási idő fogalmát, állandónak véve a rendelés és a szállítás között eltelt $\tau > 0$-időt, akkor ez nem hat S^*-ra vagy θ^*-ra, de a rendelés feladási időpontja időegységgel előbbre tolódik. A rendelést nem akkor adják fel, amikor a készlet nullára csökken, hanem, amikor $x\tau$-egységre.

E) Lehetséges, hogy a döntéshozó nem képes teljesen szabályozni az egymás utáni rendelések közötti időköz hosszát. Szállítási menetrendek vagy ügyviteli kényelmi szempontok miatt lehetséges, hogy csak $\theta^0 \neq \theta^*$ időközönként lehet rendelést feladni. Például θ^0 lehet egy üzleti nap vagy hét, vagy egy szigeten levő raktárat látogató hajójárat periódusa. θ^0 így a „menetrend szerinti" vagy „legkisebb lehetséges" periódus két nemnulla rendelés között. Jelöljük θ'-vel a „legjobb lehetséges periódust", amely θ^0 ismeretlen számú többszöröse. Akárcsak mint előbb, most is θ^* a legjobb (de valószínűleg nem lehetséges) periódus. A (2.4)-ben definiált $C(\theta)$ teljes költség kifejezést vizsgálva, könnyen adódik, hogy 1.) ha $\theta^0 > \theta^*$, akkor $\theta' = \theta^0$; 2.) ha $\theta^* > \theta'$ és θ^* többszöröse θ^0-nak, akkor $\theta' = \theta^*$; 3.) ha $\theta^* > \theta'$ és θ^* nem többszöröse θ^0-nak, akkor legyen $\bar{n}$ olyan természetes szám, amelyre $\bar{n} < \theta^*/\theta^0 < \bar{n}+1$; ekkor θ' — a legjobb lehetséges periódus — vagy $\bar{n}\theta^0$ lesz vagy $(\bar{n}+1)\theta^0$, amelyik kisebb költséget ad (2.4)-ben. Korábbi dolgozatunkban (Arrow és szerzőtársai [2] 2: $E-F$ fejezet) ezt részletesebben vizsgáltuk, és a tárgyalást kiterjesztettük arra az esetre is, amikor nem menetrendszerű időpontokban is lehet rendelni, de drágábban, mint a menetrendszerűekben.

Helyszűke miatt eltekintünk most az aggregálási problémától, amellyel szintén foglalkoztunk említett dolgozatunkban (Arrow és szerzőtársai [2], 2: $G-I$ fejezet), és ugyanezt vizsgálta Marschak [16] általánosabb nézőpontból. Feltesszük, hogy egyetlen áru van, vagy minden áru jellemző paraméterei olyanok, hogy θ^* optimális periódus azonos. Feltesszük, hogy egyetlen rendelő (raktár) és egyetlen szállító (gyártó) van (lásd Tompkins [22]).

3. STATIKUS MODELL BIZONYTALANSÁG ESETÉN

A) Tegyük fel, hogy egy szervezet olyan $S \geqq 0$ szintet akar választani, hogy egy bizonyos áru készlete egy adott periódus elején annyi legyen, hogy a periódus folyamán felmerülő keresletet (igényeket) kielégítse. Az időegységet úgy választjuk meg, hogy megegyezzen ezen periódus hosszával. A 2. pont jelöléseit használjuk. Így

$x \geqq 0$ a keresletet jelöli e periódusban. Azonban most x-et valószínűségi változónak tekintjük. Feltesszük, hogy a szervezet ismeri a kereslet $F(x)$ eloszlásfüggvényeit. A szervezet bruttó hasznossága ξ egység eladása esetén

(3.1) $$a\xi + a_0 \qquad (a, a_0 \text{ állandó}).$$

Az időszak alatti eladás is valószínűségi változó: ξ egyenlő x-szel vagy S-sel, attól függően, hogy melyik a kisebb. Így a várható bruttó hasznosság

(3.2) $$aS[1-F(S)] + a\int_0^S x dF(x) + a_0.$$

Feltesszük, hogy az S egység beszerzésére költött összeg

(3.3) $$S(b_0 - b_1 S) + K; \quad b_0 > 0, \quad b_1 \geqq 0,$$

azaz, a 2. fejezet *C)* pontjának megfelelően a beszerzési ár állandó vagy lineárisan csökken a beszerzés mennyiségével. A korábbiakkal összhangban K egy rendelés költségét jelöli, de e mennyiség a továbbiakban nem játszik szerepet a statikus modellben. Feltesszük, hogy a teljes S mennyiséget beszerzik, és hogy a kereslet kielégítéséből a periódus befejezése után nem származik haszon. Végül az időszakra eső készletezési költség a következő alakban függ az S kezdőszinttől:

(3.4) $$\text{const.} + cS.$$

Ekkor — eltekintve az ún. „hiánybírságtól" („depletion penalty"), amelyet a *B)* pontban vezetünk majd be — a várható veszteség (a várható nettó hasznosság ellentettje) a következő:

(3.5) $$\text{const.} + S(c + b_0 - b_1 S) - aS[1-F(S)] - a\int_0^S x dF(x).$$

B) Most definiáljuk az ún. „hiánybírságot": Ha $x \leqq S$, akkor nincs kielégítetlen kereslet, és $\pi = 0$; de, ha $x > S$, akkor a szervezet kénytelen $\pi > 0$ összeget fizetni az $x - S$ túlkereslet kielégítésére.

A bírságfüggvényt adottnak vesszük. A szervezet — akár üzleti, akár nem — rendelkezik valamilyen általános elképzeléssel arról, hogy milyen értéket rendel ahhoz a kárhoz, amelyet egységnyi hiány léte okoz. Ismeri a szükséghelyettesítések költségét és gyengébb teljesítményét. A hiánycikkekért fizetett bírság nagyon nagy lehet: „Lovat! Lovat! Országomat egy lóért!"* kiáltotta a legyőzött III. Richárd.

C) Jegyezzük meg, hogy egy kereskedelmi vállalat esetén nincs szükség egy $\pi = \pi(x - S)$ alakú független bírságfüggvény bevezetésére. Ez helyettesíthető a „kieső eladás" figyelembevételével, amint azt a következő modell mutatja. Legyen F_t a $(t, t+1)$ időszak Poisson-eloszlású kereslete. Ez a következőképpen értelmezhető: a μ_t középérték arányos *a)* annak valószínűségével, hogy a vásárlók

* Vas István fordítása

nagy, de véges halmazának egy tagja vásárolni akar ebben az időszakban, és *b)* a vásárlók számával. A μ_t egyenlő a μ_{t-1}-gyel, ha a $(t-1, t)$ időszak keresletét kielégítették. Azonban, ha e kereslet meghaladta az akkor rendelkezésre álló készletet, akkor a μ_t kielégítetlen kereslettel arányos résszel kisebb a μ_{t-1}-nél, mivel a csalódott vásárlók közül többen eltűnnek a piacról. Feladatunk: a teljes várható hasznosság maximalizálása (0, 1), (1, 2), ... időszaksorozatra, ha F_0 kezdeti eloszlása adott. Ez a dinamikus modell különbözik attól, amelyet majd a 4—7. pontokban vizsgálunk meg.

D) Feltesszük, hogy

$$\pi = A + B(x - S), \quad \text{ha} \quad x > S,$$

$$\pi = 0 \quad \text{egyébként},$$

ahol A és B nemnegatív állandók, és legalább az egyikük nem nulla. Ekkor Π valószínűségi változó, amelynek a várható értéke:

$$(3.6) \qquad (A - BS)[1 - F(S)] + B \int_S^\infty x \, d\iota(x).$$

Ennek megfelelően a várható nettó veszteség — figyelembe véve a várható bírságot — a (3.5) és a (3.6) összege; és ez egy konstans tagtól eltekintve egyenlő az

$$(3.7) \qquad S(c + b_0 - b_1 S) + A[1 - F(S)] - (B + a)S[1 - F(S)] - (B + a) \int_0^S x \, dF(x) = L(S)$$

kifejezéssel. Az $S = S^*$ készletszint optimális, ha $L(S^*) \leqq L(S)$ minden S-re. Tegyük fel, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek differenciálható sűrűségfüggvénye van: $f(x) = dF(x)/dx$. Ha L abszolút minimuma nem $S = 0$, akkor van olyan S^* pont, ahol

$$dL(S^*)/dS = 0, \quad d^2L(S^*)/dS^2 > 0,$$

amelyből következik, hogy

$$(3.8) \qquad [c + b_0 - 2b_1 S^*] - Af(S^*) - (B + a)[1 - F(S^*)] = 0,$$

$$(3.9) \qquad -2b_1 - Af'(S^*) + (B + a)f(S^*) > 0.$$

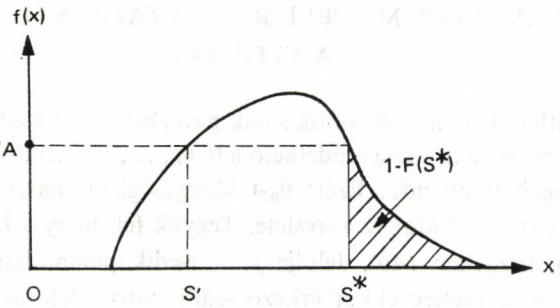
E) Közgazdasági nyelven kifejezve, a (3.8) első szögletes zárójelében levő tag a „határköltség" (a beszerzésé és a raktárosé, ha pótlólagos egységgel bővül készletünk); a másik két tag a várható „határhasznosság". (A várható hasznosság deriváltja — A *ford. megjegyzése*)

A (3.8)-ból látható, hogy az S^* optimális készletet a következő „szabályozhatatlan" paraméterek határozzák meg: 1.) $F(x)$, a kereslet eloszlásfüggvénye; 2.) bizonyos hasznossági és költségparaméterek: $(c + b_0)$, b_1, A és $(B + a)$. Speciálisan, ha $b_1 = 0$ (azaz, ha a nagy rendelések előnye elhanyagolható), akkor e paraméterek száma kettőre csökken: $A/(c + b_0)$-ra és $(B + a)/(c + b_0)$-ra. Az illusztráció céljából egyszerűsítsük tovább a dolgot: tegyük fel, hogy $B = a = 0$ (azaz a bírság vagy 0 vagy A, független a kielégítetlen kereslet nagyságától) és a szervezet működéséből

származó hasznosság független az eladott mennyiségétől. Ekkor a (3.8) és a (3.9) a következő alakot ölti:

(3.10) $$f(S^*) = (c+b_0)/A, \quad f'(S^*) < 0.$$

Az erre a esetre vonatkozó grafikus megoldást a 2. *ábra* mutatja. (Vegyük észre, hogy $f'(S^*)<0$, de $f'(S')>0$; S^* a legjobb készletszint, de S' nem.)



2. ábra

F) Néhány korábban publikált műben (Fry [8], Eisenhardt [5]) a készletekről szóló döntés nem kapcsolódott a hasznossági és a költségmegfontolásokhoz, hanem egy előre megadott $1-F(S)$ valószínűséghez, amely azt mutatja, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a kereslet nem haladja meg a készletet. Az $1-F(S)$ valószínűség megválasztása természetesen függ bizonyos implicit értékeléstől, amely arra a kárra vonatkozik, amely kielégítetlen kereslet esetén érné a szervezetet. Ebben a tanulmányban ezek az értékelések explicitek. Azonban, mivel az olyan paraméterek, mint az A, a B és az a, csak széles értelemben becsülhetők (legalábbis a tisztán kereskedelmi szervezetektől eltekintve, ahol a hasznosság pénzben kifejezett profit, és ahol kialakíthatók a 3. fejezet *C)* pontjában vázolt modellhez hasonló modellek), megfelelő támasz ezeknek a becsléseknek ellenőrzésében a „készletkifogyás" valószínűségének a figyelembevétele. Például, ha a 2. *ábra* eloszlása közelítőleg normális, akkor az a feltevés, hogy A bírság 100-szor nagyobb a $c+b_0$ határköltségnél, közelítőleg azzal ekvivalens, hogy a hiány valószínűsége (amelyet a vonalkázott terület mér) 0,3%; az a feltevés, hogy $A=10(c+b_0)$ körülbelül azt jelenti, hogy a hiány valószínűségét 5%-osnak vesszük stb.

G) Abban az általánosabb esetben, amikor $B+a>0$ (de $b_1=0$ továbbra is teljesül), adott S^* optimális készletszint és a megfelelő $1-F(S^*)$ hiányvalószínűség összhangban van a (3.8) lineáris egyenletet kielégítő $A/(c+b_0)=A'$, $(B+a)/(c+b_0)=$ $=B'$ paraméterek folytonos intervallumával. Például, ha $F(x)$ eloszlásfüggvény közelítőleg normális, akkor az, hogy az optimális készlet a keresletet a kereslet szórásának kétszeresével haladja meg, (és következésképpen a hiány valószínűsége körülbelül 2,3%), feltételezi, hogy (A', B') pár azon a szakaszon feküdjék, amelyik az A'-tengelyt a 13-as értéknél a B'-tengely pedig a 44-es értéknél metszi; míg a ke-

resletet a kereslet szórásának háromszorosával meghaladó optimális készlet (amelyhez a hiány 0,1%-os valószínűsége tartozik) olyan szakasznak felel meg, amely e tengelyeket 228 és 740 értékeknél metszi. Így a kontúrok halmaza segít olyan optimális készletértékek intervallumának megválasztásában, amely összhangban van a bírság- és bruttóhasznosság-paraméterek elfogadható értékeiből álló tartománnyal.

4. DINAMIKUS MODELL BIZONYTALANSÁG ESETÉN: A FELADAT

A) A 3. pontban leírt modell statikusnak nevezhető. Most egy dinamikus modellt mutatunk be. Ebben az áru megrendelhető a $0, \theta_0, \ldots, t\theta_0, \ldots$ diszkrét időpontokban, ahol θ_0 egy rögzített állandó. Ezért θ_0-t időegységként használhatjuk. Legyen x_t (t egész szám) a $(t, t+1)$ időköz kereslete. Tegyük fel, hogy a kereslet valószínűségi eloszlása, $F(x)$, független t-től. Jelölje y_t a t-edik pillanatban rendelkezésre álló készletet, kizárva az esetleg ekkor érkező szállítmányt. Jelölje z_t a t-beli készletet, beleértve az esetleg ekkor érkező szállítmányt. Jelölje q_t a t-edik időszakban rendelt mennyiséget. Legyen a rendelés és a szállítás közti idő (a szállítási idő) τ egész szám. Ekkor

$$y_t = \max(z_{t-1} - x_{t-1}, 0) \qquad (t = 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

$$z_{t+\tau} = y_{t+\tau} + q_t \qquad (t = 0, 1, \ldots). \tag{4.2}$$

Általában τ nemnegatív valószínűségi változó. Azonban — hogy ebben a lépésben egyszerűsítsük az elemzést, — feltesszük, hogy $\tau = 0$. Ekkor a (4.2)

$$z_t = y_t + q_t \tag{4.3}$$

-ra egyszerűsödik.

Válasszunk két számot, S-t és s-t: $S > s > 0$. Definiáljuk velük a következő cselekvési szabályt:

$$\text{Ha} \quad y_t > s, \quad \text{akkor} \quad q_t = 0 \qquad (\text{azaz } z_t = y_t) \tag{4.4}$$

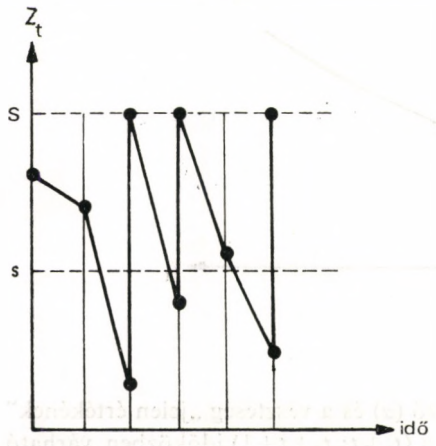
$$\text{Ha} \quad y_t \leqq s, \quad \text{akkor} \quad q_t = S - y_t \qquad (\text{azaz } z_t = S)$$

S és s általában a maximális készletet, illetve az „utánrendelési pontot" jelenti (feltéve, hogy $\tau = 0$).

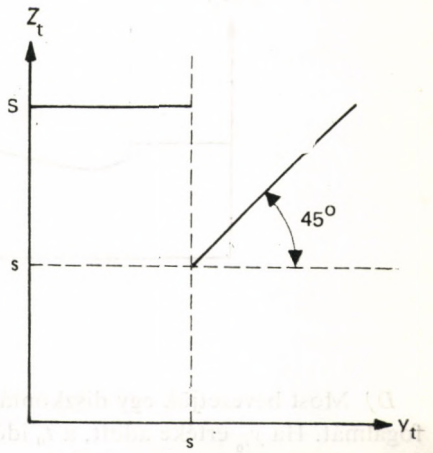
A 3. *ábra* görbéje a készletet az idő függvényében ábrázolja, amennyiben ezt a szabályt alkalmazzák. A 4. *ábra* z_t-t y_t függvényében mutatja.

B) Feltesszük (ugyanúgy, mint a 2. és a 3. pontban), hogy a rendelés költsége független a rendelt mennyiségtől. Legyen a költség K, állandó. Legyen az ún. hiánybírság, A szintén állandó (hasonlítsuk össze 3. fejezet *D)* pontjával $B = 0$ esetén). Legyen az egységnyi időre vonatkozó készletezési határköltség c, akárcsak a (3.4)-

ben. Tegyük fel, hogy az áru beszerzési ára egységenként független a beszerzés mennyiségétől, és egyenlő egy egység határhasznosságával (azaz a 3. fejezet *A)* pont jelöléseivel: $b_1=0, b_0=a$). Azaz a szóban forgó szervezet működésének egységnyi hasznossága — ami a működés költségének levonása után marad — feltevés szerint állandó, eltekintve a készletezési és rendelési költségektől. A 3. fejezet *A)*



3. ábra



4. ábra

pont jelöléseivel ez azt jelenti, hogy az a_0 állandó, míg K és c rendre a rendelés (mennyiségtől független) költségét és a készletezés határköltségét jelöli. Feltevésünk egy elfogadható közelítés egyes nem profitra termelő szervezetek esetében. Bizonyára általánosabb és valósághűbb lenne, ha a tevékenység határhasznossága különbözne beszerzési árától, statikus modellünknek megfelelően. De ez további matematikai munkát igényelne (lásd 7. fejezet *A)* pont).

C) Ha y_0 adott és S, valamint s értéke választott, a keletkező $\{y_t\}$ értékek „Markov-féle" sztochasztikus folyamatot képeznek (lásd Feller [7] XV. fejezet). Azaz y_{t+1} feltételes eloszlása y_t szerint független $y_{t-1}, \ldots, y_0$ értékétől. A $(t, t+1)$ időszak alatt keletkező veszteség feltételes várható értékét y_t *rögzített értéke esetén* $l(y_t)$ jelöli. A 4. fejezet B pontjának egyszerűsítő feltevései mellett

$$l(y_t) = \begin{cases} cy_t + A[1-F(y_t)], & \text{ha} \quad y_t > s, \\ cS + A[1-F(S)] + K, & \text{ha} \quad y_t \leqq s. \end{cases} \tag{4.5}$$

Így az $l(y_t)$ függvényben S és s paraméterek, valamint $l(y_t)$ állandó, $y_t \leqq s$ esetén. Vegyük észre, hogy

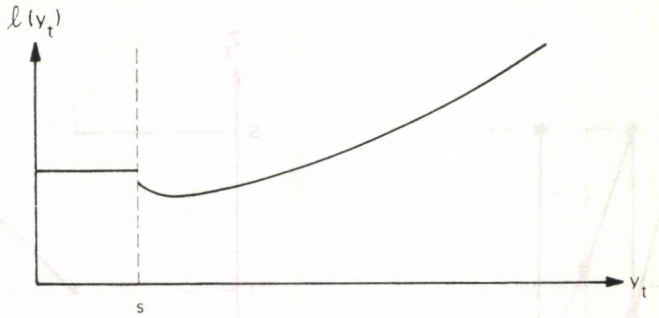
$$l(0) = l(S) + K. \tag{4.6}$$

A $(t, t+1)$ időszak alatti feltétel nélküli veszteséget, azaz $l(y_t)$ várható értékét, ahol y_t valószínűségi változó, az

$$l_t = l_t(y_0). \tag{4.7}$$

jelöli. Csak akkor írunk l_t helyett $l_t(y_0)$-t, ha szükségünk lesz annak hangsúlyozására, hogy l_t a kezdeti készletszinttől függ. Világos, hogy $l_0(y)=l(y)$ y_0 minden y értékére.

Az 5. ábra az $l(y_t)$ egy *lehetséges* típusát mutatja grafikusan.



5. ábra

D) Most bevezetjük egy diszkontálási tényező (α) és a veszteség „jelen értékének" fogalmát. Ha y_{t_0} értéke adott, a t_0 időpontban a $(t_0+t;\ t_0+t+1)$ időközben várható veszteség jelenlegi értéke $\alpha^t E[l(y_{t_0+t})]=\alpha^t l_t(y_{t_0})$. A várható hasznosság maximalizálásakor a döntéshozó a veszteségeknek nem a bekövetkezés időpontjában meglevő értékét, hanem jelenlegi értékét veszi számításba. Kereskedelmi gyakorlatban α egyenlő $1/(1+\varrho)$-val, ahol ϱ a megfelelő piaci kamatláb. Nem profitra termelés esetén ϱ-t külön kell becsülni (lásd még a 2. lábjegyzetet). Később azonban megmutatjuk (lásd az 5. fejezet *B* pontot), hogy bizonyos körülmények között az S és s paraméterek optimális értékei lényegében meghatározhatók abban az esetben, ha α egyenlő eggyel.

Ha most bevezetjük az

$$L(y) = l_0(y)+\alpha l_1(y)+\alpha^2 l_2(y)+\dots ,$$

függvényt, akkor a (4.7)-ből látjuk, hogy $L(y_t)$ a $(t, t+1)$ időszak veszteségeinek jelen értéke t-ben, adott y_t esetén. Definíció szerint $L(y)$ tartalmazza S és s paramétert; a döntéshozó úgy választja e paramétereket, hogy minimalizálja $L(y_0)$-t.

E)[4] Tegyük fel most, hogy y_0 adott. Adott y_1 értékre az összes időszakra vonat-

[4] Az *E)* pont érvelésének a következő intuitív összegzését tanácsolta kedvesen az egyik bíráló: Az első időszak alatt a várható veszteség $l(y)$ és a kereslet x, $dF(x)$ valószínűséggel; a maradék készlet $S-x$ lesz vagy $y-x$. A további várható veszteség rendre $L(S-x)$ vagy $L(y-x)$. Az előbbi esetben a várható jövőbeli veszteség az első időszak végén $\int_{0-}^{s} L(S-x)dF(x)+L(0)[1-F(S)]$, amelyet csak α-val kell megszorozni, hogy a diszkontálással visszakerüljünk az első időszak elejére, és hogy ezt hozzáadhassuk az eredeti $l(y)$-hoz. Ez adja a (4.11) egyenletet. A (4.12) társegyenletet hasonlóan kaphatjuk, abban az esetben, amikor az első időszak végén $y-x$ készlet marad.

kozó veszteség jelen értéke

$$l(y_0)+\alpha l(y_i)+\alpha^2 E_{y_1}[l(y_2)]+\alpha^3 E_{y_1}[l(y_3)]+\dots, \tag{4.8}$$

ahol $E_{y_1}[l(y_r)]$ az $l(y_r)$ feltételes várható értékét jelöli, adott y_1 mellett. Most

$$E_{y_1}[l(y_r)] = l_{r-1}(y_1) \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

mivel rögzített y_1 esetén a későbbi y_r $(r=1, 2, \dots)$ értékek ugyanolyan kapcsolatban vannak y_1-gyel, mint az y_{r-1} az y_0-lal, amennyiben y_1 nincs specifikálva. Ezért a (4.8) kifejezés egyenlő a következővel:

$$l(y_0)+\alpha l_0(y_1)+\alpha^2 l_1(y_1)+\alpha^3 l_2(y_1)+\dots = \tag{4.9}$$

$$= l(y_0)+\alpha[l_0(y_1)+\alpha l_1(y_1)+\alpha^2 l_2(y_1)+\dots] = l(y_0)+\alpha L(y_1).$$

A kezdettől számított összes időszakra vonatkozó teljes várható veszteség, amely definíció szerint $L(y_0)$, a (4.9)-ben álló kifejezés várható értéke, ahol az y_1-et valószínűségi változónak tekintjük. Következésképp

$$L(y_0) = l(y_0)+\alpha E[L(y_1)]. \tag{4.10}$$

Az $L(y_1)$ várható értékével mint y_0 függvényével kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha $y_0 \leqq s$, akkor $z_0 = S$ és $y_1 = \max(S-x_0, 0)$; míg ha $y_0 > s$, akkor $z_0 = s$ és $y_1 = \max(y_0 - x_0, 0)$. Így

$$EL[(y_1)] = \int_{0}^{S} L(S-x)\,dF(x)+L(0)[1-F(S)], \quad \text{ha} \quad y_0 \leqq s, \tag{4.10'}$$

$$EL[(y_1)] = \int_{0}^{y_0} L(y_0-x)\,dF(x)+L(0)[1-F(y_0)] \quad \text{ha} \quad y_0 > s,$$

(Vegyük észre, hogy a cselekvési szabály definiálásának módja alapján $L(y)$ állandó $0 \leqq y \leqq s$ esetén, azaz $L(0)$-t egyértelműen definiáltuk.) Az $y_0 = y$ helyettesítéssel a (4.10) és a 4.10') egyenletekből a következő egyenleteket kapjuk:

$$L(y) = l(y)+\alpha \int_{0}^{S} L(S-x)\,dF(x)+\alpha L(0)[1-F(S)], \quad \text{ha} \quad y \leqq s, \tag{4.11}$$

$$L(y) = l(y)+\alpha \int_{0}^{y} L(y-x)\,dF(x)+\alpha L(0)[1-F(y)], \quad \text{ha} \quad y > s. \tag{4.12}$$

Feladatunk: olyan $L(y)$ függvényt találni, amely kielégíti a (4.11)-et és a (4.12)-t, valamint minimalizálni $L(y_0)$-t S és s szerint.

5. A DINAMIKUS MODELL: MEGOLDÁSI MÓDSZER

A) (4.11) és a (4.12) egyenletek vizsgálatánál egyelőre elhagyjuk azt a feltevést, hogy az $F(x)$-nek van sűrűségfüggvénye, és csak azt tételezzük fel, hogy az x valószínűségi változó nem vehet fel negatív értékeket. Azt a lehetőséget figyelembe véve, hogy $F(x)$-nek szakadása lehet $x=0$-ban (azaz az $x=0$ pozitív valószínűségű, elfogadjuk azt, hogy az $\int_{0}^{(\,)} (\,)\, dF(x)$ alakú Stieltjes-integrál alsó határa 0^-. Továbbra is feltesszük, hogy $l(y)$-t a (4.5) adja, de világos, hogy hasonló eljárás megfelelő lenne bármely nemnegatív $l(y)$ függvényre, amely állandó $0 \leqq y \leqq s$-re és amely kielégít bizonyos magától értetődő regularitási feltételeket.

Mivel $l(y)$ — és így $L(y)$ is — független y-tól $0 \leqq y \leqq s$ esetén, a (4.11) egyenlet egyszerűen azt állítja, hogy

$$L(0) = l(0) + \alpha \int_0^S L(S-x)\, dF(x) + \alpha L(0)[1-F(S)], \tag{5.1}$$

amíg $y=S$ összefüggést behelyettesítve a (4.12)-be az

$$L(S) = l(S) + \alpha \int_0^S L(S-x)\, dF(x) + \alpha L(0)[1-F(S)] \tag{5.2}$$

összefüggéshez jutunk.

Kivonva az (5.2)-t az (5.1)-ből, a (4.6) felhasználásával a következő összefüggést kapjuk:

$$L(0) - L(S) = K, \tag{5.3}$$

amely valóban nyilvánvaló, mivel 0 kezdőkészlet esetén azonnal S mennyiséget rendelünk K költséggel. Megoldjuk a (4.12) egyenletet az $L(y)$ függvényre, az $L(0)$-t ismeretlen paraméternek tekintve, és azután az (5.3) segítségével meghatározzuk az $L(0)$-t.

A (4.12) jobb oldalán az

$$\int_0^y L(y-x)\, dF(x) = \int_0^{y-s} L(y-x)\, dF(x) + \alpha L(0) \int_{y-s}^{y} dF(x). \tag{5.4}$$

helyettesítést végrehajtjuk; az utolsó kifejezés abból következik, hogy $L(y-x)=L(0)$, ha $0 \leqq y-x \leqq s$. Megcseréljük most a változókat:

$$\begin{aligned} y - s &= \eta, \\ L(y) = L(\eta+s) &= \lambda(\eta). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Az (5.4) és az (5.5) behelyettesítésével a (4.12)-be a következő összefüggést kapjuk:

$$\lambda(\eta) = l(\eta+s) + \alpha L(0)[1-F(\eta)] + \alpha \int_0^{\eta} \lambda(\eta-x)\, dF(x), \quad \eta > 0, \tag{5.6}$$

Az (5.6) egyenlet a felújítási elmélet integrálegyenletének szabványalakja (lásd például Feller [6] tanulmányát). Az (5.6) megoldása a következőképpen fejezhető ki: Definiáljuk $F_n(x)$ eloszlásfüggvényt. [($F(x)$ n-edik konvulúciója $(n=1, 2, \ldots)$)]

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F(x), \\ F_{n+1}(x) &= \int_0^{\infty} F_n(x-u)\, dF(u). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Definiáljuk a $H_\alpha(x)$ függvényt a következőképpen:

$$H_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n F_n(x), \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1. \tag{5.8}$$

Nyilvánvaló, hogy a sor konvergál, ha $0 \leqq \alpha < 1$. Feller [6] cikkéből valóban látható, hogy a sor konvergál, ha $\alpha = 1$, amire később még szükség ünk lesz.

$$R(\eta) = l(\eta + s) + \alpha L(0)[1 - F(\eta)], \tag{5.9}$$

helyettesítést alkalmazva, az (5.6) megoldását a következő alakban írhatjuk fel:

$$\lambda(\eta) = R(\eta) + \int_0^{\eta} R(\eta - x)\, dH_\alpha(x) = R(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\eta} R(\eta - x)\, dF_n(x). \tag{5.10}$$

Ez az egyetlen olyan megoldás, amely minden véges intervallumban korlátos. L és l segítségével az (5.10) a következő összefüggést adja:

$$L(y) = l(y) + \alpha L(0)[1 - F(y - s)] + \tag{5.11}$$

$$+ \int_0^{y-s} \{l(y - x) + \alpha L(0)[1 - F(y - x - s)]\}\, dH_\alpha(x), \quad y > s.$$

Az (5.3)-ból és az (5.11)-ből

$$L(0) - K = l(S) + \int_0^{S-s} l(S - x)\, dH_\alpha(x) + \tag{5.12}$$

$$+ \alpha L(0) \left\{1 - F(S - s) + \int_0^{S-s} [1 - F(S - s - x)]\, dH_\alpha(x)\right\}.$$

Az (5.12)-ben az $L(0)$ a lineáris egyenletrendszer ismeretlenje, amelynek nemnulla együtthatója van mindaddig, amíg $\alpha < 1$. Ebből kiszámítható $L(y)$ értéke $y \leqq s$-re és az (5.11)-ből az $L(y)$, ha $y > s$ is kiszámítható, mivel az (5.11) jobb oldalának mindegyik tagja ismert.

Az $L(0)$ (5.12)-beli együtthatója a következő:

$$1 - \alpha \left\{1 - F(S - s) + \int_0^{S-s} [1 - F(S - s - x)\, dH_\alpha(x)\right\} =$$

$$= 1 - \alpha \left\{1 - F(S - s) + H_\alpha(S - s) - \int_0^{S-s} F(S - s - x)\, dH_\alpha(x)\right\} =$$

$$= 1 - \alpha \left\{1 - F(S - s) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n F_n(S - s) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n F_{n+1}(S - s)\right\} =$$

$$= (1 - \alpha)[1 + H_\alpha(S - s)].$$

Az (5.13) alkalmazásával az

$$L(0) = \frac{K + l(S) + \int_0^{S-s} l(S - x)\, dH_\alpha(x)}{(l - \alpha)[1 + H_\alpha(S - s)]} \tag{5.14}$$

összefüggést nyerjük. Ismerve az $L(y)$-t, (5.11)-ből és az (5.14)-ből a következő lépés s és S azon értékeinek megkeresése, amelyek adott y_0 kezdő készlet esetén minimalizálják $L(y_0)$-t. Csak $L(0)$ minimalizálásával foglalkozunk, bár eljárásunkat kidolgozhatnánk tetszőleges y_0 kezdőkészlet esetére is. Az $L(0)$ minimalizálása nem olyan speciális eljárás, mint ahogy azt esetleg gondolnánk. Tegyük fel, hogy adott y_0-ra az $L(y_0)$-t minimalizáló s és S értékeket az $s^*(y_0)$ és az $S^*(y_0)$ jelöli. Ha $s^*(0) > 0$ és ha $s^*(y_0)$, illetve $S^*(y_0)$ egyértelműen meghatározott folytonos függvényei y_0-nak

(ezt a kérdést matematikailag nem vizsgáltuk), akkor $s^*(y_0)=s^*(0)$ és $S^*(y_0)=S^*(0)$ megfelelően kicsiny y_0-ra. Ennek belátására írjuk fel:

$$L(y) = L(y; s, S)$$

jelezve, hogy az L függ s-től és S-től is. Legyen a olyan szám, amelyre $0<a<s^*(0)$. Tegyük fel, hogy y_0 $(0<y_0<a)$ elég kicsiny ahhoz, hogy $s^*(y_0)>a$ teljesüljön. Ekkor

$$L(y_0; s^*)(y_0), S^*(y_0)) = \min_{S>a,\, S\geqq s} L(y_0; s, S) = K + \min_{S>a,\, S\geqq a} L(S; s, S),$$

amely y_0-tól függetlenül van minimalizálva. Q. E. D.

Az 5. fejezet B pontjában olyan optimalizálási ismérvet adunk, amely független az y_0 kezdőszinttől.

Most újra bevezetjük azt a feltevést, hogy $F(x)$ rendelkezik folytonosan differenciálható sűrűségfüggvénnyel:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

A (4.5)-re hivatkozva megemlítjük, hogy $y>s$-re $l(y)$ nem más, mint

$$l(y) = A[1-F(y)]+cy.$$

Tekintsük az (5.14) minimalizálását s és S szerint. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor az $(S-s)$ rögzített. Az (5.14) nevezőjében s és S csak az $(S-s)$ függvényében szerepel. Ezért az (5.14) számlálóját kell S szerint minimalizálni, feltéve, hogy S legalább akkora, mint az $S-s$ rögzített értéke. Ha $S=S-s$ (azaz $s=0$) nem minimumhely, akkor olyan S lesz a minimumhely, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$c - Af(S) + \int_0^{S-s} [c - Af(S-x)]\,dH_\alpha(x) = 0, \tag{5.15}$$

$$-Af'(S) - \int_0^{S-s} Af'(S-x)\,dH_\alpha(x) > 0, \tag{5.16}$$

Vegyük észre, hogy K nem szerepel az (5.15)-ben, illetve az (5.16)-ban.

Ha most elejtjük azt a feltevést, hogy $S-s$ rögzített, akkor s^* és S^* — feltéve, hogy $0<s^*<S^*$ — olyan értéket vesz fel, amely mellett az (5.15) teljesül és az (5.14) $S-s$ szerinti deriváltja nulla, figyelembe véve a megfelelő másodrendű feltételeket. Szükségünk van arra a feltevésre is, hogy $H_\alpha(x)$ valamilyen $h_\alpha(x)$ függvény integrálja:

$$H_\alpha(x) = \int_0^x h_\alpha(t)\,dt.$$

Ekkor az (5.14) $S-s$ szerinti deriváltját nullává téve és parciálisan integrálva, az

$$A[F(S)-F(s)] = c(S-s)+K+\int_0^{S-s} [c-Af(S-x)]H_\alpha(x)\,dx. \tag{5.17}$$

összefüggéshez jutunk. Valószínű, hogy az (5.14) minimalizálása a gyakorlatban numerikus módszerekkel megvalósítható.

B) Eddig α-t tetszőleges paraméternek tekintettük. Világos, hogy s és S rögzítése mellett, ha α tart 1-hez, az $L(0)$ mennyiség végtelenhez tart. Azonban látni fogjuk, hogy az $(1-\alpha)L(0)$ véges határértékhez tart, amelynek jelentőségét a következőképpen magyarázhatjuk meg. Tegyük fel, hogy

s és S szintje rögzített és y_0 adott. Már említettük, hogy az y_t mennyiségek Markov-féle sztochasztikus folyamatot képeznek. Továbbá az $F(x)$-re vonatkozó (a gyakorlatban nem megszorító) feltevések mellett y_t valószínűségi eloszlása $t \to \infty$ esetén adott, és y_0-tól független határeloszláshoz tart. Ha az $F(x)$ lépcsős függvény[5], akkor megszámlálható állapotú Markov-lánccal van dolgunk. Ha $F(x)$ nem lépcsős függvény, ez az elmélet közvetve továbbra is alkalmazható. Bármely pillanatban a készlet „kora" (azaz a legutolsó rendelés óta eltelt idő) diszkrét típusú eloszlású, amely valamilyen határhoz tart, következésképpen y_t-nek van határeloszlása. Tehát l_t, a $(t, t+1)$ időköz várható vesztesége, valamilyen l_∞ határértékhez tart, amely független l_0-tól. Látni fogjuk, hogy az l_∞ kiszámítható. Ha nem akarjuk az α diszkontálási tényezőt alkalmazni, egyik lehetséges út olyan s-t és S-t választani, amelyek l_∞-t minimalizálják. Ez majdnem egyenértékű a teljes veszteség hosszú, de véges időszakra történő minimalizálásával.

A helyzet másfajta megközelítési módja a következő: Nagy t-re y_t eloszlásának határértéke „stacionárius eloszlás", azaz, ha y_0 ahelyett, hogy rögzített szám volna, az említett eloszlást követi, akkor y_t eloszlása minden t-re ugyanaz. Ha y_t eloszlása az említett eloszlás, akkor $(t, t+1)$ időszak alatti várható veszteség pontosan l_∞.[6]

Mivel

$$L(0) = l_0(0) + \alpha l_1(0) + \alpha^2 l^2(0) + \dots$$

és $l_t(0) \to l_\infty$, ha $t \to \infty$ bebizonyítottuk az

$$L(0)(1-\alpha) = l_0(0) + \alpha[(l_1(0) - l_0(0)] + \alpha^2[l_2(0) - l_1(0)] + \dots \tag{5.18}$$

összefüggést. Az

$$l_0(0) + [l_1(0) - l_0(0)] + [l_2(0) - l_1(0)] + \dots$$

sor l_∞ értékéhez konvergál, és az analízis jólismert eredménye értelmében az (5.18)-ból

$$\lim_{\alpha \to 1} L(0)(1-\alpha) = l_\infty$$

eredményhez jutunk. Az l_∞ meghatározásához szorozzuk meg az (5.14) jobb oldalát $(1-\alpha)$-val. Az $\alpha \to 1$ határátmenetnél az:

$$l_\infty = \frac{K + l(S) + \int_0^{S-s} l(S-x)\, dH(x)}{1 + H(S-s)} \tag{5.19}$$

eredményt kapjuk, ahol $H(x)$-et a következőképpen definiáljuk:

$$H(x) = \lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x).$$

(Nem nehéz belátni, hogy a

$$\lim_{\alpha \to 1} \int_0^{S-s} l(S-x)\, dH_\alpha(x) = \int_0^{S-s} l(S-x)\, dH(x)$$

lépés jogos.)

Ekkor minimalizálhatjuk S és s szerint az (5.19)-ben szereplő függvényt. Meg kell jegyeznünk, hogy az l_∞ természetesen független az y_0 kezdeti készlettől.

[5] Lásd *Feller* [7], XV. fejezetet, abban az esetben, amikor $F(x)$ lépcsős függvény.

[6] E stacionarius eloszlás explicit módon is meghatározható, és alternatív megoldási eszközt ad megtalálására — mint ezt H. Simon hangsúlyozta.

6. DINAMIKUS MODELL: PÉLDÁK

Most példaként néhány speciális $F(x)$ függvényt vizsgálunk. Előnyös olyan függvényt használni, amelynek konvolúciói explicit alakban leírhatók. Ebből a szempontból kényelmesek az

$$F(x) = \frac{\beta^k}{(k-1)!} \int_0^x u^{k-1} e^{-\beta u}\, du \quad k > 0,\ \beta > 0, \tag{6.1}$$

alakú függvények [$(k-1)! = \Gamma(k)$, ha k nem egész szám] így β és k megfelelő választásával a közép és a szórás tetszőleges kívánt értéket felvehet:

$$\bar{x} = k/\beta, \quad \bar{x^2} - (\bar{x})^2 = k/\beta^2,$$

Továbbá $F_n(x)$ nem más, mint

$$F_n(x) = \frac{\beta^{nk}}{(nk-1)!} \int_0^x u^{nk-1} e^{-\beta u}\, du.$$

A $H_\alpha(x)$ függvény ekkor

$$H_\alpha(x) = \int_0^x e^{-\beta u} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{nk} \alpha^n u^{nk-1}}{(nk-1)!} \right\} du. \tag{6.2}$$

Ha k egész szám, akkor a (6.2)-beli összegzés explicit módon elvégezhető:

$$H_\alpha(x) = \frac{\beta \alpha^{1/k}}{k} \int_0^x e^{-\beta u} \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j e^{\omega_j \alpha^{1/k} \beta u} \right) du. \tag{6.3}$$

ahol $\omega_1, \ldots, \omega_k$ a k-adik komplex egységgyökök. Például ha $k=2$, akkor $\omega_1 = -1$ és $\omega_2 = 1$, azaz

$$H_\alpha(x) = \frac{\beta \sqrt{\alpha}}{2} \int_0^x e^{-\beta u} (e^{\beta \sqrt{\alpha u}} - e^{-\beta u \sqrt{\alpha u}})\, du.$$

Segít, ha kiszámítjuk l_∞ értékét a legegyszerűbb esetben, ahol $f(x) = e^{-x}$. Ebben az esetben $\beta = k = 1$, $F(x) = 1 - e^{-x}$ és (6.3)-ból:

$$H_\alpha(x) = \int_0^x e^{-u}(e^u)\, du = x,$$

továbbá

$$l_\infty = \frac{K + l(S) + \int_0^{S-s} l(S-x)\, dx}{1+S-s}$$

$$= \frac{K + cS + Ae^{-S} + \int_0^{S-s} [c(S-x) + Ae^{-S+x}]\, dx}{1+S-s}$$

$$= \frac{K + cS + Ae^{-S} + cS(S-s) - \frac{c}{2}(S-s)^2 + Ae^{-S}(e^{S-s} - 1)}{1+S-s}$$

$$= \frac{K + cS + Ae^{-s} + \frac{c}{2}(S^2 - s^2)}{1+S-s}.$$

Legyen $S - s = \Delta$, látható, hogy rögzített Δ-ra l_∞ minimális (kivéve, ha $s=0$), ha

$$S = \mathrm{Log}_s(A/c) - \log_s(1+\Delta) + \Delta.$$

7. TOVÁBBI FELADATOK ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

A dinamikus modell valósághűbbé tételéhez bizonyos általánosítások szükségesek. Ebben a fejezetben felsoroljuk ezeket mint a további munka programját.

A) A 2. fejezet bizonyossági modelljében és a 3. fejezet statikus bizonytalansági modelljében használt költség- és hasznossági paraméterek közül csak hármat tartottunk meg a dinamikus bizonytalansági modellben: c-t, a készletezési határköltséget; K-t, a rendelési költséget és A-t, a hiánybírság állandó részét. Tehát elejtettük a következő paramétereket: a-t, b-t, b_1-et és B-t. Közülük az első három jelentését a 4. fejezet B pontjában tárgyaltuk. A fejlettebb statikus modell (3.8) egyenletéből azt sejthetjük, hogy egy hasonlóan kialakított dinamikus modellben c-t könnyen helyettesíthetnénk $(c+b_0)$-lal, de $(B+a)$ olyan kiegészítő paramétert alkotna, amelyet teljesen kizártunk egyszerű dinamikus modellünkből. Más típusú nehézségek merülnek fel, amikor $b_1>0$, azaz amikor előnyös a nagybani beszerzés, amely nem az apró rendelések összefogásából, hanem a nagybani (termelés és) szállítás olcsóságából fakad. Ez nyilvánvalóan módosítani fogja a (4.4) cselekvési szabályt, mivel a minimalizálandó veszteség $(S-y_t)$-től, a feltöltési mennyiségtől függ majd.

B) Feltettük, hogy az $F(x)$ időszakonkénti keresleteloszlás ismert; amelyet feltehetőleg előző minták alapján becsültek. Ezen eloszlást Fry és Wilson ténylegesen becsülték a Bell Telefon Társaság részére, valamint Kruskal és Wolf ([13], [14]) az Egyesült Államok Haditengerészete egészségügyi részlegének anyagaihoz.

Ahelyett, hogy $F(x)$ eloszlás becslését egyszer s mindenkorra elvégeznénk, és állandó S és s értékeket rögzítenénk, változtathatjuk S-t és s-t, amint a keresletről újabb megfigyelések válnak elérhetővé. A feladat: a t-edik időszakban meghatározni a legjobb S és s értékeket mint az addig rendelkezésre álló megfigyelések sorozatának függvényét: mondjuk $S_t(x_1, \ldots, x_{t-1})$-t és $s(x_1, \ldots, x_{t-1})$-et. Általánosabban olyan $q_t(x_1, \ldots, x_{t-1})$ függvénysorozatot kell találni, amely a rendelés legjobb mennyiségét adja, ahol a (4.4) feltételek a sorozatot nem korlátozzák szükségszerűen. E probléma megoldásába nem szándékoztunk e tanulmány keretén belül belefogni[7].

STANFORD Egyetem, a RAND Corporation és a Közgazdasági Kutatás Cowles-féle Bizottsága.

[7] Lásd *Wald* [23], *Arrow—Blackwell—Girschick* [2]. Ha tudnánk valamit az alternatív $F(x)$-ek *a priori* valószínűségéről, akkor a várható veszteség átlagolható volna az összes lehetséges $F(x)$-re, és minimalizálható volna az ismeretlen q_t, vagy S_t, s_t függvények szerint. Ilyen ismeretek hiányában gondolhatunk a maximális várható veszteség minimalizálására. *L. Savage* [20] által alkalmasan módosított alakban ez utóbbi elvet használta *Marschak* [15] egy beruházási döntésekkel foglalkozó feladatban, és az alkalmazhatóságot tárgyalta Modigliani és Tobin. Lásd még *Niehans* [19]. Más ismérvet javasolt *Hurwicz* [10]. Egy ezekből eltérő megközelítést terjesztett elő *Herbert A. Simon* [21].

IRODALOM

[1] *Alford, L. P.—Banks, John R.:* (szerk.) Production Handbook, New York. Ronald Press, 1944 1639 old. (Különösen a 394—403. old. ahol a numerikus költségminimalizálás példáját Norton és Davis képletei egészítik ki.)

[2] *Arrow, K. J.—Blackwell, D.—Girschick, M. A.:* Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems. Econometrica, Vol. 17, July—October, 1949, 214—244. old.

[3] *Arrow, J. J.—Harris, T.—Marschak, J.:* Optimal Inventory Policy (hectographed). George Washington University Logistics Papers, Issue No. 4, Appendix 1 to Quarterly Progress Report No. 5. 16. November 1950. February 1951.

[4] *Debreu, Gerard, :*The Coefficient of Resource Utilization, Econometrica, Vol. 19. July, 1951. 273—292. old.

[5] *Eisenhart, Churchill:* Some Inventory Problems (sokszorosítva). National Bureau of Standards, Techniques of Statistical Inference A2.2, Lecture 1. January, 6. 1948. 14. old.

[6] *Feller, W.:* On the Integral Equation of Renewal Theory Annals of Mathematical Statistics. Vol. 12. September, 1941. 243—267. old.

[7] *Feller, W.:* Introduction to Probability Theory. New York, John Wiley and Sons, 1950. 419. old.

[8] *Friy, Thornton C.:* Probability and Its Engineering Uses. New York, D. van Nostrand, 1928. 476. old. (különösen) 229—232. old.

[9] *Haack, Louse B.:* Selected Supplementary Bibligraphy of Publications on Inventory Control (sokszorosítva). The George Washington University Logistics Papers, Appendix 1 to Quarterly Progress Report No. 2. 16. February, 15. May 1950.

[10] *Hurwicz, Leonid:* A Class of Criteria for Decision-Making under Ignorance. (sokszorosítva), Cowles Commission Discussion Paper, Statistics No. 356. Februray 9. 1951. 3 old.

[11] *Koopmans, T. C.:* Analysis of Production as an Efficient Combination of Activites. Megjelent az Activity Analysis of Production and Allocation c. kötetben. Cowles Commission Monograph, 13. New York. John Wiley and Sons, 1951. 33—97 old.

[12] *Koopmans, T. C.:* Efficient Allocation of Resources (közlésre benyújtva az Econometricahoz).

[13] *Kruskal, J. B., Jr.—J. J. Wolf:* Consumption as a Random Variable. (sokszorosítva). Logistics Papers, Issue No. 2, Appendix 1 to Quarterly Progress Report No. 2. 16. February 15. May 1950. Office of Naval Research, Project NR 047 001.

[14] *Kruskal, J. B.:* Protection from Depletion of Supply in the Bureau of Medicine and Surgery (sokszorosítva). Logistics Papers, Issue No. 2. Appendix 1 to Quarterly Progress Report No. 2, 16. February 15. May 1950. Office of Naval Research, Project NR 147 001.

[15] *Marschak, Jacob:* Role of Liquidity under Complete and Incomplete Information. Papers and Proceedings, American Economic Review, Vol. 39. May, 1949. 182—195. old. kiegészítve F. Modigliani—J. Tobin bírálatával. (Abstracts in Econometrica, Vol. 17. April, 1949. 180—184. old.)

[16] *Marschak, Jacob:* Optimal Aggregation of Inventories under Certainty (sokszorosítva). Cowles Commission Discussion Paper, Economics, No. 2015, March 30, 1951.

[17] *Massé, Pierre:* Les Réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique, Paris, Hermann, 1946. Vol. I, Avenir determiné, 148. old. Vol. II, Avenir aléatoire, 229 old.

[18] *Neumann, John von—O. Morgenstern,:* Theory of Games and Economic Behavior (második kiadás), Princeton, Princeton University Press, 1947. 641. old.

[19] *Niehans, Dr. Jurg:* Zur Preisbildung bei Ungewissen Ervartungen. Schweizerische Zeitschrift fuer Volkswirtschaft und Statistik, Vol. 84. 1948. 433—456. old. (különösen 445. old.)

[20] *Savage, L. J.:* The Theory of Statistical Decision. Journal of the American Statistical Association, Vol. 46, March, 1951. 55—67. old.

[21] *Simon, Herbert A.:* An Exploration into the Use of Servomechanism Theory in the Study of Production Control. (közlésre benyújtva az Econometricahoz).

[22] *Tompkins, C. B.:* Allocation between Assignments to Planned Consumption and to Safety Allowance. (sokszorosítva) George Washington University Logistics Papers, Appendix 1 to Quarterly Progress Report No. 3. 16 May, 16 August, 1950.

[23] *Wald, A.:* Statistical Decision Functions. New York, John Wiley and Sons, 1950. 179 old.

[24] *Whitin, T. H.* (szerk.): Inventory Control Bibliography. (sokszorosítva) The George Washington University Logistics Papers. Appendix 1 to Quarterly Progress Report No. 1. 28 November, 1949. 15. February, 1950.

[25] *Wilson, R. H.:* Scientific Control of Stockroom Inventories. Midwest Quality Control Conference, 1947.

[26] *Wilson, R. H.:* Stockroom Purchasing. Purchasing, Vol. 10. February, 1941. 47—50. old.

[27] *Wilson, R. H.:* A Universal System of Stock Control. Purchasing, Vol. 11. September, 1941. 80—88. old.

[28] *Wilson, R. H.:* A Scientific Routine for Stock Control. Harvard Business Review, Vol. 13. October, 1936. 116—128. old.

Az egyetemi oktatás rostáló szerepe[*1]

Írásom a felsőoktatás gazdasági szerepének egy modelljét vázolja fel, amelynek felfogása meglehetősen különbözik a ma már hagyományos „emberi tőke" nézetektől. Célja, hogy formális alakban írja le néhány szociológus nézetét (lásd például Berg [3]), amely szerint a diploma nem annyira az elsajátított szakmai ismeretek bizonyítéka, elsődlegesen inkább a teljesítőképesség közelítő mérésére szolgál. Azt hiszem, a modell alkalmas arra, hogy tisztázzon bizonyos szempontokat a felsőoktatás gazdasági hozamával kapcsolatban, és a hagyományos értelmezéshez képest egy új alternatívát jelent.

A modell nyilván elvonatkoztat a kérdés néhány olyan oldalától, amelyeket már sokat vizsgáltak. Nem akarok mentegetőzni ezért az absztrakcióért, de azért igen, hogy a modell formailag még eléggé primitív, és hogy tesztelése meglehetősen nehéznek tűnik. Remélem, tovább dolgozhatok majd rajta, és másokat is erre ösztönözhetek.

A közgazdászok szokásos elképzelése az, hogy az oktatás növeli az egyének termelékenységét, és így munkájuk piaci értékét is. A formális elméletet nem érdekli, hogy milyen módon nő meg az egyetemisták termelékenysége, hallgatólagosan azonban feltételezik, hogy az oktatás során a hallgatók megismerési készségei gyarapodnak. A tanárok ugyanakkor régóta sejtik, hogy az oktatás szocializációs folyamat; a folyamat belső tartalma olyasfajta készségek elsajátítása, mint a kitűzött feladatok végrehajtása, a többiekkel való együttműködés, rendszeresség, pontosság, és hasonlók, amelyek kialakítása legalább olyan fontos, mint az oktatás kinyilvánított célja: az ismeretek átadása. Az utóbbi doktrínát napjainkban a radikális közgazdászok elevenítették fel, de nem helyeslő értelemben, ellenkezőleg, negatívan értékelték.

* Higher education as a filter. Journal of Public Economics 2. 1973. 93—216. old. © North Holland Publishing Company.

[1] A dolgozat első változata egy konferenciára készült, amelyet az egyetemi oktatás hatékonyságáról La Pazban, Mexikóban tartottak 1972. június 7—15. között, az Esmée Fairbairn Közgazdasági Kutató Központ védnökségével. A további munkát a Nemzeti Tudományos Alap GS 2874—A1 szerződése támogatta a Stanford Egyetem Matematikai Tanulmányok a Társadalomtudományokban Intézetében (Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences).

A közgazdasági elmélet szempontjából mindamellett a szocializációs hipotézis éppúgy „emberi tőke" elmélet, mint a megismerési készségek elsajátításának hipotézise. Mindkét hipotézis szerint az oktatás olyan készségeket nyújt, amelyek magasabb termelékenységet tesznek lehetővé.

Szeretnék egy ettől gyökeresen különböző nézetet ismertetni. Modellemben a felsőoktatás a legkevésbé sem járul hozzá a magasabb gazdasági teljesítményhez; nem segíti elő sem a megismerést, sem a szocializációt. Ezek helyett a felsőoktatás a rostálás eszköze, osztályozza a különböző képességű egyéneket, és ezzel információt ad a munkáltatók számára.

(Talán világossá kell tennem, hogy a saját véleményem nem az, hogy a felsőoktatás csak a rosta szerepét tölti be. Világos, hogy a szakiskolák valódi szakismeretet adnak, amiket a munkapiac elismer, és ugyanígy van ez az egyetemek alapfokú természettudományi kurzusaival is. A bölcsészettudományi kurzusok többségében a dolog már sokkal homályosabb. Mindenesetre jobbnak látom, ha egy idő előtti szintézis helyett kidolgozom a rostálási modell egy kiélezett és egyoldalú formáját. Fontos, hogy megértsük azt is: itt a felsőoktatásnak csak a termeléshez való hozzájárulását tárgyaljuk; most nem tartoznak kérdéskörünkbe az egyébként valóságos és fontos fogyasztási szempontok).

A felsőoktatás rostálási, vagy ahogy nevezni fogom, *szűrési* elmélete különbözik a termelékenységet megnövelő „emberi tőke" elméletétől, de nem teljesen ellentétes vele. A munkáltató számára az értékéről bizonyítvánnyal rendelkező egyén valóban értékesebb, mégpedig a termelési függvény tulajdonságaitól függő mértékben az. Ezért az egyén szempontjából az oktatás szűrő szerepe egyben termelékenységnövelő szerep is; de — amint látni fogjuk — a felsőoktatás társadalmi termelékenysége már nehezebben kezelhető kérdés.

Az oktatás szűrési elmélete része egy a gazdasági rendszerrel és annak egyensúlyával foglalkozó átfogóbb elméletnek. Ez azon a feltételezésen alapszik, hogy a gazdasági szereplők információi rendkívül hiányosak. Ezen belül az, aki a munkás szolgáltatásait megvásárolja igen szegényes elképzelésekkel rendelkezik a munkás termelékenységéről. Ebben a modellben azt teszem fel inkább, hogy a munkáltatónak csupán nagyon jó statisztikai információi vannak, de semmi több. Azaz felteszem, hogy vannak bizonyos információi a munkásról — pl., hogy van-e diplomája vagy nincs —, amelyekhez ő ingyen hozzájuthat. Továbbá általános ismereteiből vagy előző tapasztalataiból tisztában van a termelékenység statisztikai eloszlásával, ha adottak ezek az információk, de nem tud különbséget tenni az olyan egyének termelékenysége között, akikről információi megegyeznek.

Ez a leírás elég jó a munkástoborzás időszakában, de vitatható egy idő után, amikor a munkáltató egyénileg is megismeri munkásait. Kétségtelen, hogy ennek az érvelésnek van alapja, de kevesebb, mint gondolnánk. Az elosztás hatékonyságához végül is az egyes egyének határtermelékenységét kell ismerni. Egy összetett termelési folyamatban viszont a munkáltatónak egyszerűen nincs módja ezek meghatározására. Mindössze annyit tehet, hogy ideális ökonométerként viselkedik, és

kibocsátását kapcsolatba hozza a különböző típusú munkások számával és a többi ráfordítással, amelyektől tanulmányunkban elvonatkoztattunk. Két munkás ugyanolyan, ha róluk a munkáltató információi azonosak.

A kérdés lényegének, annak, hogy a valóságos világban az információk jóval korlátozottabbak, mint ahogy azt feltesszük szokásos egyensúlyi modelljeinkben, hosszú története van a közgazdasági gondolkodás fő áramlatainak kritikái között. Az utóbbi években különösen Herbert A. Simon és követői hangoztatják ezt. Speciálisan a munkatermelékenységgel kapcsolatos információhiány jelentőségére én magam mutattam rá (lásd Arrow [1] és [2]), mégpedig a foglalkoztatásban megmutatkozó faji megkülönböztetésekkel kapcsolatban, ennél általánosabb módon pedig A. Michael Spence harvardi disszertációja tárgyalja e problémát (lásd Spence [7]). A hipotézis, hogy egy bizonytalan világ szereplői pontosan felismerik e bizonytalanság valószínűségeloszlását, meglehetősen szokásos. Például ezt lehet alkalmazni az endogén gazdasági változókkal, például árakkal vagy termelékenységekkel kapcsolatos információhiányra; ekkor az egyensúly feltételévé válik, hogy ez az eloszlás — ha hiszünk benne — valóban olyan magatartást segítsen elő, ami fenntartja az eloszlást.

1. AZ ALAPMODELL

Feltesszük, hogy valamennyi egyénnek három jellemzője van: az egyetem előtti eredményei, az egyetem sikeres elvégzésének valószínűsége, valamint az illető munkatermelékenysége. Ezek feltehetően pozitívan korreláltak, és van egy együttes valószínűségeloszlásuk. A termelők csak annyit tudnak egy egyénről, hogy elvégezte-e az egyetemet vagy nem.

Az egyetemek valójában kettős szűrőként működnek, először a felvételnél, majd a diplomáig tartó úton válogatják, továbbengedik vagy kibuktatják a hallgatókat. A hallgatók felvételekor az egyetemek célja a diplomások várható létszámának maximalizálása. Legyen

$$y = \text{az egyetem előtti eredmény},$$
$$z = \text{termelékenység},$$
$$f(y, z) = \text{a két változó együttes sűrűségfüggvénye}.$$

Az egyetemet az y eredménnyel jelentkezőkkel kapcsolatban csak a diploma megszerzésének feltételes valószínűsége érdekli. Ily módon az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy y a diploma elérésének feltételes valószínűsége, ahol a feltételt az egyetemi fokot megelőző eredmények jelentik, hiszen az egyetem előtti eredmények a felvételnél — és így az egész modellben — csak a sikeres elvégzés feltételes valószínűségéhez fontosak. Ha az egyetem befogadóképessége korlátos, akkor a diplomások számának maximalizálását szem előtt tartó felvétel egy y_0 szint meghatározását jelenti, a jelentkezőt akkor és csak akkor veszik fel, ha

$$y \geqq y_0. \tag{1}$$

Legyen

N_e = a felvettek aránya,

N_g = a diplomát megszerzők aránya.

Mivel y-t valószínűséggé alakítottuk, értéke 0 és 1 között van. A z változóra az egyetlen korlátozás, hogy nemnegatív, és így 0 és $+\infty$ között változhat. A definíciókból

$$g(y) = \int_0^{+\infty} f(y, z)\, dz,$$

az y változó peremsűrűség-függvénye. Továbbá, definíció szerint

$$N_e = \int_{y_0}^{1} \int_0^{+\infty} f(y, z)\, dz\, dy = \int_{y_0}^{1} g(y)\, dy = \boldsymbol{P}(y \geqq y_0), \tag{2}$$

$$N_g = \int_{y_0}^{1} \int_0^{+\infty} yf(y, z)\, dz\, dy = \int_{y_0}^{1} yg(y)\, dy = \tag{3}$$

$$= \boldsymbol{E}(y|y \geqq y_0)\boldsymbol{P}(y \geqq y_0) = \bar{y}_e \boldsymbol{P}(y \geqq y_0),$$

ahol

$$\bar{y}_e = \boldsymbol{E}(y|y \geqq y_0) \tag{4}$$

a sikeres végzés valószínűsége egy véletlenszerűen kiválasztott elsőéves esetében.

A termelékenység részletesebb értelmezését még nem adtuk meg. Két alternatív értelmezést használunk majd, de bármelyiket is választjuk, számunkra az egyéni termelékenységek megfelelő összege a teljes kibocsátás lesz. Ilyenkor az összes egyénre vonatkozó átlagtermelékenység

$$\bar{z} = \int_0^{1} \int_0^{+\infty} zf(y, z)\, dz\, dy = \boldsymbol{E}(z), \tag{5}$$

és az egységnyi munkaerőre jutó diplomások teljes terméke

$$Z_g = \int_{y_0}^{1} \int_0^{+\infty} zyf(y, z)\, dz\, dy = \int_{y_0}^{1} y\boldsymbol{E}(z|y)g(y)\, dy = \tag{6}$$

$$= \boldsymbol{E}(zy|y \geqq y_0)\boldsymbol{P}(y \geqq y_0).$$

Milyen feltételek között ad valamiféle információt az egyetemi szűrés? A (6)-ból és a (3)-ból egy diplomás várható termelékenysége

$$\bar{z}_g = Z_g/N_g = \boldsymbol{E}(zy|y \geqq y_0)/\boldsymbol{E}(y|y \geqq y_0). \tag{7}$$

Az egyetemi végzettségnek akkor van bizonyos (pozitív) információs tartalma, ha egy véletlenszerűen kiválasztott diplomás termelékenysége meghaladja a népesség

egy véletlenszerűen kiválasztott tagjának termelékenységét, azaz, ha

$$\bar{z}_g > \boldsymbol{E}(z). \tag{8}$$

A felvételi rendszer létezése egy további kérdést vet fel: A felvétel során vagy pedig az egyetemi évek alatt történik e a rostálás? E kérdés eldöntése végül is fontos gazdaságossági ügy, hiszen a felvételi rendszer jóval olcsóbb. Első megközelítésben feltehetjük, hogy semmibe nem kerül. Ezek után a felvételi rendszernek akkor van információs tartalma, ha

$$\boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0) > \boldsymbol{E}(z), \tag{9}$$

és az egyetemi végzettség akkor jelent további információt a puszta felvétellel szemben, ha

$$\bar{z}_g > \boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0). \tag{10}$$

Mivel

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0)\boldsymbol{P}(y \geqq y_0) + \boldsymbol{E}(z|y < y_0)\boldsymbol{P}(y < y_0),$$

azért

$$\boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0) - \boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{P}(y < y_0)[\boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0) - \boldsymbol{E}(z|y < y_0)], \tag{11}$$

és így, ha a felvettek várható termelékenysége nagyobb, mint az elutasítottaké, akkor a felvételi rendszernek van előrejelző értéke.

$$\bar{z}_g - \boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0) = \frac{\boldsymbol{E}(zy|y \geqq y_0) - \boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0)\boldsymbol{E}(y|y \geqq y_0)}{\boldsymbol{E}(y|y \geqq y_0)} = \tag{12}$$

$$= \frac{\sigma_{yz|y \geqq y_0}}{\boldsymbol{E}(y|y \geqq y_0)},$$

ahol fölhasználtuk a (7) összefüggést, és $\sigma_{yz|y \geqq y_0}$ az y és z (az egyetemi felvételre nézve) feltételes kovarianciája. Így a felsőoktatás a felvételen túl is információt hordoz a termelékenységről, ha a felvettek körében a termelékenység és az egyetem elvégzése között pozitív a korreláció.

Könnyű belátni, hogy mind a (9), mind a (10) fennáll, ha igaz a következő:

Pozitív rostálási feltétel: $\boldsymbol{E}(z|y)$ az y növekvő függvénye.

E feltevés mellett nyilvánvalóan igaz, hogy

$$\boldsymbol{E}(z|y \geqq y_0) > \boldsymbol{E}(z|y_0) > \boldsymbol{E}(z|y < y_0),$$

ezért (11)-ből következik (9).

Ezenfelül, bármit is teszünk fel az y értékkészletéről, y és z kovarianciája definíció szerint megegyezik az y és $\boldsymbol{E}(z|y)$ közötti kovarianciával. De egy tetszőleges tartomány feletti tetszőleges valószínűségi változó és annak növekvő függvénye közötti kovariancia bizonyosan pozitív, ezért, (12)-ből következően, bizonyosan igaz lesz a (10) összefüggés.

Az egyetemet végzettek termelékenységi fölénye a népesség átlagos tagjához képest a (11) és (12) összeadásával kapható meg.

2. AZ EGYETEMI ROSTÁLÁS TÁRSADALMI ÉRTÉKE: AZ EGYTÉNYEZŐS ESET

Ha az egyetemnek van is pozitív információs értéke, az a társadalom számára nem feltétlenül értékes. A szűrési modell így az emberi tőke modelljéhez képest merőben más következtetésekhez vezet; mert amint látni fogjuk, a társadalmi és az egyéni információs igények között nagyon könnyen lehet eltérés.

Tekintsük a termelés legegyszerűbb modelljét; az egyének tökéletesen helyettesítik egymást a termelésben, a helyettesítés arányait termelékenységük adja meg. Ekkor a termelékenységre vonatkozó információknak nincs társadalmi értéke. A társadalom teljes kibocsátása $E(z)=\bar{z}$ lesz (a munkaerő szerint normálva); több termelő egyén többet fog termelni, akár tudjuk, hogy ki kicsoda, akár nem. (Az ösztönzési kérdésektől itt elvonatkoztatok.) Egy versenyre berendezkedett világot feltételezve, az egyetemi diplomának a legjobb képességűek számára mégiscsak lesz egyéni értéke. Ekkor ugyanis az egyén bérként megkapja termékének — a munkáltató információinak megfelelő — feltételes várható értékét. Tegyük fel, hogy az egyén sem ismeri jobban tanulmányai sikeres befejezésének kilátásait, mint az egyetem. Tegyük fel továbbá, hogy bárki egyetemre kerülhet, ha a c költséget megfizeti. (Mivel az oktatás is fogyasztási jószág, a c költséget itt úgy értelmezzük empirikusan, mint a fogyasztási értéke feletti költségeket.) Tegyük fel, hogy a kiinduló helyzetben senki sem iratkozik be az egyetemre. Azután lesz néhány egyetemista; ha ők jól választották ki saját magukat, akkor termelékenységük várható értéke, feltéve a sikeres befejezést, nagyobb, mint a mindenkire kiterjedő átlag, $\bar{z}$. Világos, hogy ha ez elég nagy, és ha a sikeres végzés valószínűsége is elég nagy, akkor kifizetődő a költségek vállalása. Társadalmilag viszont az ilyen költségek egyszerűen pazarlások.

Egy részletes elemzés valóban megmutatja, hogy ha teljesülnek bizonyos feltevések az információkra, akkor az egyetemek betiltásával mindenki nyerne. (A következő gondolatmenet speciális esete Spence érvelésének.) Az egyensúlyt tanulmányozzuk. Egyesek beiratkoznak az egyetemre, mások nem. A munkáltatók ismerik a diplomások és a nem diplomások várható termelékenységét. (Feltesszük, hogy a munkáltató nem tesz különbséget azok között, akik kudarcot vallottak az egyetemen, és azok között, akik be sem iratkoztak oda; ha valóságosnak tartanánk, könnyen bevezethetnénk ezt a megkülönböztetést.) Feltételezzük továbbá, hogy a potenciális elsőévesek ismerik a diploma megszerzésének általános valószínűségét, de nem tudják a saját addigi eredményeikhez tartozó feltételes valószínűségét. Az egyetemek ismerik ez utóbbi feltételes valószínűségét is. Amint az előbb, most is van y_0 kritikus szint. Mégpedig olyan, hogy az egyének akkor és csak akkor kerülnek be az egyetemre, ha $y \geqq y_0$. (A kritikus szintet most a belépési igény és nem a férőhelyek

korlátozottsága szabja meg, mint az előzőekben.) A munkáltatók ekkor $\bar{z}_g = \bar{z}_g(y_0)$ bért fizetnek a diplomásoknak, amint azt a (7)-ben definiáltuk. Legyen $\bar{z}_n(y_0)$ a nem diplomások várható termelékenysége. Ekkor

$$\bar{z} = \bar{z}_g(y_0) N_g + \bar{z}_n(y_0)(1 - N_g); \tag{13}$$

N_g, amint azt a (3)-ban definiáltuk, természetesen szintén y_0 függvénye.

Egy, az egyetemre bekerülő fiatal $\bar{y}_e$ valószínűséggel fogja elvégezni az egyetemet, kudarcának valószínűsége pedig $1 - \bar{y}_e$. A c költséget mindenképp vállalja, számára tehát a tanulás várható hozama

$$\bar{z}_g(y_e) + \bar{z}_n(1 - \bar{y}_e) - c.$$

Ha nem megy egyetemre, biztosan megkapja a $\bar{z}_n$ jövedelmet. Ha a szereplők nem idegenkednek a kockázattól, akkor az egyensúly megkívánja, hogy a két jövedelem egyenlő legyen. Ugyanis, ha az egyetemre pályázók várható jövedelme lenne a nagyobb, akkor az y_0-nál csak valamivel rosszabb eredményűek is kifizetődőnek találnák a továbbtanulást. Az egyensúlyi feltétel

$$\bar{z}_g \bar{y}_e + \bar{z}_n(1 - \bar{y}_e) - c = \bar{z}_n,$$

vagy egyszerűbb alakra hozva:

$$\bar{y}_e(\bar{z}_g - \bar{z}_n) = c, \tag{14}$$

amiből rögtön látható, hogy $\bar{z}_g > \bar{z}_n$. Ekkor viszont a (13)-ból $\bar{z}_n < \bar{z}$. Ezért egy nem diplomás jövedelme kisebb, mint a kiinduló helyzetben; de mivel a továbbtanulók és a nem diplomások várható jövedelme megegyezik, ezért, legalábbis *ex ante* értelemben, a továbbtanulók sem húztak hasznot.

Ennélfogva az a meglepő lehetőség áll előttünk, hogy ha az egyetem csak szűrő, megszüntetése mindenkinek előnyös. Nemcsakhogy a termelékenység szempontjából nem hoz semmit az egyetem, de az *ex post* jövedelmekben olyan egyenlőtlenségeket teremt, amelyek korábban nem léteztek.

Az elméletben így szoktunk érvelni: az információ azért lehet szűkös, mert társadalmi értéke magasabb egyéni értékénél. Hirshleifer [6] új keletű, fontos tanulmánya, viszont az ellenkező lehetőségre mutat rá. Az az információ, amely a termelés számára haszontalan, a versenyben még előnyhöz juttathat.

Eredményünk természetesen a korlátlan beiratkozástól függ. Ha a felvétel valamilyen módon korlátozott, akkor a (14) egyenlőség egyenlőtlenséggé válik, és az egyetemre kerülők átlagban előnyhöz juthatnak. Az egyetemről kirekedtek mindenképpen veszítenek, és számukra kifizetődővé válna a pályázók megvesztegetése: álljanak el szándékuktól. Ettől viszont a jövedelmi egyenlőség tovább károsul.

William Brainard felhívta a figyelmemet arra, hogy ezek az erőteljes eredmények függnek attól a feltevéstől, hogy a potenciális pályázó nem ismeri az egyetem sikeres elvégzésének saját korábbi eredményeitől függő feltételes valószínűségét, hanem csak a felvétel tényéhez kapcsolt feltételes valószínűségről van tudomása. Ha az erősebb

információs feltétel állna fenn, az egyetemet megelőzően y eredményű egyén számára az egyetem elvégzése várhatóan

$$\bar{z}_g y+\bar{z}_n(1-y)-c=(\bar{z}_g-\bar{z}_n)y+\bar{z}_n-c \tag{15}$$

jövedelmet hoz, és ezért az egyensúlyt e jövedelem és z_n egyenlőségével érjük el, annál a *marginális* személynél, akire $y=y_0$.
Tehát a (14) helyébe

$$y_0(\bar{z}_g-\bar{z}_n)=c \tag{16}$$

lép. Igaz marad, hogy $\bar{z}_g>\bar{z}_n$ és ezért $\bar{z}>\bar{z}_n$, így a nem diplomások rosszabb helyzetben vannak annál, amiben a felsőoktatás nélküli esetben lennének. Azon egyének számára azonban, akiknek elég jó az eredményük, azaz elég magas az y értékük, a (15)-ben levő várható jövedelem legalább $\bar{z}$-vel, az egyetemi szűrő nélküli eset várható jövedelmével egyenlő. Ha y_1 a legkisebb az ilyen y értékek között, akkor

$$(\bar{z}_g-\bar{z}_n)y_1+\bar{z}_n=\bar{z}+c.$$

Ha ebből az egyenlőségből kivonjuk a (13)-at, azt látjuk, hogy

$$(\bar{z}_g-\bar{z}_n)(y_1-N_g)=c,$$

és a (16)-tal végigosztva adódik:

$$y_1=N_g+y_0.$$

Ha nincsenek y_1-nél nagyobb y értékek, akkor igaz marad, hogy az egyetem bezárásával mindenki jól jár a versenyegyensúlyi helyzethez képest. Bárhogy legyen is, a lényeg változatlan: az egyetem eltörlésének nettó társadalmi haszna pozitív, és azzal, a jövedelemeket alkalmasan újraelosztva, mindenki nyer.

(Úgy tűnik, nehéz összeegyeztetni e kijelentést azzal az általános érzésünkkel, hogy az egyetemi oktatás nem kielégítő. Én, természetes módon, elvonatkoztattam a tanulmányihitel-keretektől, amelyek pedig a leghathatósabb ellenirányú eszközök. Az az érzésem, hogy olyan időszak közeledik, amelyben a felsőoktatás állami támogatása és a jobb hitellehetőségek meghaladottá teszik a tanulmányi hitelek fennálló korlátait.)

3. A ROSTÁLÁS TÁRSADALMI ÉRTÉKE: A KÉTTÉNYEZŐS MODELL

A felsőoktatás szűrő szerepének jobb megértéséhez bonyolultabb termelési függvényeket kell megvizsgálnunk, amelyek tartalmaznak egymást kiegészítő munkafajtákat. Ekkor a felsőoktatás jelentős szerepet játszik a dolgozók típusok szerinti osztályozásában. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy két munkafajta van. Az 1. fajta munkából mindenki képes egységnyit kifejteni, és ezt a tényt mindenki

tudja is. Szükség van azonban 2. fajta munkára is, amiből az egyes egyének különböző mennyiség kifejtésére képesek. Ebben a modellben z a hatékonyságegységekben mért 2. típusú munka kínálata lesz. A különböző munkafajták egymást kiegészítő jellegének hangsúlyozására feltételezzük, hogy a termeléshez a kétfajta munka rögzített aránya szükséges (mindig szem előtt tartva, hogy a 2. típust hatékonyságegységekben mérjük). Az egységek alkalmas megválasztásával az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy egységnyi termék termeléséhez mindkét munkafajtából egy egységre van szükség.

Ebben a modellben a szűrés nem felesleges többé. Tegyük fel, hogy az emberek két osztályba, mondjuk A-ba és B-be tartoznak, és $\bar{z}_A$, illetve $\bar{z}_B$ a várható termelékenységük, $\bar{z}_A > \bar{z}_B$ (emlékezzünk rá, hogy itt a „termelékenység" a 2. fajta munka hatékonyságegységeinek kínálatát jelenti). Ez esetben nyilvánvalóan sohasem lehet optimális az, ha egyidejűleg végeznek az A osztálybeli egyének 1. típusú munkát, és a B osztálybeli egyének 2. típusú munkát. Tegyük fel ugyanis, hogy így van. A hatékonyság megköveteli, hogy a 2. típusú munka z összege megegyezzék az 1. típusú munka mennyiségével. Ezek után az 1. típusú munkát végzők közül távolítsunk el néhány A osztálybelit, és cseréljük el őket ugyanannyi számú, addig 2. típusú munkát végző B osztálybeli dolgozóval. A kiválasztásokat véletlen módon végezük el. Az 1. típus munkásainak száma ezzel nem változik meg, a 2. típus hatékonyságegységeinek várható száma viszont megnő. A kibocsátás még nem nő, mivel az 1. típust kifejtők száma szűk keresztmetszet. Ezután viszont a 2. típusból átirányíthatunk munkásokat az 1. típusba, és így az 1. típust végzők növekedésével a kibocsátás nő, feltéve, hogy az átirányításokkal a 2. típus kínálata nem csökken az 1. típus mennyisége alá.

Ily módon a sikeres szűrés megnövelte a kibocsátást, feltéve persze, hogy a szűrés költsége nem túl magas. Nulla szűrési költség mellett ezt a növekedést könnyen kiszámíthatjuk. Legyen N_A és N_B a két osztályban levő egyének aránya: $N_A + N_B = 1$. Ekkor

$$\bar{z} = N_A \bar{z}_A + N_B \bar{z}_B.$$

Ha nem alkalmaznánk szűrést, az egész népesség N_1 része kapna 1. típusú munkát, és a maradék 2. típusú munkát. Mivel az elosztás véletlenszerű, a 2. típusú munka összkínálata hatékonyságegységekben $(1 - N_1)\bar{z}$. A hatékonyság megkívánja, hogy

$$(1 - N_1)\bar{z} = N_1$$

fennálljon, mindkét oldalt a kibocsátás egységében mérve, így hát a kibocsátás, ha nincs szűrés:

(17) $$N_1 = \bar{z}/(1 + \bar{z}).$$

Mármost egy pillanatra tételezzük fel, hogy a szűrőt primitív módon használják, azaz az A osztály tagjai, és csak ők, valamennyien 2. típusú munkát kapnak. A 2.

típusú munka kínálata ekkor $N_A\bar{z}_A$ és az 1. típusú munkáé N_B. Természetesen ezek nem szükségképpen egyenlőek; és ha nem azok, akkor az elosztás nem hatékony. Tegyük fel először, hogy $N_B<N_A\bar{z}_A$. Ekkor világos, hogy néhány A osztálybeli tagnak 1. típusú munkát kell adni. Vagyis $N_1>N_B$. A hatékonyság nyilvánvalóan megköveteli:

$$(1-N_1)\bar{z}_A = N_1,$$

úgyhogy szűrés és A osztálybeli munkaerő-felesleg mellett a kibocsátás:

$$N_1 = \bar{z}_A/(1+\bar{z}_A). \tag{18}$$

A kibocsátás növekedése a szűrés következtében ekkor

$$\frac{\bar{z}_A}{1+\bar{z}_A}-\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}} = \frac{\bar{z}_A-\bar{z}}{\bar{z}(1+\bar{z}_A)}\cdot\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}},$$

ahol az első tényező megmutatja a kibocsátás növekedésének arányát.

Ha az A osztály munkaereje nem elég a 2. típusú munka elvégzésére, $N_B>N_A\bar{z}_A$, akkor az optimális elosztás azt követeli, hogy oda irányítsuk az egész A osztályt, és ezenkívül a B osztályból is annyit, hogy a kétfajta munka kínálata egyenlő legyen.

$$N_A\bar{z}_A+(N_B-N_1)\bar{z}_B = N_1,$$

ezzel a szűrés és a szűkös mennyiségű A osztálybeli munka mellett a kibocsátás:

$$N_1 = \bar{z}/(1+\bar{z}_B), \tag{19}$$

és a kibocsátás növekménye:

$$\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}_B}-\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_B}{1+\bar{z}_B}\cdot\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}}.$$

Azonosítsuk most az A és B általános osztályokat a diplomásokkal és a nem diplomásokkal. Ezzel bemutattuk, hogy az egyetemi oktatás, ha ingyenes (amely esetben mindenki egyetemre megy, és a továbbjutás, illetve a kudarc jelent rostát), kifizetődő, és a folytonosságból adódóan, ha c eléggé alacsony, akkor is kifizetődő. Tegyük fel, hogy optimum esetén $N_g\bar{z}_g>1-N_g$. Ekkor a kibocsátást a (18) adja meg, csak ki kell belőle vonni az oktatás költségét. Ha c-t a kibocsátás egységében mérjük, akkor a költség $cP(y\geqq y_0)$, ahol y_0 a felvételi követelmény. Tehát adott y_0 esetén a társadalom nettó kibocsátása:

$$[\bar{z}_g/(1+\bar{z}_g)]-cP(y\geqq y_0).$$

Megmutatható viszont, hogy y_0 növekedése a $\bar{z}_g$ növekedéséhez vezet, és ezért növeli a $\bar{z}_g/(1+\bar{z}_g)$ kifejezést is, a $P(y\geqq y_0)$ valószínűséget pedig csökkenti; ezért egy ilyen elosztás nem lehet optimális. Ellentmondásra jutottunk.

Annak belátásához, hogy y_0 növelése növelni fogja $\bar{z}_g$-t, differenciáljuk logaritmikusan a (7) összefüggést y_0 szerint.

$$\frac{1}{\bar{z}_g}\frac{d\bar{z}_g}{dy_0} = \frac{1}{Z_g}\frac{dZ_g}{dy_0} - \frac{1}{N_g}\frac{dN_g}{dy_0} =$$

$$= \frac{-y_0 \boldsymbol{E}(z|y_0)g(y_0)}{Z_g} + \frac{y_0 g(y_0)}{N_g} =$$

$$= [y_0 g(y_0)/Z_g][\bar{z}_g - \boldsymbol{E}(z|y_0)],$$

a (3) és a (6) felhasználásával. Ez a kifejezés pozitív, ha $\bar{z}_g > \boldsymbol{E}(z|y_0)$; de mivel minden diplomásnak legalább y_0 az egyetem előtti eredménye, ezért a pozitív rostálási feltételből ez utóbbi egyenlőtlenség következik.

Megmutattuk tehát, hogy az optimális mértékű egyetemi oktatásra

$$N_g \bar{z}_g \leqq 1 - N_g. \tag{20}$$

Figyelmet érdemel, hogy a c költség nem lép fel ebben a feltételben, így ez $c=0$ mellett is érvényes. Az ingyenes oktatás korlátozása is előnyös társadalmilag úgy, hogy az a rostálást segítse.

A (20) következtében a társadalom nettó kibocsátását a (19) adja meg, és az optimális mértékű felsőoktatás az y_0 olyan megválasztásával érhető el, ami a (20) korlátozás mellett maximalizálja a

$$[\bar{z}/(1+\bar{z}_n)] - c\boldsymbol{P}(y \geqq y_0) = \boldsymbol{F}(y_0, c) = \boldsymbol{H}(y_0) - c\boldsymbol{P}(y \geqq y_0) \tag{21}$$

értéket.

A maximalizálás deriváltakra vonatkozó feltételeinek teljes kifejtése könnyen megadható, de úgy tűnik, a hasznavehető értelmezéshez nem elég egyszerű. Néhány következtetés levonása mégis hasznos, különösen azoké a feltételeké, amelyekre a (20) valóban megkötés. Amikor a (20) egyenlőség, a szűrő a legsimábban működik, amennyiben minden diplomás 2. típusú munkát kap, és valamennyi nem diplomás 1. típusú munkát. Ebben az esetben azt mondjuk, a szűrő *tökéletes*.

Először megjegyezzük, hogy a (3) és a (6) összefüggésből a

$$\boldsymbol{G}(y_0) = N_g \bar{z}_g + N_g = Z_g + N_g = \int_0^{+\infty} \int_{y_0}^{1} y(1+z) f(y, z)\, dy\, dz$$

függvény nyilvánvalóan szigorúan monoton csökkenő függvénye y_0-nak bármely pozitív sűrűségű tartományban. Így a

$$\boldsymbol{G}(y_0^*) = 1 \tag{22}$$

egyenletnek egyértelmű megoldása van, és a (20) egyenlőtlenség a $\boldsymbol{G}(y_0) \leqq 1$, vagy az

$$y_0 \geqq y_0^* \tag{23}$$

alakban írható.

A $\bar{z}_g$ és $\bar{z}_n$ változók az y_0 függvényei; értékeik $y_0=y_0^*$ esetén: $\bar{z}_g^*$ és $\bar{z}_n^*$. A csillagos változók jellemzik a tökéletes szűrőt.

Továbbmenve megjegyezzük, hogy az az y_0 érték, amely maximalizálja a (21)-et a (20) vagy a vele ekvivalens (23) feltétel mellett, c-nek monoton növekvő függvénye kell legyen. Tulajdonképpen pontosabban kell kimondani ezt az állítást, mert eddig semmit sem mondtunk, amiből a maximum egyértelműsége következnék. Tegyük fel, hogy $c_1<c_2$. Ezután megmutatjuk, hogy $c=c_2$ mellett y_0 valamennyi maximális értéke meghaladja a $c=c_1$ melletti maximális értékeket, kivéve, ha $c=c_1$ esetén y_0^* az egyértelmű maximum. Ekkor lehetséges, hogy y_0^* maximális érték $c=c_2$ mellett is.

Ennek belátásához legyen y_0^1 bármely maximális érték $c=c_1$ esetén, és y_0^2 $c=c_2$ esetén. A (21)-ből

$$F(y_0, c_1)+(c_1-c_2)P(y \geqq y_0) = F(y_0, c_2).$$

A maximum definíciójából

$$F(y_0^1, c_1) \geqq F(y_0^2, c_1).$$

Ehhez az egyenlőtlenséghez adjuk hozzá a

$$(c_1-c_2)P(y \geqq y_0^1) = (c_1-c_2)P(y \geqq y_0^2)+(c_1-c_2)[P(y \geqq y_0^1)-P(y \geqq y_0^2)]$$

azonosságot. Ezzel

$$F(y_0^1, c_2) \geqq$$

$$\geqq F(y_0^2, c_2)+(c_1-c_2)[P(y \geqq y_0^1)-P(y \geqq y_0^2)] \geqq$$

$$\geqq F(y_0^1, c_2)+(c_1-c_2)[P(y \geqq y_0^1)-P(y \geqq y_0^2),$$

annak a ténynek a felhasználásával, hogy y_0^2 maximalizálja $F(y_0, c_2)$ értékét a (23) tartományon. Ezért

$$(c_1-c_2)[P(y \geqq y_0^1)-P(y \geqq y_0^2)] \leqq 0,$$

vagy, mivel $c_1<c_2$

$$P(y \geqq y_0^1) \geqq P(y \geqq y_0^2),$$

ami csak akkor lehetséges, ha $y_0^2=y_0^1$. Azaz, ha az oktatás költsége emelkedik, a felvétel bármelyik optimális szintje legalább olyan magas, mint a költségemelés előtti optimális szint.

Mikor állhat fenn az $y_0^1=y_0^2$ egyenlőség? Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy y_0^1 optimális $c=c_1$ és $c=c_2$ esetén. Tegyük fel, hogy $y_0^1>y_0^*$. Ekkor a (23) nem jelent megkötést, úgyhogy $\partial F/\partial y_0=0$ $y=y_0^1$ esetén a c mindkét értéke mellett. Ugyanakkor

$$dP(y \geqq y_0)/dy_0 = -g(y_0),$$

és a (21)-ből

$$\frac{\partial F}{\partial y_0} = H'(y_0)+cg(y_0),$$

ezért, ha y_0^1 a c két különböző szintjére optimális, és $y_0^1 > y_0^*$, azt kapnánk, hogy

$$H'(y_0^1) + c_1 g(y_0^1) = 0,$$

$$H'(y_0^1) + c_2 g(y_0^1) = 0,$$

ami lehetetlen, ha $g(y_0) > 0$, amit feltehetünk. Ily módon az $y_0^1 = y_0^2$ egyenlőség csak $y_0^1 = y_0^*$ esetén lehet igaz.

Az érvelés befejezéséhez tegyük fel, hogy $c = c_1$ mellett y_0^* optimális, de van egy másik optimális érték is, mondjuk $y_0 = y_0'$. Ekkor viszont, amint azt megmutattuk, $y_0^2 \geqq y_0' > y_0^*$ áll fenn minden olyan y_0 értékre, amelyik $c = c_2$ esetén optimális. Így a $c = c_1$ és $c = c_2$ mellett csak akkor lehet közös optimális érték, ha y_0^* az alacsonyabb költségre egyértelmű optimális felvételi követelmény.

Levonhatjuk a következtetést: a tökéletes szűrő, ha egyáltalán optimális, akkor csak egy, a $c = 0$ értéknél kezdődő intervallumon az. Ha valamely c esetén y_0 nem egyértelmű optimális érték, akkor a nagyobb c értékek mellett sem lehet optimális.

Az természetesen világos, hogy y_0^* nem lehet optimális valamennyi c mellett. Mert mi történik, ha az y_0 értéket a felső határáig emeljük, ami 1; ez a szűrés nélküli helyzet elérését jelenti, amelyben nincs felsőoktatás. Ebben az esetben $\bar{z}_n \to \bar{z}$, míg $P(y \geqq y_0)$ a nullához tart, így a nettó kibocsátás a $\bar{z}/(1+\bar{z})$ értékhez tart, mint azt a (17)-ben láttuk. Másrészt, ha c összes értékénél a tökéletes szűrőt alkalmaznánk, a (21)-ből látható, hogy a nettó kibocsátás előbb-utóbb e szint alá esne (végül negatívvá, és így keresztülvihetetlenné válna). Világos, hogy a tökéletes szűrő nem lehet optimális, ha rosszabb eredményt ad, mint a szűrés nélküli helyzet. Ezért az a c intervallum, amelyen a tökéletes szűrő optimális, ha létezik, felülről korlátos.

Meg kell nézni, hogy egyáltalán van-e az oktatási költségeknek olyan intervalluma, amelyen a tökéletes szűrő optimális. Ezeknek az intervallumoknak a létezését valójában csak egy további, habár természetes feltevés mellett tudjuk bebizonyítani. Vegyük figyelembe, hogy $F(y_0, 0) = H(y_0)$. Ha $H'(y_0) < 0$ igaz lenne valamennyi y_0 esetén, akkor az ingyenes oktatásnál az egyetlen optimális felvételi követelmény nyilván az y_0 lehető legkisebb értéke lenne, azaz ekkor $y_0 = y_0^*$. Mi van, ha c kicsit nagyobb 0-nál? Meg fogom mutatni, hogy léteznie kell a c értékek egy intervallumának, amelyre y_0 egyértelmű optimum.

Tegyük fel ugyanis, hogy nem így van; ekkor meg tudjuk adni a tetszőlegesen kicsi c értékek olyan $\{c^\nu\}$ sorozatát, hogy $c = c^\nu$ értékhez van egy optimális $y_0 = y_0^\nu > y_0^*$. Az optimum definíciója szerint

$$F(y_0^\nu, c^\nu) \geqq F(y_0^*, c^\nu) \quad \text{valamennyi } \nu\text{-re.}$$

Az $\{y_0^\nu\}$ sorozatnak vagy van egy határértéke $y_0^{**} > y_0^*$, vagy $y_0^\nu \to y_0^*$. Az első esetben a folytonosság miatt azt találnánk, hogy $F(y_0^{**}, 0) \geqq F(y_0^*, 0)$, ami ellentmondásban van azzal a ténnyel, hogy az y_0^* $c = 0$ mellett egyértelmű optimum. Ezek után:

$$\frac{F(y_0^\nu, c^\nu) - F(y_0^*, c^\nu)}{y_0^\nu - y_0} \geqq 0, \quad y_0^\nu \to y_0^*. \tag{24}$$

A (21)-ből

$$\frac{F(y_0^r, c^v)-F(y_0^*, c^v)}{y_0^v-y_0^*} = \frac{H(y_0^v)-H(y_0^*)}{y_0^v-y_0^*} - c^v \frac{P(y \geqq y_0^v)-P(y \geqq y_0^*)}{y_0^v-y_0^*}.$$

A differenciálhányados definíciója és néhány előbbiekben tett megjegyzés következtében tudjuk, hogy ha v tart a $+\infty$-hez, akkor

$$\frac{H(y_0^v)-H(y_0^*)}{y_0^v-y_0^*} \to H'(y_0^*), \quad c^v \to 0,$$

$$\frac{P(y \geqq y_0^v)-P(y \geqq y_0^*)}{y_0^v-y_0^*} \to -g(y_0^*);$$

így

$$\frac{F(y_0^v, c^v)-F(y_0^*, c^v)}{y_0^v-y_0^*} \to H'(y_0^*),$$

és a (24)-ből $H'(y_0^*) \geqq 0$, ami ellentmondásban van azzal a feltevéssel, hogy $H'(y_0)<0$ valamennyi y_0 értékre.

Tehát a $H'(y_0)<0$ feltevésből következik egy olyan $c=c_1>0$ költség létezése, hogy $0 \leqq c \leqq c_1$ esetén a tökéletes szűrő optimális, és c nagyobb értékeire nem az. Nem maradt más hátra, mint a $H'(y_0)<0$ feltétel kifejtése. A (21)-ből világos, hogy ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$\frac{d\bar{z}_n}{dy_0} > 0.$$

Mint azt a (13)-ban láttuk, $N_g \bar{z}_g + (1-N_g)\bar{z}_n = \bar{z}$ valamennyi y_0-nál. A (7)-ből és a (6)-ból

$$N_g \bar{z}_g = Z_g,$$

és

$$\frac{dZ_g}{dy_0} = -y_0 \int_0^{+\infty} z f(y_0, z)\, dz.$$

Ha a (13)-at az y_0 szerint differenciáljuk, néhány átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$(1-N_g)\left(\frac{d\bar{z}_n}{dy_0}\right) = \bar{z}_n\left(\frac{dN_g}{dy_0}\right) - \left(\frac{dz_g}{dy_0}\right) =$$

$$= y_0 \int_0^{+\infty} z f(y_0, z)\, dz - y_0 \bar{z}_n \int_0^{+\infty} f(y_0, z)\, dz =$$

$$= y_0 \int_0^{+\infty} f(y_0, z)\, dz [E(z|y_0) - \bar{z}_n],$$

a (3) segítségével. Ezért $H'(y_0)<0$ akkor és csak akkor, ha

$$E(z|y_0) > \bar{z}_n. \tag{25}$$

Ez kimondja, hogy bármely adott felvételi követelmény mellett azoknak az átlagtermelékenysége, akik éppen csak hogy bejutottak az egyetemre meghaladja a nem diplomások átlagtermelékenységét. Vegyük észre, hogy ez a feltevés egy kicsit túl erős, mivel azok között, akiknek nincs diplomájuk, vannak olyanok is, akik a felvétel előtti eredményük szerint y_0-nál nagyobb valószínűséggel sikerrel jutnának túl az egyetemen. Valóban, a (25) nemigen tartható fenn $y_0=0$ esetén; mert akkor $\bar{z}_n$ a kudarcot vallók átlagtermelékenysége, ha mindenki bejut az egyetemre, míg $E(z|y_0)$ azon alcsoport átlagtermelékenysége, akiknek kibukása tökéletesen előreláthatő volt. Ugyanilyen okból bizonyosan elvárhatnánk a (25) teljesülését, ha $y_0=1$. Ebben az esetben egyáltalán nincs szűrés, azaz nincs felsőoktatás, így $\bar{z}_n=\bar{z}$; és biztosnak vehetnénk, hogy azoknak a várható termelékenysége, akik — előző eredményeik alapján — felvételük esetén biztosan el is végeznék az egyetemet, magasabb lenne, mint a népesség átlagáé. Ezért feltehetjük, hogy elég magas y_0 esetén a (25) teljesül; nevezetesen feltesszük, hogy $y_0 \geqq y_0^*$ esetén teljesül, és ez minden, ami szükséges.

Okoskodásunkat így a következővel tudjuk lezárni: Ha a (25) teljesül olyan y_0 felvételi követelményekre, amelyek nem kisebbek a tökéletes szűrő szintjénél, akkor létezik egy olyan $c_1>0$ költség, hogy a tökéletes szűrő egyértelműen optimális a $0 \leqq c \leqq c_1$ oktatási költségek mellett, de ennél magasabb költségnél nem az. Ha a (25) nem áll fenn, vagy ugyanez áll, vagy a tökéletes szűrő sehol sem optimális. Az olyan költségszintekre, amelyeknél a tökéletes szűrő nem optimális, a felvételi követelmény mindenesetre az oktatási költségekkel együtt nő, és a diplomások száma kisebb, mint a 2. típusú munka mennyisége. Kellően magas költségnél a felsőoktatás eltörlése az optimális.

4. VERSENYEGYENSÚLY ROSTÁLÁSSAL: A KÉTTÉNYEZŐS MODELL

Ahogy az egytényezős modellben, itt is fontos kérdés, hogy a piaci verseny révén milyen mértékben érhető el az optimális, vagy legalábbis a kielégítő mértékű felsőoktatás. Továbbra is fennáll az eltérés a szűrés egyéni és társadalmi hasznossága között, de, mint láttuk, az már nem, hogy a felsőoktatás társadalmilag optimális szintje nulla.

Most a következőt fogjuk belátni: Ha a tökéletes szűrő optimális, akkor az elérhető piaci verseny révén, ahol is mindenki részesül egyetemi oktatásban, aki hajlandó megfizetni annak költségeit. A tökéletes szűrő magasabb költségszinteken is megmarad versenyegyensúlyi elosztásnak, egészen addig a szintig, ahol már min-

denki rosszabb helyzetbe kerülne annál, amiben szűrés nélkül lenne. Az ennél is magasabb költségszinteken a versenyegyensúlyt többé nem a tökéletes szűrő adja, hanem egy olyan szűrő, amely esetén a diplomások száma kisebb lesz, mint a 2. típusú munkáé. A korábban tett információs feltételek mellett itt az is igaz marad, hogy az egyensúlyi elosztással a szűrés nélküli helyzethez képest mindenki rosszabbul jár.

Legyen a kéttényezős modellben w_1 az 1. típusú munka ára, w_2 pedig a 2. típusú munka egy hatékonyságegységének ára. Nyilvánvalóan lesz legalább egy diplomás, aki 2. típusú munkát végez; mivel pedig a diplomásnak, bárhol is alkalmazzák, ugyanazt a bért kell kapnia, ezért keresete $w_2\bar{z}_g$ kell hogy legyen. Hasonlóan, egy nem diplomás keresete w_1. Egyensúly esetén az egyetemre felvettek várható béréből levonva az oktatás költségeit, meg kell kapnunk egy nem diplomás bérét.

$$\bar{y}_e(w_2\bar{z}_g)+(1-\bar{y}_e)w_1-c = w_1,$$

vagy a (14)-gyel analóg módon:

$$\bar{y}_e(w_2\bar{z}_g-w_1) = c. \tag{26}$$

Mivel egy egységnyi 1. típusú munka és egy hatékonyságegységnyi 2. típusú munka együtt hoznak létre egységnyi terméket, a keresetek összege egyenlő a termeléssel:

$$w_1+w_2 = 1. \tag{27}$$

A (26)-ból közvetlenül következik, hogy $w_2\bar{z}_g>w_1$, ha $c>0$. Ebből viszont azt kapjuk, hogy egy diplomás nem végez 1. típusú munkát, hiszen, mivel a piacon valamennyi diplomás egyenrangú, valamennyien $w_2\bar{z}_g$ összeget kereshetnek, és ezért egyikük sem fog 1. típusú munkát végezni w_1 összegért. A diplomások összkínálata a 2. típusú munkából tehát nem haladja meg a 2. típusú munkának az egyensúlyi helyzetben felhasznált mennyiségét.

$$N_g\bar{z}_g \leqq 1-N_g. \tag{28}$$

Ez olyan feltétel, ami a (20)-nak megfelelően, az optimális elosztás esetén is fennáll. Ha e feltétel egyenlőség alakjában teljesül, akkor a nem diplomások nem fogják előnyben részesíteni a 2. típusú munkát (nem fognak 2. típusú munkára törekedni). Mivel az ő jövedelmük egy ilyen munkából $w_2\bar{z}_n$ lenne, ezért ebben az esetben fenn kell hogy álljon $w_1 \geqq w_2\bar{z}_n$. A másik oldalon, ha a (28) szigorú egyenlőtlenség, akkor néhány nem diplomás 2. típusú munkát vállal, így hát $w_2\bar{z}_n=w_1$. Tehát egyensúlyban a következő két eset valamelyikének állnia kell:

$$N_g\bar{z}_g = 1-N_g \quad \text{és} \quad w_1 \geqq w_2\bar{z}_n; \tag{29}$$

$$N_g\bar{z}_g < 1-N_g \quad \text{és} \quad w_1 = w_2\bar{z}_n. \tag{30}$$

Az, hogy melyik teljesül, amint azt most megmutatjuk, a feladat paramétereitől függ; speciálisan, ha a többi paraméter adott, akkor az oktatás költségeitől, c-től.

Tudjuk a (22—23)-ból, hogy, ha a (29) fennáll, akkor $y_0 = y_0^*$. Legyen $\bar{y}_e^*$ az $\bar{y}_e$-nek megfelelő érték, ez mutatja az egyetem elvégzésének valószínűségét a felvettek esetében. Ha a (29) teljesül, a (26) és a (27)-ből adjuk meg w_1-et és w_2-t:

$$w_1 = \frac{\bar{z}_g^* - (c/\bar{y}_e^*)}{1+\bar{z}_g^*}, \tag{31}$$

$$w_2 = \frac{1+(c/\bar{y}_e^*)}{1+\bar{z}_g^*}. \tag{32}$$

A (29) alapján ezek lesznek az egyensúlyi bérek és a tökéletes szűrő lesz az egyensúlyi elosztás, feltéve, hogy $w_1 \geqq w_2 \bar{z}_n^*$. A (31—32) következtében e feltétel felírható így:

$$c \leqq \frac{\bar{y}_e^*(\bar{z}_g^* - \bar{z}_n^*)}{1+\bar{z}_n^*} = c_2. \tag{33}$$

Ezért e tartomány c értékeire a tökéletes szűrő adja a versenyegyensúlyt.

Idézzük emlékezetünkbe, hogy mint az egytényezős modellben, az egyetemre törekvés egyensúlyi állapota megkívánja, hogy az *ex ante* előrelátott jövedelem (az oktatási költségeket levonva) mindenki számára ugyanaz legyen, tehát w_1-gyel legyen egyenlő. Ezek után w_1-et összehasonlíthatjuk a szűrő nélküli eset várt kibocsátásával, a (17)-ben szereplő $\bar{z}/(1+\bar{z})$-vel. Mivel a w_1 a (31) miatt c-ben lineáris, az összehasonlítást elég elvégezni a 0-hoz és a $c = c_2$ értékekhez tartó c-kre, amíg csak a (29)-et kielégítő egyensúlyi állapotokat vizsgáljuk.

Először megjegyezzük, hogy a (26)-ból és a (29), (30) valamelyikéből

$$w_2 \bar{z}_g > w_1 \geqq w_2 \bar{z}_n,$$

ezért

$$\bar{z}_g > \bar{z} > \bar{z}_n, \tag{34}$$

bármely egyensúly esetén. Ekkor, ha c a 0-hoz tart,

$$w_1 \to \frac{\bar{z}_g^*}{1+\bar{z}_g^*} > \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}};$$

amint az várható volt, ha c kis érték, jobb a versenyegyensúly, mint a szűrés nélküli eset. Ugyanakkor, ha $c = c_2$, a (33)-ból a (31)-be helyettesítve, és néhány átalakítást elvégezve úgy találjuk, hogy

$$w_1 = \frac{\bar{z}_n^*}{1+\bar{z}_n^*} < \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}}.$$

Tehát van olyan c_3 költségszint, $0 < c_3 < c_2$, hogy $c < c_3$ esetén, a tökéletes szűrő a szűrés hiányánál jobb, a $c_3 < c \leqq c_2$ esetén viszont rosszabb. Így a tökéletes szűrő, bár versenyegyensúly, a $c \geqq c_3$ esetben nem optimális. Ezért, ha a költségeknek van

olyan intervalluma, amelyen a tökéletes szűrő optimális, ezen intervallum felső határa, c_1 kisebb kell hogy legyen c_3-nál.

Tekintsük mármost azokat az egyensúlyokat, amelyekre a (30) teljesül, és amelyek nem tökéletes szűrők. Az okoskodás ebben az esetben egyszerű: a (27)-ből és a (30) azon feltételéből, hogy $w_1 = w_2 \bar{z}_n$ azonnal következik, hogy

$$w_1 = \frac{\bar{z}_n}{1+\bar{z}_n} < \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}}, \tag{35}$$

és a (34)-ből ismét az igaz, hogy az egyensúlyi szűrő mindenki számára rosszabb, mint a felsőoktatás hiánya.

(Szükség van itt egy technikai megjegyzésre. Ha $c > c_2$ akkor az egyetlen lehetséges versenyegyensúlynak ki kell elégítenie a (30)-at. De valamilyen $c \leqq c_2$ érték esetén előfordulhat, hogy több mint egy egyensúly van; egyikük a tökéletes szűrő lesz, de vannak mások is, amelyek a (30)-at teljesítik. Vegyük észre, hogy ha a (26)-ba behelyettesítjük a (35)-öt és a megfelelő w_2 értéket, $1/(1+\bar{z}_n)$-et, akkor ezt kapjuk:

$$c = \frac{\bar{y}_e(\bar{z}_g - \bar{z}_n)}{1+\bar{z}_n} = A(y_0),$$

ahol $A(y_0)$ egy újabb jelölés. Így tehát minden, az $A(y_0)$ értékkészletébe eső c-re van a (30)-at kielégítő egyensúly úgy, hogy $y_0 \geqq y_0^*$. A (33)-ból $A(y_0^*) = c_2$; így, ha $A(y_0)$ az y_0 növekvő függvénye lenne, az olyan c értékekre, amelyeknél a tökéletes szűrő egyensúly is, nem lenne (30)-at kielégítő egyensúly. Nem tanulmányoztam, hogy ez a monotonitási feltétel ésszerű-e; ha nem, akkor lehetséges, hogy az $A(y_0)$ minimális értéke $y_0 \geqq y_0^*$ mellett — jelöljük ezt $\bar{c}$-vel — kisebb, mint c_2. Ebben az esetben bármely olyan c esetén, ahol $\bar{c} < c < c_2$, az $A(y_0) = c$ egyenletnek lehet egy vagy több megoldása, és így számos versenyegyensúly lesz, egyikük a tökéletes szűrő, a többi nem az.)

5. BEFEJEZŐ MEGJEGYZÉSEK

Befejezésül két megjegyzést kell tennem, bár tárgyalásuk itt csak futólagos lehet. Az első: modellünk és az „emberi tőke" modellek összehasonlítása. Régóta tisztázott kérdés, hogy az „emberi tőke" hozadékának mérőszámait könnyű túlbecsülni oly módon, hogy a képességek különbségeit összekeverik az iskolázottság különbségeivel. Az iskoláztatás hozadékának jobb mérésére vannak kísérletek (lásd például Griliches és Mason [4]; Hause [5]), ezeknél a képességek mérésére külön változót vezettek be. Sajnos az ilyen képességmérőszámok elvileg rosszak. Ezek általában az intelligencia mérői; de a „képesség" helytálló értelme: képesség a javak termelésére, és egyszerűen nincs empirikus indok arra, hogy a termelőképesség és az intelligencia között enyhe korrelációnál többet várjunk. Az intelligenciateszteket a tanul-

mányi előmenetel megjóslására tervezték, és ezt a feladatot megfelelően el is látják. Közvetlenül a termelékenységre irányuló vizsgálatok (például az Egyesült Államok flottájánál) azonban számottevően bizonyítják: az a képesség, hogy a teszteken túljussunk, gyenge kapcsolatban van azzal a képességgel, ami alkalmassá tesz a speciális termelési feladatok teljesítésére. Itt nyilván csak az utóbbi képesség érdekes.

Gondolatmenetünk sajnos egy másik nehéz kérdéshez vezetett: tanulmányom modellje egy olyan változótól függ, amit nem mértünk, és amit nem is lehet mérni, ez pedig a „képesség". Lehet, hogy nincs út, amelyen valaha is elérjük ennek közvetlen mérését; végtére modellünk egyik premisszája éppen az, hogy a munkáltatók nem tudják a képességet közvetlenül mérni, és nincs okunk azt feltételezni, hogy a közgazdászok inkább képesek lennének erre. Még hátra van annak vizsgálata, levonhatók-e ebből az elméletből fontos és ellenőrizhető következtetések azzal kapcsolatban, hogy a képességek nem mérhetőek közvetlen módon.

Visszatérve az egytényezős modellhez, a szűrési modellnek valóban van néhány makroökonómiai szinten megfigyelhető következménye. Kimondja, hogy az egyetemi oktatás erőforrásainak növelése, ha az összes többi változó megszabott, nem hoz pozitív eredményt a nem oktatási szektor kibocsátásában. Ez valóban súlyos következtetés, de felhasználhatóságát időbeli és a nemzetközi összehasonlításban korlátozza, az a feltétel, hogy a képesség statisztikai eloszlásának állandónak kell lennie. Ha a „képességet" kulturális tényezők befolyásolják, akkor nemzetközileg bizonyosan eltérő, és ugyanezt gondolhatjuk az időbeli változásokról is.

Még egy irányban fölöttébb szükséges a modell részletesebb kidolgozása (ami nem jelenti azt, hogy nem igényel sok más vonatkozásban is további munkát). Ez a felsőoktatási szűrő és a munkahelyi szűrő kapcsolata. Ha a munkást már alkalmazták, a munkáltatónak alkalma van közvetlen információkat szerezni róla, amelyekből előbb-utóbb megállapíthatja a termelékenységét. Az ilyen szűrés azonban költséges lehet. Amilyen mértékben a munkáltató rostál, és amilyen jól rostál, a felsőoktatás rosta értéke annyira csökken. A munkáltató csak addig fizet átlagterméket egy meghatározott iskolázottságú csoportnak, míg saját szűrője hatékonnyá nem válik. Ezzel szemben viszont az egyetemisták számának növekedése csökkenést jelent (és jelentett) a nem egyetemista tanulók minőségében (ami nem szükségképpen ugyanaz, mint az egyetemisták minőségének csökkenése). Lehetséges, hogy az egyetemen túljutott tanulók megnövekedett kínálatával és a nem egyetemista tanulók minőségének csökkenésével a többi szűrők elértéktelenednek, és végső fokon nem kifizetődőek. Ez azzal jár, hogy a tömegesebb egyetemi oktatásnak tulajdonítható jövedelem-kiegyenlítődést ellensúlyozhatja a 2. típusú munkára szelektáló más szűrők visszaszorulása. Jelentheti azt például, hogy a 2. típusú munkára való kiválasztás kritériumai beszűkülnek, és ez csorbíthatja mind a hatékonyságot, mind az egyenlőséget.

IRODALOM

[1] *Arrow, Kenneth J.:* Models of Job Discrimination a 2. fejezet. Megjelent az *A. H. Pascal* (szerk.): Racial discrimination in economic Life c. kötetben. D. C. Heath, Lexington, Mass., Toronto — London, 1972.

[2] *Arrow, Kenneth J.:* Some Mathematical Models of Race in the Labor Market. a 6. fejezet. Megjelent az A. H. Pascal (szerk.): Racial Discrimination in Economic Life c. kötetben. D. C. Heath, Lexington, Mass., Toronto—London, 1972.

[3] *Berg, Ivar:* Education and Jobs: the Great Training Robbery. Praeger, New York, 1970.

[4] *Griliches, Zvi—William M. Mason:* Education, Income and Ability. Journal of Political Economy, 1972. 80. évf. 108—138. old.

[5] *Hause, J. C.:* Earnings Profile: Ability and Schooling. Journal of Political Economy, 80. 1972. 108—138. old.

[6] *Hirschleifer, J.,:* The Private and Social Value of Information and the Reward to Inventive Activity. American Economic Review, 1971. 61. évf., 561—574. old.

[7] *Spence, A. Michael:* Market Signalling. (doktori disszertáció), Department of Economics, Harvard University, 1972.

III.

TERMELÉS ÉS TECHNIKAI HALADÁS

Helyettesítés a tőke és a munka között és a gazdasági hatékonyság[*1]

A közgazdasági elmélet számos ágában szükséges valamilyen feltevést tenni arra, hogy a tőke és a munka milyen mértékben helyettesítheti egymást. Mivel e jelenségre nincsenek empirikus alapokon álló általánosítások, az elméleti közgazdászok egyszerű hipotézisekkel éltek, amelyek gyakori ismétlésük következtében széles körben elfogadottá váltak. Jelenleg két ellentétes nézet az uralkodó: az állandó ráfordítási együtthatók Walras—Leontief—Harrod—Domar-féle feltevése,[2] és a Cobb—Douglas függvény, amely a munka és a tőke közötti helyettesítés egységnyi rugalmasságát teszi fel. Matematikai szemszögből a helyettesítési rugalmasság talán legkényelmesebb változatai a nulla és az egy. Az ezekre épített közgazdasági elemzések azonban gyakran túlzottan korlátozott következtetésekre vezetnek.

A helyettesítési feltevés alapvető szerepére a közgazdasági elmélet legkülönbözőbb területeiről hozhatók példák:

a) A Harrod—Domar-féle növekedési modell egyensúlyának instabilitása kritikus módon függ a munka és a tőke közötti helyettesítés kizárásától, mint azt Solow [15], Swan [18] és mások megmutatták.

b) A tényezőellátottság különbözőségének hatása a nemzetközi kereskedelemre függ az egyes termelési függvények alakjától. Ha a gazdaság valamennyi szektorában nulla vagy valamennyiben egy a helyettesítési rugalmasság, ez Samuelson erős feltevéséhez, azaz a tényezőarány szerinti rangsor rögzítettségéhez vezet. A szektorok rugalmasságának különbözősége viszont arra vezet, hogy a tényezőáraktól függően

* (Társszerző: *H. B. Chenery—B. S. Minhas—R. M. Solow*) Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. The Review of Economics and Statistics, Vol. 43. No. 3 1961. 225—250. old.

[1] Ez a tanulmány a „Stanford Project for Quantitative Research in Economic Development" kutatási programjában gyökeredzik. Része a gazdasági szerkezet nemzetközi összehasonlítására alapozott tanulmányok sorozatának. Mind a statisztikai, mind az elméleti elemzéshez lényegesen hozzájárult Hendrik Houthakker. Arrow részvételét az „Office of Naval Research" támogatta, a szerződés száma: 251 (33), a feladat száma: N4047—004.

[2] Helyénvaló megjegyezni, hogy sem Walras, sem Leontief általános egyensúlyelmélete nem tesz fel rögzített arányokat olyan nagy aggregátumokra, mint a tőke és a munka.

a tényezőfelhasználások sorrendje megfordulhat, ami már egész más következményekkel jár a kereskedelemre és a tényezők hozadékára nézve.

c) A termelési tényezők jövedelemrészesedési arányait vizsgálva csábító az egységnyi helyettesítés feltevése, csábít az, hogy az Egyesült Államokra vonatkozóan egyetértsünk a munka részesedési arányának állítólagos állandóságával. Újabb munkák megkérdőjelezik mind a megfigyelt állandóságot, mind az egységnyi rugalmasság feltételezésének szükségességét [9], [17].

Az empirikus tényekre támaszkodva, a termelés különböző fajtáinál minden jel a különböző mértékű helyettesíthetőségre mutat. Egyes szektorokban nagyszámú és hajlékony technológiai változatot találunk, máshol korlátozottak a lehetőségek: az egyöntetű helyettesíthetőség a legvalószínűtlenebb. A rugalmasságok különbségét erősíti meg a tőke—munka arányok közvetlen megfigyelése is, amely egyes szektorokban jóval nagyobb országok közötti szóródást mutat, mint másokban.

Tanulmányunk kiindulópontja az az empirikus megfigyelés, hogy egy adott iparágban az egységnyi munkára jutó hozzáadott érték az országok között a bérszinttel együtt változik. Az I. fejezetben található ennek az összefüggésnek az alátámasztása egy 24 iparágat és 19 országot felölelő vizsgálat alapján. A munka termelékenységének a bérszintre vonatkozó regressziója erősen szignifikáns korrelációt, valamint a regressziós koefficiensekben jelentős szóródást mutat valamennyi iparágban.

Ezek az empirikus eredmények arra késztettek, hogy megkíséreljünk olyan matematikai függvényt nyerni, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: *a*) homogén, *b*) állandó a helyettesítési rugalmasság a tőke és a munka között és *c*) a különböző iparágakban a rugalmasságok különbözőek lehetnek. A II. fejezetben megmutatjuk, hogy létezik pontosan egy általános termelési függvény ezekkel a tulajdonságokkal, és ez speciális esetként magába foglalja a Leontief- és a Cobb—Douglas-függvényt is.[3] A függvénynek három paramétere van, amelyek helyettesítési paraméterként, elosztási paraméterként és hatékonysági paraméterekként azonosíthatók.

E formula érvényességének ellenőrzésére a III. fejezetben megvizsgáljuk a tőke közvetlen felhasználásáról rendelkezésre álló töredékes ismereteket, valamint a regressziós elemzéstől való eltéréseket. Ezek a próbák, jóllehet nem bizonyulnak perdöntőnek, azt a munkahipotézist sugalmazzák, hogy a hatékonyság paramétere országról országra változik, a másik két paraméter azonban az egyes iparágakra jellemző állandó.

Ebben az alakjában az állandó helyettesítési rugalmasságú (CES) termelési függvény számos előre meghatározható különbséget foglal magában az egyes olyan országok termelési-kereskedelmi szerkezete között, amelyekben a tényezők költségarányai eltérőek. Ezek némelyikét megvizsgáljuk a IV. fejezetben, ahol összehasonlítjuk Japán és az Egyesült Államok tényezőfelhasználását és viszonylagos tényezőárait. Az eredmények a gazdaság valamennyi szektorában megmutatják a tőke és a munka

[3] Ezt a függvényt és tulajdonságait Solow és Arrow vezették le, egymástól függetlenül.

közötti helyettesíthetőség mértékét, és alátámasztják a III. fejezetben a változó hatékonyságáról felállított hipotézist is.

Végül az V. fejezetben az Egyesült Államok összes termelésének (a farmok termelését leszámítva) idősoros elemzésére használjuk fel a CES termelési függvényt. Az eredmények az egész gazdaságra egynél szignifikánsan kisebb helyettesítési rugalmasságot mutatnak a tőke és a munka között, ezenkívül további ellenőrzést szolgáltatnak magának a termelési függvénynek az érvényességére.

I. A MUNKARÁFORDÍTÁSOK VÁLTOZÁSA A MUNKAKÖLTSÉGEKTŐL FÜGGŐEN

A nemzetközi összehasonlítások jelentik valószínűleg a legjobban hozzáférhető ismereteket arról, hogy milyen hatással vannak a tényezők árarányai a tényezők felhasználására. A változók megfigyelt sorában a munka és a tőke viszonylagos költségeinek szóródási tartománya itt 30:1, ami sokszoros az egyetlen országban észlelhető időbeli szóródásnak, bármelyik olyan időszakot tekintve, amelyre vannak adataink. A termelési tényezők felhasználásának adatai egy-egy iparágra vagy technológiák egyes csoportjára vonatkoznak, és nem azokra az iparágakra, amelyeket egyetlen ország keresztmetszeti elemzéseinél alkalmazni szoktak. Végül, egymáshoz időben közelálló megfigyeléseket véve, azokról megközelítőleg feltételezhetjük, hogy a technikai tudásnak ugyanazt a szintjét tükrözik, és ez a hipotézis, ha szigorúan véve nem is igaz, itt helytállóbb, mint az idősoros elemzésre alkalmazva.

A) Az adatok

A háború utáni időszakban nagyszámú összehasonlító osztályozást tartalmazó ipari felmerés készült, és ez lehetővé teszi, hogy kihasználjuk az országok összehasonlító elemzésének fent említett potenciális előnyeit. A felhasznált mintát, az összegyűjtött adatokat és a feltárt összefüggéseket elsősorban a felmérések sajátosságai határozzák meg.

A minta országai. A minta azokból az országokból áll, amelyekben megfelelő számú iparágra rendelkezésre állnak a szükséges bér- és kibocsátásadatok. Az országokat, az átlagos bérszinteket és a felmért iparágak számát az 1. táblázatban mutatjuk be. Az adatok különböző évekhez tartoznak 1949 és 1955 között.

Az iparágak. Az „ENSZ Nemzetközi Ipari Osztályozási Szabványa" (United Nations International Standard Industrial Classification) háromjegyű osztályozásának szintjén összegyűjtöttük az adatokat valamennyi iparágra, amelyre elegendő (legalább 10) adat rendelkezésre állt. Az elemzett 24 iparágat a 2. táblázatban soroljuk fel. Egy adott iparágon belül természetesen jelentős különbségek vannak a kibocsátás szerkezetében a különböző jövedelmi szinteken álló országok között. Ezeket a különbségeket nem tudtuk figyelembe venni.

1. táblázat

A MINTÁBAN SZEREPLŐ ORSZÁGOK

Ország	A felmérés éve	Átlagbér[a] (*folyó dollárban*)	Az iparágak száma[b]
1. Egyesült Államok	1954	3841	24
2. Kanada	1954	3226	23
3. Új-Zéland	1955/56	1980	22
4. Ausztrália	1955/56	1926	24
5. Dánia	1954	1455	24
6. Norvégia	1954	1393	22
7. Puerto Rico	1952	1182	17
8. Egyesült Királyság	1951	1059	24
9. Kolumbia	1953	924	24
10. Írország	1953	900	15
11. Mexikó	1951	524	21
12. Argentína	1950	519	24
13. Japán	1953	476	23
14. El Salvador	1951	445	16
15. Brazília	1949	436	10
16. Dél-Rhodesia	1952	384	6
17. Ceylon	1952	261	11
18. India	1953	241	17
19. Irak	1954	213	2

[a] A mintában szereplő iparágak béreinek súlyozatlan átlaga.
[b] Az iparágak adatait a Függelékben adjuk meg.

A munkaráfordítások és munkaköltségek. A munkaráfordításokat „munkásév per 1000 $ hozzáadott érték"-ben mérjük. Ez a termelő munkásokat, a fizetett alkalmazottakat és a dolgozó tulajdonosokat tartalmazza. A munka költségeit az átlagos évi bérfizetéssel mérjük, amelyet úgy számítunk ki, hogy az évi összbért elosztjuk az alkalmazott dolgozók számával. A különböző országokra vonatkozó bérfizetések adatai tartalmazzák a különböző mértékű nem bérjellegű juttatásokat; az ezek közti eltéréseket nem korrigáltuk. A foglalkoztatás adatait nem javítottuk át az évi munkaórák, vagy az életkor és nemek szerinti megoszlás országok közötti különbségeinek megfelelően. A Függelékben megadjuk valamennyi iparág adatait.

A valutaátszámítási kulcsok. Valamennyi helyi valutát a hivatalos valutaátszámítási kulcsoknak megfelelően számítottuk át USA dollárra, illetve, ahol párhuzamos valutaárfolyamok uralkodnak, ott a szabadpiaci kulcsokkal számoltunk. Figyelmen kívül hagytuk, hogy a dollár vásárlóereje a felmérés különböző éveiben más-más volt.

A tőkefelhasználás. A tőke felhasználásáról, valamint hozadékáról csak kevés számú országra és iparágra vannak adatok. Ezért ezeket a kezdeti statisztikai elemzésből kihagytuk, és a III. fejezetben hasznosítottuk, mégpedig a II. fejezetben kidolgozott termelési függvény érvényességének kipróbálására.

B) A regressziós elemzés

A statisztikai elemzésre rendelkezésre álló változók a következők:

V = hozzáadott érték „1000 dollár"-ban

L = munkafelhasználás „munkásév"-ben

W = pénzbér (a teljes munkaköltség osztva L-lel), „dollár per munkásév"-ben.

A regressziós elemzés formuláinak kidolgozásában előzetes feltevésekre támaszkodunk. Ezek érvényességét majd a III. fejezetben vizsgáljuk meg. A feltevések a következők:

1. A termékek és az anyagráfordítások árai nem állnak szisztematikus összefüggésben a bérszinttel.

2. A valutaárfolyamok alá- vagy föléértékelése nincs összefüggésben a bérszinttel.

3. Az átlagos üzemnagyság különbségei nem befolyásolják a termelési tényezők felhasználását.

4. Ugyanazok a technikai lehetőségek állnak valamennyi ország rendelkezésére.

E feltételek mellett az 1000 $ hozzáadott értéket a kibocsátás fizikai tömegének egységeként kezelhetjük az egyes iparágakban. Továbbmenve, az összes országra egyetlen termelési függvényt feltételezünk, ami meghatározott összefüggést von maga után az egységnyi hozzáadott értékre jutó munkafelhasználás és a bérszint között. Mielőtt e függvény lehetséges alakjait részletesen megvizsgálnánk, statisztikailag próbálunk ki két egyszerű összefüggést a három változó között:

$$(1a) \qquad \frac{V}{L} = c + dW + \eta$$

$$(1b) \qquad \log \frac{V}{L} = \log a + b \log W + \varepsilon.$$

Mindkét függvény jól illeszkedik az adatokhoz, a logaritmikus forma valamivel jobb. Az utóbbi regresszió eredményei a *2. táblázatban* találhatók meg.[4] A b kis standard hibáiból és az $\bar{R}^2$ determinációs együttható magas értékéből kétségtelen, hogy az illeszkedés viszonylag jó. A 24 iparágból 20-ban a munkatermelékenység változásának több mint 85%-át magyarázza meg önmagában a bérszint változása.[5]

[4] *J. B. Minasian,* ettől a tanulmánytól függetlenül, számos iparágra (1*b*) alakú függvényt illesztett az Egyesült Államok egyes államainak adataira. Lásd: Elasticities of Substitution and Constant-Output Demand Curves for Labor. Journal of Political Economy 1961. június, 261—270. old. (A levonat korrektúrája alkalmával tett utólagos megjegyzés a szerzők részéről.)

[5] A gazdaság egésze számára a bérszint a munkatermelékenységtől függ, egy adott iparágban azonban az egységnyi kibocsátásra jutó munkafelhasználás viszonylag kis eltérésekkel alkalmazkodik az országban uralkodó bérhez, amelyek függnek az adott iparág nyereségességétől.

2. táblázat

A REGRESSZIÓS ELEMZÉS EREDMÉNYEI[a]

ISIC szám	Iparág	Regressziós egyenletek		Standard hiba	Determinációs koefficiens	*b* szignifikancia próbája	
		log *a*	*b*	S_b	$\bar{R}^2$	szabadságfok	konfidenciaszint arra, hogy *b* különbözik 1-től (%)
202	Tejtermékek	0,419	0,721	0,073	0,921	14	99
203	Zöldség- és gyümölcskonzerv	0,355	0,855	0,075	0,910	12	90
205	Gabona- és malomipar	0,429	0,909	0,096	0,855	14	*
206	Pékáru	0,304	0,900	0,065	0,927	14	80
207	Cukor	0,431	0,781	0,115	0,790	11	90
220	Dohány	0,564	0,753	0,151	0,629	13	80
231	Textil: fonás és szövés	0,296	0,809	0,068	0,892	16	98
232	Kötöttáru	0,270	0,785	0,064	0,915	13	99
250	Fa- és fűrészáru	0,279	0,860	0,066	0,910	16	95
260	Bútor	0,226	0,894	0,042	0,952	14	95
271	Papír és cellulóz	0,478	0,965	0,101	0,858	14	*
280	Nyomdaipar és könyvkiadás	0,284	0,868	0,056	0,940	14	95
291	Bőráru	0,292	0,857	0,062	0,921	12	95
311	Vegyi alapanyagok	0,460	0,831	0,070	0,898	14	95
312	Olajok és zsírok	0,515	0,839	0,090	0,869	12	90
319	Különböző vegyi anyagok	0,483	0,895	0,059	0,938	14	90
331	Agyagáruk	0,273	0,919	0,098	0,878	11	*
332	Üveg	0,285	0,999	0,084	0,921	11	*
333	Kerámia	0,210	0,901	0,044	0,974	10	95
334	Cement	0,560	0,920	0,149	0,770	10	*
341	Vas és acél	0,363	0,811	0,051	0,936	11	99
342	Színesfémek	0,370	1,011	0,120	0,886	8	*
350	Fémáruk	0,301	0,902	0,088	0,897	11	*
370	Elektromos felszerelések	0,344	0,870	0,118	0,804	12	*

[a] A Függelékben megadott adatokból.

* 80 %-os vagy annál magasabb konfidencia szinten nem szignifikáns.

C) A termelési függvény elemzésünkből adódó tulajdonságai

A regressziós elemzés lényeges alapot szolgáltat egy általánosabb termelési függvény levezetéséhez: azt az eredményt, hogy egy logaritmikusan lineáris függvény jól illeszkedik a bérek és a munkafelhasználások adataihoz. A következő fejezet elméleti elemzése ezért ennek feltételezéséből indul majd ki.

A II. fejezetben megmutatjuk, hogy a b koefficiens feltevéseink mellett megegyezik a tőke és a munka közötti helyettesítés rugalmasságával. Ezért érdekes az a kérdés, mennyi azoknak az iparágaknak a száma, ahol a rugalmasság szignifikánsan különbözik 0-tól vagy 1-től, a leggyakrabban feltételezett értékektől. A második hipotézis t próbáját a *2. táblázatban* közöljük. A b értéke valamennyi esetben szignifikánsan különbözik 0-tól, 90%-os megbízhatósági szinten. A 24 iparágból 14-ben szignifikánsan különbözik 1-től, 90%-os vagy annál nagyobb megbízhatósággal. Ezért ezeket a hipotéziseket elvetjük, mint a tőke—munka kombinálási lehetőségeinek helytelen leírásait, és elkezdjük egy olyan termelési függvény levezetését, amely lehetőséget ad iparáganként eltérő helyettesítési rugalmasságokra is.

II. A TERMELÉSI FÜGGVÉNYEK EGY ÚJ OSZTÁLYA

Az I. fejezet megfigyelésekkel szolgált V/L és W összefüggéséről* egy időpontra vonatkozóan számos iparágon belül. Természetes első lépés ez következtetéseink olyan megfogalmazásához, amely az adott tényezőárakra reagáló profitmaximalizáló viselkedésből indul ki. Az állandó volumenhozadék és a kompetitív munkapiac feltevéseiből a termelés szokásos elmélete azt vezeti le, hogyan következik adott termelési függvényből egy meghatározott kapcsolat V/L és W között. Meg fogjuk mutatni, hogy a fordított következtetés is helyes: egy adott kapcsolat V/L és W között meghatározza a neki megfelelő termelési függvényt, mégpedig egyetlen tetszőleges konstans erejéig.

A) Az egységnyi munkára jutó kibocsátás, a reálbérek és a termelési függvény állandó volumenhozadék mellett

Ha a termelési függvény egy adott iparágban $V=F(K, L)$ alakú, és feltesszük, hogy elsőfokú homogén, akkor $V/L=F(K/L, 1)$; és, ha $V/L=y$, $K/L=x$, akkor így írhatjuk fel: $y=f(x)$. Ilyen jelölések mellett a tőke határterméke $f'(x)$, a munkáé pedig $f(x)-xf'(x)$. Legyen w a bérszint a kibocsátás mértékegységében ki-

* Az eredetiben itt és később W helyett w áll, ami nem szerepelt az I. fejezetben [vö. (2)-vel a következő oldalon; *ell. szerk.*]

fejezve. (Azaz a reálbérszint. — *Ell. szerk.*) Ha a munka és a termékek piaca versenypiac, akkor

$$w = f(x) - xf'(x), \tag{2}$$

amely összefüggést lehet invertálni úgy, hogy x-et w függvényeként kapjuk meg, és ebből, mivel $y=f(x)$, monoton növekvő függvényt kapunk y és w között. Megfordítva, tegyük fel, hogy kiindulunk egy megfigyelt összefüggésből az y és w között, mint ahogy valóban tesszük, mondjuk abból, hogy $y=\Phi(w)$. Akkor a (2)-ből látjuk, hogy

$$y = \Phi\left(y - x\frac{dy}{dx}\right), \tag{3}$$

ami differenciálegyenlet $y(x)$-ra. Megoldása:

$$y = f(x; A) \tag{4a}$$

lesz, ahol A integrációs konstans. Visszatérve az eredeti változókhoz a termelési függvények egyparaméteres seregét kapjuk:

$$V = Lf(K/L; A). \tag{4b}$$

Természetesen ahhoz, hogy a (4) termelési függvényként szolgálhasson, mindkét ráfordításnak pozitív határtermelékenységűnek kell lennie és a szokásos csökkenő hozadéknak is érvényesülnie kell, ha változnak a tényezők arányai. Elemi számolással megmutatható, hogy ezek a követelmények egyenértékűek az $f'(x)>0$ és az $f''(x)<0$ követelményekkel. Az utóbbi egyben elégséges feltétele annak is, kogy a (2) invertálható legyen. Geometriailag ezek a feltételek azt mondják, hogy az egységnyi munkára jutó kibocsátás növekvő függvénye az egységnyi munkára jutó tőkének, és hogy a függvény felülről konvex, egyszóval a görbe a szokásos alakú. Az eddigieken kívül megköveteljük még, hogy $x>0$ esetén $f(x)>0$ legyen. Mindezen követelményeknek legalább egy A értékre teljesülniük kell.

A termelési függvények származtatásának ez a módja felfed egy összefüggést a helyettesítés rugalmasságáról, amit az irodalom úgy látszik nem vett észre, bár szoros rokonságban áll Hicks és mások eredményeivel (lásd Allen [2], 373. old.), csak a termék árának kezelésében van egy kis különbség. Legyen s a helyettesítés határaránya K és L között (L határtermékének aránya K határtermékéhez). Ekkor a σ helyettesítési rugalmasság egyszerűen K/L-nek s-re vonatkozó rugalmassága egy izokvant mentén. Állandó volumenhozadék esetén,[6] a mi jelöléseink mellett:

$$\sigma = -\frac{f'(f - xf')}{xff''}. \tag{5}$$

[6] Minderről lásd *Allen* [2] 340—343. old.

Tekintsük most az y és a w közötti összefüggést, ahogy azt a (2) implicit módon meghatározza. Ezt w szerint differenciálva kapjuk, hogy

$$1 = f' \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dw} - xf'' \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dw} - f' \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dw},$$

és mivel $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'}$, következik:

$$\frac{dy}{dw} = -\frac{f'}{xf''}.$$

Ily módon y rugalmassága w szerint a (2)-ből:

$$\frac{w}{y}\frac{dy}{dw} = \frac{f'(f - xf')}{xff''} = \sigma. \tag{6}$$

Tehát, ha V/L és w kapcsolatát a profitmaximalizálás határozza meg egy állandó volumenhozadékú termelési függvény mellett, akkor e kapcsolat görbéjének rugalmassága egyszerűen maga a helyettesítési rugalmasság. Ha feltevéseink igazak, az egységnyi munkára jutó kibocsátásnak és a reálbérnek együttes mozgását megfigyelve információt kapunk a σ-ról is.

Egy másik egyszerű és érdekes összefüggést is megfigyelhetünk az elsőfokú homogén termelési függvényekkel kapcsolatban. Mint láttuk, a tőke határtermelékenysége x-nek, a tőke—munka aránynak csökkenő függvénye, míg a munka határtermelékenysége ilyenkor, természetesen, növekvő. Így, versenypiac esetén, az r bruttó bérleti díj, egységnyi kibocsátásban mérve, a bérszintnek csökkenő függvénye. Részletesebben, az $r = f'(x)$ és a (2) összefüggéseket differenciálva kapjuk, hogy

$$\frac{dr}{dx} = f''(x); \quad \frac{dw}{dx} = f' - xf'' - f' = -xf'',$$

így hát

$$\frac{dr}{dw} = \left(\frac{dr}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dw}{dx}\right) = -\frac{1}{x} = -\frac{L}{K},$$

amiből a tőkehozadék rugalmassága a bérszintre nézve:

$$\frac{w}{r}\frac{dr}{dw} = -\frac{wL}{rK}, \tag{7}$$

tehát az az arány, ahogyan a munka és a tőke a hozzáadott értéken osztozik.

B) Az I. fejezet adatainak deduktív értelmezése

Az I. fejezetben azt találtuk, hogy egy lineáris összefüggés a V/L és w logaritmusai között, azaz

$$\log y = \log a + b \log w \tag{8}$$

általában jó illeszkedést ad. Egy ilyen görbe mentén y-nak w-re vonatkozó rugalmassága konstans, és egyenlő a b koefficienssel. Említettük, hogy ennek az összefüggésnek megfelelő termelési függvény helyettesítési rugalmassága állandó, és egyenlő b-vel, tehát e függvény levezetésével sikerül lényeges ponton általánosítani a Cobb—Douglas függvényt. A Cobb—Douglas-eset valóban a (8) speciális esete $b=1$ mellett. Empirikus eredményeinkből 1-nél kisebb helyettesítési rugalmasságok adódnak, ez határozottan ellentmond a Cobb—Douglas-felfogásnak. Később majd visszatérünk e tény elosztási és más következményeire.

A (3) differenciálegyenlet a következő alakú lesz:

$$\log y = \log a + b \log \left(y - x \frac{dy}{dx} \right). \tag{9}$$

A logaritmusokat kiküszöbölve és az egyenletet $\frac{dy}{dx}$-re megoldva, kapjuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^{1/b} y - y^{1/b}}{a^{1/b} x} = \frac{y(1-\alpha y^{\varrho})}{x},$$

ahol a kényelem kedvéért az $\alpha = a^{-1/b}$ és $\varrho = \frac{1}{b} - 1$ jelöléseket alkalmaztuk. A

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1-\alpha y^{\varrho})}$$

egyenletnek van parciális törtekre bontása:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} + \frac{\alpha y^{\varrho-1}\, dy}{1-\alpha y^{\varrho}},$$

amit integrálva

$$\log x = \log y - \frac{1}{\varrho} \log (1-\alpha y^{\varrho}) + \frac{1}{\varrho} \log \beta,$$

vagyis

$$x^{\varrho} = \frac{\beta y^{\varrho}}{1-\alpha y^{\varrho}},$$

ami megoldható y^{ϱ}-ra, majd y-ra, és így adódik az

$$y = x(\beta + \alpha x^{\varrho})^{-1/\varrho} = (\beta x^{-\varrho} + \alpha)^{-1/\varrho} \tag{10}$$

egyenlet.

Részletesen felírva a termelési függvény a következő:

$$V = L(\beta K^{-\varrho} + L^{\varrho} + \alpha)^{-1/\varrho} = (\beta K^{-\varrho} + \alpha L^{-\varrho})^{-1/\varrho}. \tag{11}$$

A termelési függvény alakjáról tett feltevéseink következtében világos, hogy $y>0$, akkor áll minden $x>0$-ra, ha $\alpha>0$ és $\beta>0$. A (10) egyenlet differenciálása megmutatja, hogy a határtermelékenységek pozitivitásához elég a $\beta>0$ feltételt kikötni. A második differenciálás egy további feltételt ad a csökkenő hozadékra, nevezetesen a $\varrho+1>0$ összefüggést, amely egyenértékű a $b>0$ kikötéssel, és így összhangban van empirikus eredményeinkkel.

A (10), illetve a (11) egyenletekkel leírt termelésifüggvény-család felölel minden olyan függvényt, amely állandó helyettesítési rugalmasságú a K/L bármely értékére. A helyettesítés rugalmassága pontosan megadva $\sigma=1/(1+\varrho)=b$. Mindezek miatt a (10) vagy a (11) termelési függvényt állandó helyettesítési rugalmasságú termelési függvénynek (röviden CES függvénynek)[7] nevezzük. A ϱ paraméter megengedett értékei -1-től ∞-ig terjednek, ami σ-ra $+\infty$ és 0 közötti értékeket ad. Mivel elemzésünkben b empirikus értékei majdnem mindig szignifikánsan kisebbek 1-nél, azért a különböző iparágakban ϱ-ra pozitív értékek, a helyettesítési rugalmasságra pedig 1-nél kisebb értékek adódnak.

C) A CES termelési függvény tulajdonságai

A (10) és a (11) összefüggéseket szimmetrikusabban írhatjuk le az $\alpha+\beta=\gamma^{-\varrho}$ és $\beta\gamma^{\varrho}=\delta$, jelölésekkel, és így új alakjuk:

$$y = \gamma[\delta x^{-\varrho} + (1-\delta)]^{-1/\varrho} \tag{12}$$

$$V = \gamma[\delta K^{-\varrho} + (1-\delta)L^{-\varrho}]^{-1/\varrho}. \tag{13}$$

A γ paraméter változása arányosan változtatja a kibocsátást a ráfordítások bármely értéke esetén. Ezért (semleges) *hatékonysági paraméter*ként fogunk hivatkozni rá. A ϱ paramétert, mint az imént láttuk, a helyettesítési rugalmasságból kapjuk, és így *helyettesítési paraméternek* nevezzük. Később [a (23) egyenletben] látni fogjuk, hogy σ bármely adott értékére (és ezzel együtt ϱ bármely adott értékére) a jövedelem elosztását δ határozza meg, δ lesz az *elosztási paraméter*. A hatékonysági paramétertől eltekintve (amelyet a kibocsátás egységének alkalmas megválasztásával eggyel egyenlővé tehetünk), a (13) egy függvényosztály, amelyet a matematikai irodalom „$(-\varrho)$-ad rendű középérték"[8] néven ismer.

[7] Megjegyezzük, hogy *Trevor Swan* tőlünk függetlenül levezette a (11) állandó helyettesítési rugalmasságát. *Solow* e függvényt illusztrációként használta a [15] 77. oldalán.

[8] Lásd: *Hardy—Littlewood—Pólya* [7] 13. old. Meg lehet mutatni azt is, hogy a (13) a legáltalánosabb függvény, ami megfelelő logarlécen még kiszámítható.

A ϱ legkisebb megengedett értéke -1; ez végtelen helyettesítési rugalmasságot, és ezért egyenes vonalú izokvantokat jelent. A (13) egyenletbe a $\varrho=-1$ értéket helyettesítve ezt igazolhatjuk.

A ϱ értékei -1 és 0 között vannak, akkor az egynél nagyobb helyettesítési rugalmasságokat kapjuk. A (12)-ből látszik, hogy $y\to\infty$, ha $x\to\infty$, és $y\to\gamma(1-\delta)^{-1/\varrho}$, ha $x\to 0$. Vagyis, az egységnyi munkára jutó kibocsátás a tőke—munka arány növekedésével végtelen naggyá válik; ha pedig a tőke—munka arány nullához közeledik, a munka átlagos terméke egy pozitív alsó korláthoz tart.

A $\varrho=0$ eset egységnyi helyettesítési rugalmasságú, és ezért vissza kell hogy vezessen a Cobb—Douglas-függvényhez. Ez a tény a (13) összefüggésből nem tűnik ki, mert ha $\varrho\to 0$, a jobb oldal 1^{∞} típusú meghatározatlan alak. Tény viszont, hogy a határfüggvény *valóban* a Cobb—Douglas-alak. Ez a következő módokon bizonyítható be: *a)* A L'Hôpital szabály közvetlen alkalmazásával a (13) összefüggésre; *b)* A (9) integrálásával, $b=1$ mellett; vagy *c)* arra a tisztán matematikai tételre való hivatkozással, hogy a nullad rendű középérték éppen a geometriai átlag.[9] Így a (13) határalakja $\varrho=0$ mellett valóban $V=\gamma K^{\delta}L^{1-\delta}$.[10]

Empirikusan a $0<\varrho<\infty$ eset az érdekes, ekkor $\sigma<1$. A függvény menete teljesen más, mint a $-1<\varrho<0$ esetben. Amint $x\to\infty$, $y\to\gamma(I-\delta)^{-1/\varrho}$; amint $x\to 0$, $y\to 0$. Azaz, ahogy a rögzített munkamennyiség mellett a tőkemennyiség telítődik, az egységnyi munkára jutó kibocsátás egy felső korlátot közelít meg. Ha viszont a rögzített tőke mellett a munka telítődik, a munka termelékenysége nullához tart.

Amikor $\varrho>-1$, az izokvantok a helyes irányban görbülnek. ($\varrho=-1$ az egyenesvonalú izokvant esete, a $\varrho<-1$ esetet pedig pont az izokvantok megengedhetetlen görbülése miatt zárjuk ki.) A $\varrho<0$ és $\varrho\geqq 0$ esetek különböznek; ha $\varrho<0$, az izokvantok metszik a K és L tengelyt, ha $\varrho\geqq 0$, az izokvantok aszimptotikusan közelítik meg a tengelyeket. Mindkét esetet megmutatjuk a IV. fejezet 1. diagramján.

Két megjegyzéssel zárjuk a ϱ lehetséges értékeinek áttekintését. Egyrészt a $\varrho=1$, $\sigma=1/2$ eset láthatóan a szokásos harmonikus átlag. Másrészt, ha $\varrho\to\infty$, akkor a helyettesítés rugalmassága 0-hoz tart, és így az állandó ráfordítási arányok esetét közelítjük meg. Ezt bebizonyíthatjuk, ha kiszámoljuk a (13)-ból a megfelelő határértékeket. De az átlagok általános elmélete is biztosítja, hogy $(-\infty)$-rendű átlagként[11]

$$\lim_{\varrho\to\infty}\gamma[\delta K^{-\varrho}+(1-\delta)L^{-\varrho}]^{-1/\varrho}=\gamma\min(K,L)=\min\left(\frac{K}{\gamma^{-1}},\frac{L}{\gamma^{-1}}\right). \tag{14}$$

Ez derékszögű izokvantokat állít elő az origóból induló 45°-os egyenesen fekvő sarkokkal. De a dolog nyilván általánosabb, hiszen a sarkok helye megváltozik, ha K-t és L-et különböző mértékegységekben mérjük.

[9] *Hardy—Littlewood—Pólya* [7] 15. old. 3. tétel.

[10] Ez a speciális eset megerősíti δ-nak elosztási paraméterként való megjelölését.

[11] *Hardy—Littlewood—Pólya* [7] 15. old., 4. tétel.

Mindezzel egyszerűen az I. fejezet adatainak egy lehetséges magyarázatát adtuk meg. A következőkben a modell néhány ellenőrizhető következményére térünk ki, és eközben megvizsgáljuk az állandó volumenhozadék feloldásának lehetőségét, vagy legalábbis ellenőrizzük e hipotézis érvényességét. A CES termelési függvény további közgazdasági következményeit a IV. fejezetben tárgyaljuk majd.

D) A modell számításokkal ellenőrizhető következményei

1. *A volumenhozadék.* Mindeddig állandó volumenhozadékot feltételeztünk. Ezt nem csupán kényelemből tettük, a tőkemennyiségtől független összefüggés V/L és w között legalábbis sugallja e feltevést. Az elsőfokú homogenitás (hozzávéve a verseny feltevését a munkapiacon és a termékpiacokon) valóban maga után von egy ilyen összefüggést. Világos, hogy nem minden termelési függvény enged meg a V/L és a $w=\partial V/\partial L$ között ilyen összefüggést; mindamellett az ilyen termelési függvények osztálya szélesebb az elsőfokú homogén függvényeknél. Pontosan szólva, a következőt mondhatjuk ki: ha a munka és a termékek piacai versenypiacok, és ha $V=F(K, L)$ termelési függvény mellett a profitmaximalizáló viselkedés függvénykapcsolatra vezet w és V/L között, akkor $F(K, L)=H(C(K), L)$, ahol a H függvény C-ben és L-ben elsőfokú homogén, C pedig a K növekvő függvénye.

A bizonyítás a következő. Mivel $w=\partial V/\partial L$, az említett függvénykapcsolatot így írhatjuk:

$$\frac{\partial V}{\partial L}=h\left(\frac{V}{L}\right).$$

Mivel ez független K-tól, K értékét konstansnak vehetjük, és a vizsgált összefüggést közönséges differenciálegyenletként kezeljük. Az $y=V/L$ értéket bevezetve $L\partial y/\partial L+$ $+y=\partial V/\partial L$, és ezért $\partial y/\partial L=\dfrac{h(y)-y}{L}$. Mivel K rögzített, ezt így is írhatjuk:

$$\frac{dy}{h(y)-y}=\frac{dL}{L},$$

és integrálással kapjuk

$$L=Cg(y), \tag{15}$$

ahol $g(y)=\exp\int^{y}\dfrac{dy}{h(y)-y}$; és C az integrációs konstans, amit a K függvényének kell tekinteni. [$h(y)<y$ is feltételezett, tehát az, hogy a munka átlagos termelékenysége meghaladja a határtermelékenységét.] A (15) invertálásával az y változót, mint $L/C(K)$ függvényét kapjuk meg, mondjuk $y=G(L/C(K))$ és ezért

$$V=LG\left(\frac{L}{C(K)}\right)=H(C(K), L) \tag{16}$$

mint ahogy állítottuk, és itt H az argumentumaiban elsőfokú homogén. Ha a K határtermelékenysége pozitív, akkor C szükségképpen növekvő függvénye K-nak, mivel $g(y)$ csökkenő.

Tehát feltevéseink mellett a termelés volumenhozadéka nem feltétlenül állandó a K és L változókban, de szükségképpen az a $C(K)$ és L változókban. Állandó a volumenhozadék, ha C arányos K-val. A $C(K)$-t viszont bármilyen esetben tudjuk értelmezni. Legyen P az összes nem munka jövedelem, akár tőkehozadék az, akár nem. Ekkor Euler tétele szerint $P=C\partial H/\partial C$. Továbbmenve, $\partial V/\partial K=(\partial H/\partial C)(dC/dK)$. Így

$$\frac{C}{C'}=\frac{P}{\frac{\partial V}{\partial K}} \tag{17}$$

úgyhogy C/C' a profitfolyamoknak a tőke határtermelékenységével diszkontált jelenértékét adja.

A (16) összefüggéshez vezető érvelés az állandó volumenhozadék egy empirikus próbájára is lehetőséget ad. Mint megjegyeztük az állandó volumenhozadék egyenértékű a $C(K)/K$ érték állandóságával. A (15)-ből azonban

$$\frac{C}{K}=\frac{L}{K}\frac{1}{g(y)}=\frac{1}{xg(y)}. \tag{18}$$

Tehát a hipotézis szigorú próbája az, hogy $xg(y)$ konstans legyen az egyes iparágakban az összes olyan országra vonatkozóan, amelyekre van tőkeadatunk. A próba szigorúsága abból a tényből fakad, hogy olyan adatokra támaszkodik (nevezetesen K-ra), amelyeket az elemzés előző szakaszaiban nem használtunk fel. Ha a próba jó eredménnyel jár, akkor nemcsak az állandó volumenhozadék feltevése igazolódik, hanem a (15) összefüggés is, és ezzel együtt a termelési függvényre vonatkozó egész gondolatmenetünk.

Ha a $h(y)$ függvényt úgy kapjuk, hogy a (8) összefüggést w-re megoldjuk, akkor a $g(y)$ meghatározásához szükséges integrálás a (10) összefüggéshez vezető érvelés megismétlése. Ekkor

$$\frac{1}{xg(y)}=\frac{\beta^{VP}}{K}(1-\alpha y^{\varrho})^{-1/\varrho}.$$

Mivel β konstans, a volumenhozadék állandóságának próbája elvégezhető a

$$c=\left(\frac{V}{K}\right)(1-\alpha y^{\varrho})^{-1/\varrho} \tag{19}$$

állandóságának vizsgálatával.

2. *A tőke és hozadéka.* Nem szabad szem elől téveszteni, hogy termelési függvényeink egészen az előző pontig csak az y és w között észlelt összefüggés magyarázataként szerepeltek, a verseny feltevése mellett. Nem lehetünk bizonyosak abban, hogy

valóban termelési összefüggéseket írnak le (azaz V, L és K között állanak fenn), és ezt eleve nem is lehet tudni a K-ra vagy — ami egyenértékű ezzel — a tőkehozadékra vonatkozó adatok nélkül. Ilyen adatokkal viszont képesek vagyunk elvégezni egész módszerünk további szigorú próbáit.

Tegyük fel, hogy rendelkezünk néhány ország egy adott iparágára vonatkozó K adataival. Ekkor x-et ugyanúgy ismerjük, mint y-t, és közvetlen módon kipróbálhatjuk, hogy az elvileg kikövetkeztetett termelési függvényünk, a (3) vagy a (4), ténylegesen fennáll-e A valamely értéke mellett. Ha fennáll, akkor kaptunk A-ra egy becslést, valamint egy szigorú külső próba igazolta levezetésünk érvényességét.

Mindez csupán átfogalmazása az állandó hozadék próbájának, de valójában valamivel tovább megy annál; ha az állandó hozadék hipotézise beigazolódik, akkor a megfelelő termelési függvény is érvényes.

3. *A hatékonyság semleges változásai.* A (10) és a (11) összefüggésekhez vezető érvelésekből látható, hogy az α és ϱ paramétereket közvetlen módon nyertük az a és b paraméterek I. fejezetbeli empirikus becsléseiből. A β viszont egy integrációs konstans, és ezért csak a megfigyelt adatokból, beleértve K vagy x értékeit, határozható meg. Ugyanakkor a (19)-ben levő c próbamennyiség az α és a ϱ paraméterektől függ, és nem β-tól, feltéve, hogy β az egyes országokban ugyanaz. Ha a (19) összefüggésre alapozott szigorú próbát az adatok nem teljesítik, ez arra mutathat, hogy β változik az országok között, miközben α és ϱ ugyanazok maradnak. A (11)-et tekintve, ez ekvivalens annak kijelentésével, hogy a tőke hatékonysága országról országra változik, de a munkáé nem.

Szimmetrikusabb (és valószínűbb) az a lehetőség, hogy a hatékonyság nemzetközi különbségei mindkét termelési tényezőt egyenlően érintik. Ez a (13)-ban annak a feltételezésével egyenlő, hogy a γ hatékonysági paraméter, országról országra változik, míg δ és ϱ állandóak maradnak. Mivel $\beta/\alpha=\delta/(1-\delta)$, ezt úgy is mondhatjuk, hogy β és α arányosan változnak. Erre a hipotézisre tudunk adni egy próbát.

A helyettesítési rugalmasság definíciójából, állandóságából és a tényezőárak arányának a helyettesítés határarányával való versenybeli egyenlőségéből következik, hogy w/r arányos a $(K/L)^{1/\sigma}=(K/L)^{(1+\varrho)}$ értékkel. Az arányossági együtthatót elég könnyű közvetlen módon kiszámolni, és így

$$\frac{w}{r}=\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\varrho}. \tag{20}$$

és

$$\beta/\alpha=\delta/(1-\delta)=\left(\frac{r}{w}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\varrho}. \tag{21}$$

Ily módon azon országok között, amelyekre rendelkezésre állnak egy iparág r és K adatai, és adott a becslésünk ϱ-ra, összehasonlíthatjuk a (21) jobb oldalának értékeit. Ha ez állandó vagy közel állandó, akkor kimondhatjuk, hogy a hatékonyság változása országról országra semleges, és becslést is adhatunk a δ paraméterre.

Azután felhasználhatjuk a (12)-t, hogy a δ és ϱ értékekből becsüljük a γ hatékonysági paramétert az említett iparágra és a vizsgálatba bevont valamennyi országra.

4. *A tényezők felhasználásának mértéke és a CES termelési függvény.* A (20) egyenlőségből látjuk, hogy

$$x = \frac{K}{L} = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\frac{w}{r}\right)^{\sigma}. \tag{20a}$$

Képzeljünk el két iparágat, mindkettőre a CES termelési függvény jellemző, jóllehet különböző paraméterekkel, amint munkát és tőkét vásárolnak ugyanazon a versenypiacon. Ekkor

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{\delta_2}{1-\delta_2}\right)^{-\sigma_2}\left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma_1-\sigma_2} = J\left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma_1-\sigma_2}. \tag{22}$$

Ha $\sigma_1=\sigma_2$ (és így $\varrho_1=\varrho_2$), akkor ez a viszonylagos tényezőintenzitási arány független a tényezőárak arányától. Azaz, mondjuk az egyes számú iparág minden lehetséges árarány mellett tőkeintenzívebb, mint a kettes számú iparág. A Cobb—Douglas-függvény ($\sigma_1=\sigma_2=1$) vagy a rögzített arányok ($\sigma_1=\sigma_2=0$) esetében ez a helyzet. De ha egyszer $\sigma_1\neq\sigma_2$, a tényezőintenzitásoknak ez a tulajdonsága eltűnik, és lehetetlen egy iparágat az áraktól függetlenül tőkeintenzívebbnek mondani egy másiknál. Ugyanis a (22) teljesen világosan megmutatja, hogy w/r-nek mindig van kritikus értéke, amelynél az x_1/x_2 tényezőintenzitási arány, ha addig 1-nél nagyobb volt, 1-nél kisebbé válik. Mindössze egy ilyen kritikus érték van, amely esetén az iparágak viszonylagos tőkeintenzitásukat tekintve helyet cserélnek. A váltás a józan észnek megfelelően történik: ahogyan a bérek nőnek a tőkeköltségekhez viszonyítva, végül is a nagyobb helyettesítési rugalmasságú iparág válik tőkeintenzívebbé. Nagyon különböző tényezőár-szerkezetű országokat összehasonlítva, a viszonylagos tényezőintenzitás ezen változásait meg kell tudnunk figyelni. Ezt az összehasonlítást mi Japánra és az Egyesült Államokra végezzük el a IV. fejezetben.

A viszonylagos tényezőintenzitási arány fontos szerepet játszik annak vitájában, hogy az áruk nemzetközi kereskedelme a tényezőárakat tekintve kiegyenlítő tendenciájú-e a különböző országok között. (Egyébként a tényezőárak és az áruk árainak általánosabb, bármely egyensúlyi modellben felmerülő kérdésénél is fontos a viszonylagos tényezőintenzitási arány.)

5. *Az idősorok és a technikai változás.* A CES termelési függvényt eleve nehéz közvetlenül illeszteni a ráfordítások és a kibocsátások adataihoz, a ϱ paraméter belépésének nemlineáris jellege miatt. Ha azonban feltesszük, hogy a technikai változás semleges, más szóval egységes, akkor a függvény kényelmes tényezőár-tulajdonságait felhasználhatjuk idősorelemzésre és a technikai haladás mértékének becslésére.

Egy egységes technikai változás a termelési függvény olyan eltolását jelenti, amely a helyettesítés határarányát valamennyi K/L arány esetében változatlanul hagyja. A (13) és a (20) összefüggésekből következik, hogy az egységes technikai változás

csak a γ hatékonysági paraméter értékét érinti, de a δ elosztási és σ helyettesítési paraméterek értékét nem.

A (20)-ból következik, hogy

$$\frac{wL}{rK} = \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{\varrho}, \tag{23}$$

ami γ-tól független érték. Így ha a CES függvény időbeli eltolódásai semlegesek, akkor a (23)-nak mindvégig fenn kell állnia, és ha ez bebizonyosodik, a semlegesség hipotézisének próbáját jelenti.

Tegyük fel, hogy a termelési függvény két pontjában rendelkezünk x-re és w/r-re megfigyelésekkel, azaz két országra vagy ugyanazon országra, de két különböző időpontra vonatkozóan van adatunk. Ekkor a (20*a*)-ból

$$\frac{x_1}{x_2} = \left[\frac{(w/r)_1}{(w/r)_2}\right]^{\sigma}. \tag{24}$$

Így innen σ-ra becslést végezhetünk. Vegyük észre továbbá, hogy mivel a γ nem szerepel a (20*a*)-ban, a becslés akkor is érvényes, ha a két megfigyelés között a hatékonysági paraméter megváltozott, feltéve, hogy az elosztási és helyettesítési paraméter változatlan, azaz a technikai változás semleges maradt.[12]

Ha a semlegesség hipotézise elfogadható, akkor megpróbálhatjuk nyomon követni a hatékonysági paraméter időbeli változásait. Megtehetjük ezt például a (8) összefüggésre visszatérve. A $V/L=aw^b$ összefüggésből és az α, σ, δ és γ paraméterek definícióiból először is kiszámítjuk, hogy

$$\frac{wL}{V} = \left(\frac{1}{a}\right) w^{1-b} = \alpha^{\sigma} w^{1-\sigma} = (1-\delta)^{\sigma}\gamma^{\sigma-1} w^{1-\sigma}. \tag{25}$$

Két eshetőség áll fenn. A σ és a δ paraméterek adott értékei mellett felhasználhatjuk a (25) összefüggést a γ idősorának kiszámítására. Vagy pedig feltételezhetjük, hogy a technikai változás állandó ütemű, azaz $\gamma(t)=\gamma_0 10^{\lambda t}$, és σ és λ becslésére a következő összefüggést illesztjük az adatokhoz:

$$\log\left(\frac{wL}{V}\right) = [\sigma \log(1-\delta)+(\sigma-1)\log\gamma_0]+(1-\sigma)\log w+\lambda(\sigma-1)t. \tag{26}$$

Az V. fejezetben még visszatérünk erre a kérdésre.

6. *Az áruk árának változása az egyes országok között.* Az áruk árának országok közötti változására az elfogadott magyarázat a tőkeintenzitás és a tényezőárak különbségeire támaszkodik. Termelési függvényünkben a tőkeintenzitás a σ-tól és δ-tól egyaránt függ (ahelyett, hogy csak δ-tól függene, mint a Cobb—Douglas-függvény esetében), és ezenkívül megengedjük a szektorok különböző hatékonyságát is. Az árkülönbségek magyarázata ezért itt összetettebb lesz.

[12] A helyettesítési rugalmasság becslésének ezt a módszerét használja *Kravis* [9] 940—941. old.

Modellünkben egy áru árát az egységnyi hozzáadott értékre jutó közvetlen munka- és tőkeköltség határozza meg:

$$P = Wl + Rk = Wl\left(1 + \frac{R}{W} \cdot x\right),$$

ahol W a bérek és R a tőkehozadék pénzben kifejezett értéke (tehát nem a kibocsátást vesszük mértékegységnek), $l = L/V = 1/y$ és $k = K/V$.

A munkakoefficiens helyére a (12) reciprokát téve:

$$P = \frac{W}{y}[\delta x^{-\varrho} + (1-\delta)]^{1/\varrho}\left[\frac{r}{W} \cdot x + 1\right], \tag{27}$$

amelyben az áru ára a tényezőköltségektől és a tőkeintenzitástól függ. Adott termelési függvény mellett, A és B országban az árak aránya kifejezhető a tényezőárak függvényében, ugyanis a (20*a*) összefüggést felhasználhatjuk a x kiküszöbölésére:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{W_A}{W_B} \cdot \frac{\gamma_B}{\gamma_A}\left[\frac{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}\left(\frac{w_A}{r_A}\right)^{\sigma-1} + 1}{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}\left(\frac{w_B}{r_B}\right)^{\sigma-1} + 1}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}. \tag{28}$$

Eredményünk empirikus jelentőségét a IV. fejezet *C)* pontjában tárgyaljuk meg.

III. A CES TERMELÉSI FÜGGVÉNY EMPIRIKUS PRÓBÁI

A CES függvény leírhatja, hogy az egyes iparágak termelési összefüggései országonként különböző mértékben uniformizáltak. A II. fejezet *D)* pontjában vázoltunk két próbát, amelyek lehetővé teszik, hogy ideiglenesen válasszunk három hipotézis között: 1. mindhárom paraméter értéke ugyanaz az egyes országokban; 2. σ ugyanaz, és még egy paraméter azonos értékű; 3. csak σ nem változik az országok között. Az *A)* pontban közölt tények ellentmondanak az első hipotézisnek, de a másodikat alátámasztják. Továbbmenve: felvetődik, hogy egy ország különböző iparágainak hatékonysági szintje némileg hasonló lehet — ezt a kérdést a *B)* pont elemzi. A kapott eredmények alapján a *C)* pontban megvizsgáljuk korábbi σ-becsléseink torzításainak lehetséges forrásait.

A) A termelési függvény általánossága

A (19) és a (21) két próbájának elvégzéséhez meg kell becsülni vagy a tőkemennyiség vagy a tőkehozadék értékeit. Bár ezekre közismerten kevés adat van, és az adatok megbízhatatlanok, a 2. táblázatban szereplő iparágak közül négyre sikerült össze-

hasonlítható adatokat gyűjtenünk, iparáganként változóan 3—5 országra.[13] A tőke mennyisége az r hozadékból a $K=(V-wL)/r$ összefüggéssel becsülhető.

Az összes paraméter állandóságának próbája a c kiszámítását igényli a (19) egyenlettel. Ha a hatékonyságban nincsenek eltérések, e számnak állandónak kell maradnia. A *3. táblázat A* részében bemutatjuk a számítást. A c eltérésének mértékét a $\bar{c}$-hez, az iparáganként vett geometriai átlaghoz való viszonyával jellemezzük.

3. táblázat

A CES TERMELÉSI FÜGGVÉNY STATISZTIKAI PRÓBÁI[a]

	A) Az állandó hatékonyság próbája[b]											
	231. Fonás és szövés			311. Vegyi alapanyagok			341. Vas és acél			350. Fémáruk		
	w	r	$\frac{c}{\bar{c}}$	w	r	$\frac{c}{\bar{c}}$	w	r	$\frac{c}{\bar{c}}$	w	r	$\frac{c}{\bar{c}}$
Egyesült Államok	2920	0,0526	1,72	4754	0,2083	2,31	4387	0,1984	2,96	4314	0,1359	2,35
Kanada	2708	0,0403	1,16	4036	0,2115	2,01	3769	0,1740	2,13	3507	0,1071	1,37
Egyesült Királyság	874	0,2022	1,44	...	...	...	1224	0,1513	0,62	...	...	...
Japán	287	0,1902	0,55	563	0,2373	0,70	664	0,1911	0,49	422	0,2245	0,31
India	276	0,1543	0,63	320	0,2200	0,51	450	0,2686	0,53	...	...	...
	B) A δ állandóságának próbája[c]											
	β_i/α_i	δ_i	γ_i	β_i/α_i	δ_i	γ_i	β_i/α_i	δ_i	γ_i	β_i/α_i	δ_i	γ_i
Egyesült Államok	1,155	0,536	1,016	3,283	0,767	1,021	1,564	0,610	1,733	1,039	0,509	1,736
Kanada	1,352	0,575	0,771	3,289	0,767	0,839	1,765	0,638	1,378	1,180	0,541	1,292
Egyesült Királyság	1,514	0,602	0,880	...	...	...	1,265	0,559	0,857	...	...	...
Japán	1,833	0,647	0,428	2,785	0,734	0,567	1,461	0,584	0,687	0,968	0,492	0,619
India	...	...	...	2,967	0,748	0,441	1,495	0,599	0,657	...	...	...
Átlag		0,590			0,754			0,598			0,514	
Variációs koefficiens[d]		5,85%			1,72%			3,55%			3,50%	
	C) α és β állandóságának próbája											
	α_i	β_i	α_i	β_i	α_i	β_i	α_i	β_i				
Egyesült Államok	0,462	0,534	0,233	0,765	0,343	0,536	0,462	0,480				
Kanada	0,452	0,611	0,242	0,796	0,336	0,593	0,448	0,529				
Egyesült Királyság	0,410	0,621	...	...	0,458	0,579	...	...				
Japán	0,431	0,790	0,297	0,826	0,444	0,648	0,535	0,518				
India	...	...	0,298	0,883	0,442	0,661	...	...				
Átlag	0,439	0,639	0,268	0,818	0,405	0,603	0,482	0,509				
Variáció koefficiens[d]	4,17%	11,85%	11,19%	8,04%	12,84%	6,77%	7,41%	3,79%				

[a] Az adatok forrásai a főszövegben./[b] A (19) egyenletből számolva./[c] A (21) és (12) egyenletekből, γ számolásában a δ országonkénti értékeinek felhasználásával./[d] Ez definíció szerint $\frac{\sum_i |X_i - \bar{X}|}{N \cdot \bar{X}}$, ahol X_i az ország értéke, $\bar{X}$ az iparági átlag, és N az iparágra vonatkozó megfigyelések száma.

[13] A tőkehozadékot a különböző iparágak mérlegbeszámolóiból becsültük. A tőkét a nettó állótőke (beleértve a földet is), a készpénz és a forgótőke adta. Minden pénzügyi befektetést kizártunk. A tőke összes hozadékát egyenlőnek vettük a termelés bruttó profitjának (a többi jövedelemfajtát levontuk) és az értékcsökkenésnek a különbségével. A további részleteket lásd a [12]-ben.

Mivel a c mind a négy iparágban nagy változékonyságot mutat, ezekből az eredményekből következően el kell vetni azt a hipotézist, amely szerint mindhárom paraméter állandó érték. Ezért feladjuk azt az elképzelést, hogy a hatékonyság ugyanaz az egyes országokban, és rendre megvizsgáljuk az α, β és a δ állandóságát. Az első eset maga után vonná, hogy a hatékonyság változásai teljes egészében a tőkét érintik (ezt a c kiszámításánál a 3. táblázat A részében feltettük); a második viszont, hogy teljesen a munkát; az utolsó szerint e változások egyformán hatnak mindkét tényezőre. A próba logikáját a II. fejezet D) pontjában vázoltuk. A 3. táblázat B és C részei értékelik a három lehetőséget, megadják a szóródás mutatóját valamennyi iparág valamennyi paraméterére.

A három lehetőséget összehasonlítva, δ állandósága — ami a hatékonyság semleges változását vonja maga után — messze a legjobb feltételezés, míg a másik kettő közötti választásra nincs alap. A négy iparágat együttvéve, δ-ra a szóródás mutatója csak 3,6%, míg a másik két paraméterre ennek több mint a kétszerese. Ezért a CES termelési függvény alapformáiként ideiglenesen elfogadjuk a (12) és a (13) egyenlőségeket. Egy iparágat valamennyi országban ugyanaz a σ és δ jellemez, a hatékonyság különbségei feltételezésünk szerint a γ_i paraméterben jutnak kifejezésre.

Az a következtetés, hogy ugyanazon iparág adatai különböző országokban nem ugyanahhoz a termelési függvényhez illeszkednek, annyira lényeges, hogy termelési függvényünk konkrét alakjától független próbának is alá kell vetni. Ha valamennyi ország ugyanazon elsőfokú homogén termelési függvényhez tartozik, akkor egy magas tőke—munka arány szükségképpen magas bérszintet és emellett alacsony tőkehozadékot jelent. A *3. táblázatból* látjuk, hogy nagyjából negatív korreláció áll fenn a bérek és a tőkehozadékok között, de az utóbbiak közti eltérések jóval kisebbek annál, mint amik összhangban lennének a bérek nagymértékű szóródásával. Ezt a benyomást a (7) formula segítségével számszerűen is alátámaszthatjuk.

Annak idején megjegyeztük, hogy egy rögzített elsőfokú homogén termelési függvény különböző pontjaiban a tőke hozadéka a bérszint függvénye, e függvény rugalmassága negatív, és abszolút értékre megegyezik a munka és a tőke jövedelmének arányával. A következőképpen járunk el: Legyen v ezen arány legkisebb megfigyelt értéke. Akkor az r tőkehozadéki rugalmassága a w bérszintre nézve nem haladhatja meg a $-v$ értéket, úgyhogy

$$\frac{\log\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\log\left(\frac{w_1}{w_0}\right)} \leqq -v,$$

ahol az indexek bármely két országot jelenthetik. Ha az országokat úgy választjuk meg, hogy $w_0 > w_1$, akkor a negatív $\log(w_1/w_0)$ értékkel beszorozva, és a logaritmusokat kiküszöbölve azt kapjuk, hogy $r_1 \geqq r_0(w_0/w_1)^v$. Legyen e jobb oldali érték mondjuk $\underline{r}_1$. Ha a két országnak ugyanaz lenne a termelési függvénye, akkor az alacsonyabb bérű országban a tőkehozadék értéke nem eshetne az $\underline{r}_1$ korlát alá.

A *3. táblázat* valamennyi iparágára összehasonlítottuk a legkisebb munkabérű ország tőkehozadékát a megfelelő r_1 alsó határ értékével, amelyet a legmagasabb bérű ország (minden iparágra az Egyesült Államok) adataival számoltunk ki. A számítás eredményei:

Iparág	231	311	341	350
r_1	0,190	0,220	0,269	0,225
r_1	0,244	0,667	1,213	1,749

Tehát a legkisebb bérű ország valóságos tőkehozadékai valamennyi esetben az elméleti minimum — az egységes termelési függvény feltevéséből származó minimum — alatt helyezkednek el, mégpedig messze alatta. Az *A)* pont eredményei ily módon megerősítést nyertek.

B) A változó hatékonyság következményei

Mivel a helyettesítési rugalmassággal kapcsolatos empirikus tapasztalatainkat átértékeltük, azért az I. fejezetben szereplő b regressziós koefficienst a továbbiakban nem tekinthetjük σ-val egyenlőnek. Levezetünk viszont egy formulát a σ-nak b-ből való meghatározására, amikor tudjuk, hogy a hatékonyság a bérrel együtt változik, és megmutatjuk a szükséges korrekció mértékét. Ezután megvizsgáljuk a regressziós egyenletek maradéktagjait, amelyek a változó hatékonyságra és a becslés torzításának más forrásaira nyújtanak további bizonyítékot.

1. *σ becslése.* Kézenfekvő az a feltételezés, hogy a γ hatékonysági paraméter az országok között a bérrel együtt változik. Mivel a bér együtt nő mind γ-val, mind x-szel, az is valószínű, hogy egy magas γ hatékonyságú ország a múltban is hatékonyabb volt, és magas jövedelemmel, megtakarításokkal rendelkezett. Tehát azt gondoljuk, hogy x és γ pozitívan korreláltak az országok között, és γ w-vel együtt nő. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az utóbbi eltérés formája:

$$\left(\frac{\gamma_A}{\gamma_B}\right) = \left(\frac{w_A}{w_B}\right)^e, \tag{29}$$

ahol az indexek az A és B országra vonatkoznak. A hatékonysági eltérések hatása az egységnyi munkára jutó kibocsátásra, y-ra, a (25)-ből következően:

$$\left(\frac{y_A}{y_B}\right) = \left(\frac{\gamma_A}{\gamma_B}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{w_A}{w_B}\right)^{\sigma}. \tag{30}$$

A hatékonyságok arányát a (29)-ből behelyettesítve, majd a logaritmusukat véve, a (8) egyenlettel összehasonlítható formulát kapunk. (Ez volt az az egyenlet, amiből rugalmasságbecslésünket levezettük.) A formula:

$$\log\left(\frac{y_A}{y_B}\right) = (\sigma + e - e\sigma)\log\left(\frac{w_A}{w_B}\right). \tag{31}$$

A (8) és a (31) összefüggéseket összehasonlítva látjuk, hogy a b regressziós koefficiens egyenlő $(\sigma+e-e\sigma)$ értékkel, illetve:

$$\sigma = \frac{b-e}{1-e}. \tag{32}$$

Ezért az, hogy b egyenlő σ-val, csak akkor igaz, amikor a hatékonyság nem mozog együtt a bérrel, azaz, amikor $e=0$. Mivel $e>0$, a σ-nak mindig kisebbnek kell lennie b-nél, és — még inkább — kisebbnek egynél, ha $b<1$.

Hogy a korrekció mértékéről legyen egy hozzávetőleges elképzelésünk, a *3. táblázatban* normalizáltuk a γ értékeit úgy, hogy az Egyesült Államok értéke minden esetben 1 legyen, és ezután a legkisebb négyzetek módszerével[14] a $\log\gamma$-t a $\log w$-hez illesztettük. A következő eredményt értük el 14 megfigyelés összevont mintájából:

$$\log\gamma = 0{,}323\log w - 0{,}039 \quad R^2 = 0{,}82.$$
$$(0{,}043)$$

Az egyes iparágak egyenletei valamennyire különböznek, de a megbízható becsléshez iparági szinten túl kevés a megfigyelés. Az e-re vonatkozó információk egy másik forrását adják a IV. fejezetben Japán és az Egyesült Államok 10 feldolgozóipari ágazatot átfogó összehasonlításai. Ott az (γ_J/γ_U) mediánja 0,35 körül van, ami az e 0,5 körüli értékének felel meg.

Az egynél kisebb b értékekre a (32) egyenlet szerint a σ becsült értéke csökken, ha a hatékonyság a bér függvényében változik. $e=0{,}3$ értéket véve alapul, ha a b értékei rendre 0,9, 0,8 és 0,7, akkor σ-ra a 0,86, 0,71 és 0,57 értékek adódnak. A *2. táblázatban* megfigyelt $b=0{,}87$ mediánértéknek $\sigma=0{,}81$ felel meg.

2. *A maradékok országok szerinti eltérései.* A *4. táblázat*ban valamennyi országra bemutatjuk, milyen mértékben térnek el az egységnyi munkára jutó hozzáadott érték adatai a regressziós egyenletekkel becsült mennyiségüktől. A megfigyelési hikáktól eltekintve, az előrejelzett érték $\left(\hat{y}=a+b\log\frac{W}{P}\right)$ és a megfigyelt érték $(y=V/L)$ közötti eltérésnek három fő forrása van:

a) A csak az L-et érintő hatékonyságkülönbségek.

b) Az áruk árainak eltérései, amelyek mind a V, mind a W/P értékét befolyásolják. Nettó hatásuk az $(1-b)$ különbség nagyságától függ.

c) A valutaárfolyamok eltérései, amelyek befolyásolják V-t, de W/P-t nem.

[14] Az eljárás szigorúan véve nem kifogástalan, mivel a γ-t a σ egy feltételezett értékéből számítottuk ki, ezt követően korrigálni kell σ-t, de a dolog nagyjából érvényes, mivel a γ nem érzékeny a σ változásaira.

E tényezők eltérései az $(y-\hat{y})$ negativitásával, illetve pozitivitásával a következőképpen függnek össze:

	Pozitív maradékok	*Negatív maradékok*
Hatékonyság	viszonylag magas hatékonyságú	viszonylag alacsony hatékonyságú
Árak	magas	alacsony
Valutaárfolyamok	felülértékelt	alulértékelt

4. táblázat

A *V/L* MARADÉKAINAK SZÓRÓDÁSA ORSZÁGONKÉNT[a]

			Az iparágak száma		
	V átlaga	%-ok átlaga[b]	+5% felett	+5% és −5% között	−5% alatt
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Egyesült Államok	3841	+5	10	11	3
Kanada	3226	+5	9	11	3
Új-Zéland	1980	+4	7	7	8
Ausztrália	1926	−12	1	3	20
Dánia	1455	−8	2	6	16
Norvégia	1393	−9	2	6	15
Puerto Rico	1182	+22	9	1	8
Egyesült Királyság	1059	−11	1	4	19
Kolumbia	924	+14	16	2	6
Írország	900	−18	0	2	12
Mexikó	524	+32	19	3	1
Argentína	519	+10	12	5	7
Japán	476	+7	9	5	9
Salvador	445	+12	10	1	5
Brazília	436	+33	9	0	1
Dél-Rhodesia	384	−18	0	2	4
Ceylon	261	+7	5	0	6
India	241	−23	0	2	16
Irak	213	+1	1	0	1

[a] A $\Delta y = y - \bar{y}$ maradékot a 2. táblázatból nyertük.
[b] A $\Delta y/y$ számtani közepe.

Bár az említett okokat azokra az országokra, amelyekben a relatív árakról nincs adatunk, nem tudjuk különválasztani, az észlelt maradékok segítséget adnak korábbi eredményeink értelmezéséhez. A *3. táblázatban* elemzett öt ország közül az Egyesült Államok, Kanada és Japán átlagos eltérései alacsonyak, és ezért a belőlük levont következtetéseket csak kis torzítások terhelik. Anglia és India esetében a *V/L* maradékai, feltehetően az alulértékelt valutaárfolyam következtében, túlnyomó több-

ségükben negatívak. Mindazonáltal a *3. táblázat B)* részének olyan korrigálása, ami az esetleges torzításokat kiegyenlíti, nem érinti lényegesen a viszonylagos hatékonyság becsléseit.

Az országok szisztematikus eltéréseire elfogadható magyarázatnak tűnik, hogy azok jórészt a különböző valutaárfolyamnak és a protekcionizmus különböző mértékének tulajdoníthatók. Az Egyesült Államok, Kanada és Latin-Amerika maradékai, feltehetően a felülértékelt valutaárfolyam és (Latin-Amerikában) a protekcionizmus magas foka miatt, túlnyomórészt pozitívak. Nyugat-Európa és India maradékai többségükben negatívak, valószínűleg az alulértékelt valutaárfolyamok következtében. A valutaárfolyamok és az árak eltérései a becslést csak akkor torzítják, ha szisztematikusan kapcsolódnak a bérekhez, ami itt nem látszik valószínűnek.

Annak ellenére, hogy egy másik összehasonlító tanulmány [5] erősen hangsúlyozza a volumenhozadékok jelentőségét, azok hatása a V/L maradékainak változására itt nem derült ki. Az Egyesült Államokban a nagyobb üzemméret oka lehet a magasabb hatékonyságnak és így a pozitív eltéréseknek, de bármely más nagy piaccal rendelkező országban e hatást elnyomják az eltérés más forrásai.

C) Az árváltozások következményei

A torzítások előzőekben tárgyalt három forrása közül valószínűleg az árak eltérései a legkevésbé fontosak, mivel ezek a regressziós elemzésben szereplő két változóra hasonló hatást gyakorolnak. Minthogy azonban van némi adatunk az országok közötti viszonylagos árakra, mégsem árt ellenőrizni azoknak a hibáknak a nagyságát, amelyeket az árak figyelmen kívül hagyása okoz.

Amikor az áruk árai ismertek, a (8) regressziós egyenlet a következő formában mondható ki, ha mind a hozzáadott értéknek, mind a béreknek mértékegysége a termékek ára.

$$\log\left(\frac{V}{P}\cdot\frac{1}{L}\right) = a + b\log\frac{W}{P}. \tag{8a}$$

Ha az árak nem korrelálnak a bérekkel, akkor kihagyásuk befolyásolja a standard hibát, de a b regressziós együttható nagyságát nem. Ha az árak és a bérek korrelálnak egymással, a (32)-höz hasonló módon megadható a σ becslésének korrekciója.[15] Például egy fordított kapcsolat a bérek és az árak között, ha b kisebb, mint egy, emelné a σ becsléseit.

E korrekció nagyságrendjének ellenőrzésére csak két iparágról tudtuk összegyűjteni az adatokat, és csak olyanokat, amelyek sem tartalmukban, sem időpontjuk-

[15] Ha $(P_A/P_B)=(W_A/W_B)^f$, akkor $\sigma=(b-f)(1+f)$, amennyiben a b-t a (8) egyenletből becsüljük.

ban nem felelnek meg teljesen az eredeti adatainknak.[16] A rendelkezésre álló tizenegy országban a (8) és (8*a*) egyenletekből becsülve *b*-t, a következő eredményeket kapjuk:

	(8) egyenlet	(8*a*) egyenlet
bútor (260)	0,814	0,780
	(0,045)	(0,104)
kötöttáru (232)	0,692	0,755
	(0,035)	(0,039)

Egyik esetben sincs jelentős különbség a kétfajta becslés között. Bár ez a próba önmagában semmi esetre sem döntő jelentőségű, a viszonylagos árakról rendelkezésünkre álló többi tapasztalat sem támasztja alá, hogy sok olyan iparág lenne, ahol ez a korrekció jelentősen érintené a σ becslését.

[16] Mindkét szektor fogyasztási javakat termel, a közbenső termékek területén képtelenek voltunk megfelelő számú országra összehasonlítható adatokat találni. A 232. számú szektorhoz alkalmazott árak inkább a ruházati ipar összességét tükrözik, mint magát a 232. szektort. A 11 ország árindexei a következők:

	Bútorárak	Kötöttáruk árai
Egyesült Államok	100,00	100,00
Kanada	154,70	148,91
Ausztrália	81,95	73,58
Új-Zéland	94,82	103,46
Anglia	66,46	60,30
Dánia	89,41	77,13
Norvégia	94,37	89,90
Argentína	223,00	139,01
Brazília	145,90	97,20
Kolumbia	182,60	225,70
Mexikó	175,80	124,58

Az adatokat a következő kiadványból vettük:

Internationaler Vergleich der Preis für die Lebeshaltung, Ergänzungsheft Nr. 4 Zu Reiche 9, Einzelhandelpreise in Ausland, Verlag W. Kohlhammer GMHB, Stuttgart und Mainz, Jahrgang, 1959.

Az eredeti adatok a nyugatnémet márka vásárlóerő-egységében voltak kifejezve, ezekből az árindexeket úgy kaptuk, hogy az Egyesült Államokat vettük bázisnak. A valutaárfolyamok, amelyeken az árakat dollárra számítottuk át, ugyanazok voltak, mint amelyeket az I. fejezetben használtunk.

IV. A TÉNYEZŐK HELYETTESÍTÉSE ÉS A GAZDASÁGI SZERKEZET

A nemzeti jövedelem különböző szintjén álló országok gazdasági szerkezetére jelentős hatásuk van a termelési függvények iparágak közötti különbségeinek. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a CES termelési függvény paramétereinek hatását a tényezőarányokra, az áruk áraira és a komparatív előnyökre. Megnézzük, hogy a paraméterek különbségei mit eredményeznek az említett területeken. Ezen elemzéshez szükséges némi ismeret a három paraméter értékeiről a gazdaság olyan szektoraira is, amelyeket az I. fejezetben nem vizsgáltunk, és ezért szükség van a tőkefelhasználás közvetlen adataira is. Célunk eléréséhez meg fogjuk határozni a termelési függvény paramétereit Japán és az Egyesült Államok összehasonlító szektorainak adataiból. Bár ezek a két pontból történő becslések az egyes szektorokban jelentős hibákat tartalmazhatnak, a becsléseknek ez a második módszere általános eredményeit tekintve megerősíti korábbi elemzésünk eredményeit, és néhány átfogóbb következtetéshez vezet.

A) Termelési függvények az amerikai és a japán gazdaság összehasonlításából

Az elemzésbe az Egyesült Államok és Japán került be, mivel e két országban nagyszámú iparágra vannak adatok a tényezőfelhasználásról, a tényezőárakról és az áruk árairól.[17] Mellettük szól a kényelmesség is, mert viszonylagos áraik valamint tényezőáraik között nagyok a különbségek. A helyettesítési rugalmasság becslése így kisebb hibákat tartalmaz, mint abban az esetben, amikor a megfigyelt értékek szóródása kisebb. Az I. fejezet adataival számolva, az Egyesült Államokra és Japánra korlátozott becslések és a regressziós becslések különbsége átlagban véve kevesebb, mint 10%.

Ezekből az adatokból a (24) egyenlet segítségével becsülhető meg a helyettesítés rugalmassága:

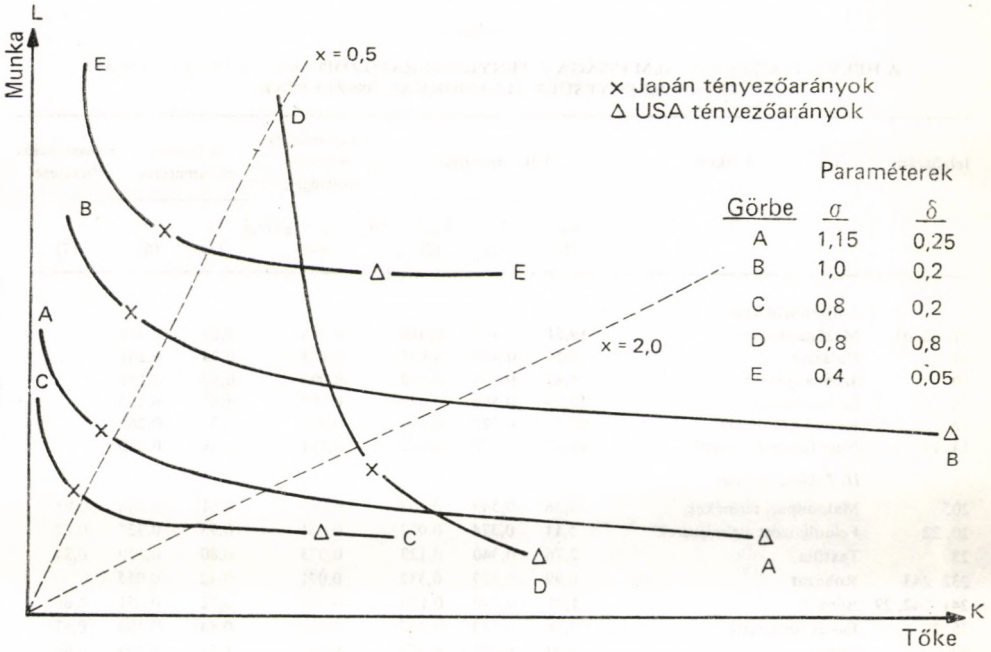
$$\frac{x_J}{x_U} = \frac{(K/L)_J}{(K/L)_U} = \left\{ \frac{\frac{w_J}{r_J}}{\frac{w_U}{r_U}} \right\}^{\sigma},$$

ahol az indexek az országot jelölik. A becslésnek ez a módja rendelkezik azzal az előnnyel, hogy a tőke és a munka közvetlen megfigyeléseit használja fel, és, hogy független a γ hatékonysági paraméter változó értékétől.

A számítás adatait a két ország input-output elemzéseiből vettük át, és az *5. táb-*

[17] Az összehasonlítható adatok összeállítása Gary Bickel munkája. Bickel széles körű elemzést végez a két ország tényezőarányainak és viszonylagos árainak összefüggéséről. Az adatok részletes tárgyalása a [4] műben található meg.

*lázat*ban foglaljuk össze őket. A III. fejezethez képest az alapvető fogalmi különbség a tőke definíciójában van, amely itt csak az állótőkét foglalja magában. A japán munkaköltségeknél számításba veszik az egyes szektorokban változó arányban felhasznált fizetetlen családi munkát. A viszonylagos tényezőköltségeknek a (4) oszlopban bemutatott különbségei kizárólag a munkaköltségek különbözőségéből erednek, mivel a tőke viszonylagos költségét valamennyi szektorban azonosnak feltételezzük.



1. ábra
CES TERMELÉSI FÜGGVÉNYEK

Az ezzel a módszerrel kapott σ értékek sokkal jobban szóródnak, mint azok, amelyeket az I. fejezetben csupán a bérből és a munkaráfordításokból határoztunk meg. Mindamellett abban a 12 feldolgozóipari szektorban, amelyre mindkét becslést elvégezhettük szignifikáns 0,55 értékű a kétfajta becslés közötti korreláció.[18] A σ súlyozott mediánja e szektorokra most 0,93, míg az előző elemzésben ez az érték 0,87 volt. Az egész feldolgozóiparra szintén 0,93 a σ mediánja. A forgótőke figyelmen kívül hagyása egy kézenfekvő magyarázatot ad erre a különbségre, mivel töredékes ismereteink szerint a nyersanyagok és a félkész termékek készlete általában ugyanolyan szintű az alacsony bérű és a magas bérű országokban. A forgótőke és a munka közötti helyettesítés rugalmassága ezért valószínűleg jóval kisebb egynél. Ez a korrekció különösen a kereskedelemben és azokban a feldolgozóipari szektorokban fontos, ahol kicsi az állótőke mennyisége.

[18] Néhány szektorra a megfelelés igencsak hézagos, mert a korábbi becslés a háromszámjegyű osztályozáson alapult és ez csak egy részét fedi le a kétjegyű osztályozásnak.

Mivel a két ország becslései elfogadható mértékben egyeznek a feldolgozóipari szektorokra végzett korábbi becsléseinkkel, próbaképpen elfogadjuk őket a feldolgozóipari szektorokon kívül is a helyettesítési rugalmasság jelzőszámaiként, de a forgótőke kihagyásának ellensúlyozására módosításokat teszünk. Az eredmények közül a mezőgazdaság és a bányászat viszonylag magas, és az elektromos energia

5. táblázat

A HELYETTESÍTÉS RUGALMASSÁGA A TÉNYEZŐK RÁFORDÍTÁSAI ÉS ÁRAI ALAPJÁN: JAPÁN AZ EGYESÜLT ÁLLAMOKKAL ÖSSZEVETVE[a]

Jelzőszám	Szektor	Tőkeintenzitás			Viszonylagos tényező-költségek	A becsült paraméterek		σ regressziós becslése
		X_U (1)	X_J (2)	X_J/X_U (3)	$(w_J)/w_U \times r_U/(r_J)$ (4)	σ (5)	δ (6)	(7)
	I. Kitermelő ágak							
01, 02, 03	Mezőgazdaság	19,51	0,367	0,019	0,036	1,20	0,396	
04	Halászat	3,24	0,490	0,152	0,133	0,94	0,201	
10	Szénbányászat	4,87	0,534	0,110	0,093	0,93	0,182	
12	Ércbányászat	13,34	0,566	0,042	0,107	1,41	0,215	
13	Kőolaj és földgáz	40,57	0,722	0,018	0,096	1 71	0,265	
14, 19	Nem fémes ásványok	10,37	0,777	0,075	0,111	1,18	0,260	
	II. Feldolgozó ipar							
205	Malomipari termékek	5,36	0,549	0,103	0,060	0,81	0,286	0,91
20, 22	Feldolgozott élelmiszerek	5,11	0,374	0,073	0,061	0,93	0,327	0,82
23	Textília	2,76	0,340	0,123	0,073	0,80	0,159	0,81
232, 243	Ruházat	0,99	0,329	0,332	0,071	0,42	0,055	
241 242, 29	Bőráru	1,01	0,190	0,189	0,098	0,72	0,051	0,86
25, 26	Fa- és fűrészáru	3,58	0,310	0,087	0,054	0,84	0,198	0,87
27	Papír	7,31	0,528	0,072	0,099	1,14	0,204	0,96
28	Nyomdaipar és könyvkiadás	3,45	0,143	0,042	0,072	1,21	0,092	0,87
30	Gumi	3,73	0,332	0,089	0,084	0,98	0,147	
31	Vegyi anyagok	8,32	1,125	0,135	0,157	0,90	0,325	0,85
321, 329	Olajtermékek	38,18	0,360	0,094	0,151	1,04	0,550	
322, 329	Szén	35,85	1,895	0,053	0,113	1,35	0,365	
33	Nem fémes ásványi termékek	5,95	0,414	0,070	0,084	1,08	0,197	0,95
341, 35	Vas és acél	8,60	0,986	0,115	0,115	1,00	0,273	0,85
342	Színesfémek	11,45	1,151	0,101	0,123	1,10	1,287	1,01
36,37	Gépipar	4,86	0,469	0,097	0,083	0,93	0,187	0,87
381	Hajóipar	4,76	0,477	0,100	0,094	0,97	0,174	
382	Közlekedési eszközök	5,01	0,378	0,075	0,083	1,04	0,169	
	III. Közművek és szolgáltatások							
511	Elektromos energia	46,13	10,50	0,228	0,164	0,82	0,819	
61	Kereskedelem	5,93	0,349	0,059	0,079	1,12	0,187	
71	Közlekedés	15,71	0,316	0,020	0,106	1,74	0,170	

[a] *Források:*

Az (1), (2) és (4) oszlopot Bickel [4] művéből vettük át, amely viszont az Egyesült Államok és Japán input-output kiadványaira támaszkodik; r_J/r_U értékéről feltettük, hogy valamennyi szektorban 1,47.

Az (5) oszlopot a (33), a (6) oszlopot pedig a (20*a*) egyenletből számoltuk.

A (7) oszlop a 2. táblázat aggregálásával keletkezett, sulyokként a hozzáadott értékek részarányait vettük a két ország átlagában.

alacsony rugalmassága lesz a leginkább figyelemre méltó.[19] A kereskedelemben a forgótőke elhanyagolása valószínűleg a helyettesítési rugalmasság súlyos túlbecsléséhez vezet, a többi szolgáltatásra viszont nincs összehasonlító adatunk. A személyi szolgáltatások esetében a relatív árakból annyit legalábbis tudhatunk a rugalmasságról, hogy az lényegesen kisebb egynél.

Összehasonlításunk alapján megszerkesztettünk öt izokvantot, amelyeket az *1. ábrán* mutatunk be, hogy illusztráljuk a σ és δ változásainak tartományát. Az *5. táblázat*ban ennek az ötös csoportosításnak nagyjából megfelelő szektorokat a *6. táblázatban* mutatjuk be. A növekvő σ-nak az izokvant kiegyenesítő hatása *E*, *C*, *B* és *A* összehasonlításából látható, míg σ hatása a tőkefelhasználásra *C* és *D* összehasonlításából. A következő részben, a tárgyalás illusztrálásaként, megmutatjuk majd az optimális tényezőarányokat is, Japán és az Egyesült Államok átlagos tényezőárai mellett.

6. táblázat

A SZEMLÉLTETETT σ ÉS δ KOMBINÁCIÓK

	σ	δ	Példák
A	1,15	0,25	Mezőgazdaság, bányászat, papír, színesfémek
B	1,0	0,2	Acél, gumi, közlekedési eszközök
C	0,8	0,2	Textília, faáru, malomipar
D	0,8	0,8	Elektromos energia
E	0,4	0,05	Ruházat, személyi szolgáltatások

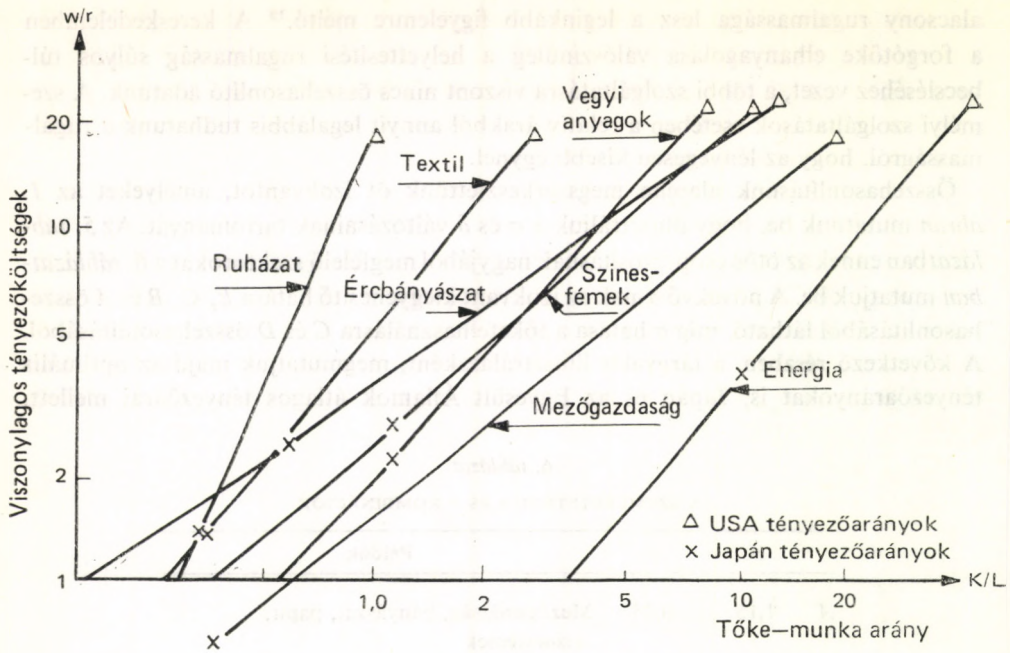
B) Tényezőköltségek és tényezőarányok

A tényezőarányok változásai az országok között, valamint ugyanazon ország szektorai között, amint azt a (20*a*) egyenlet mutatja, σ-tól, δ-tól és a viszonylagos tényezőköltségektől függenek. A *2. ábrán* e kétfajta változás szemléltetésére bemutatjuk az Egyesült Államok és Japán adatait. Ha mindkét változót logaritmikusan ábrázoljuk, akkor a tőke—munka arány a viszonylagos tényezőköltségek lineáris függvénye lesz:

$$\log x = \sigma \log \frac{\delta}{1-\delta} + \sigma \log \frac{w}{r}.$$

Az Egyesült Államokban a bérek viszonylag kevéssé szóródnak a gazdaság szektorai között, és a tőkefelhasználás változása csaknem teljesen a δ és a σ változásainak tulajdonítható. Japánban azonban a népesség nyomása és az alulfoglalkoztatottság

[19] A közlekedési szektor termékszerkezetében nagyon nagyok a különbségek, így a becslés megbízhatósága igen kétes.



2. ábra
TÉNYEZŐKÖLTSÉGEK ÉS OPTIMÁLIS TÉNYEZŐARÁNYOK
(LOGARITMIKUS LÉPTÉKBEN)

nagy bérkülönbségeket okoz az egyes szektorok között. A *2. ábrán* látható, hogy a japán mezőgazdaság alacsony tőkeintenzitása inkább az alacsony bérekre, mint a termelési függvény alakjára vezethető vissza; ha itt is olyan alacsonyak lennének a bérkülönbségek, mint az Egyesült Államokban, akkor elemzésünk szerint a japán mezőgazdaság az amerikaihoz hasonló, viszonylag tőkeintenzív szektorrá válna. Hasonlóképpen, a magas bérek a viszonylag magas tőkeintenzitáshoz járulnak hozzá, ezt Japánban az olyan szektorokban figyelhetjük meg, mint az energia és a színesfémek.

Az országok közötti helyzetet tekintve, a szektorok viszonylagos tőkeintenzitásában mutatkozó szóródásnak nagy jelentősége van a nemzetközi kereskedelemben. Eredményeink azt mutatják, hogy a szektorok tényezőarányok szerint vett sorrendjének változása nem kivételes, hanem normális esemény. Egyedül az olyan szektorok képeznek kivételt, mint az energia és a ruházati ipar, amelyek esetén a δ értéke kirívóan magas, illetve alacsony. Viszonylagos helyzetét nagymértékben változtató típus például a *2. ábrán* az ércbányászat, amely — magas helyettesítési rugalmassága miatt — az Egyesült Államokban meglehetősen tőkeintenzív, Japánban viszont munkaintenzív. A kevésbé szélsőséges esetekben az olyan nagy relatív bérkülönbségek, mint amelyek Japán és az Egyesült Államok között vannak, viszonylag kis rugalmasságkülönbség esetén is a tényezőfelhasználás megfordulását eredményezik, de kisebb bérkülönbségek esetén a sorrend állandóbb lenne.

Eredményeink megközelítő jellege ellenére ez a bizonyság a tőkeintenzitás jelentős számú helycseréjéről túl erős ahhoz, hogy figyelmen kívül hagyhatnánk.[20] Az áruk tényezőintenzitási sorrendjének állandósága — amit Samuelson [13] és más kereskedelemelméletek feltesznek — a gyakorlatban csak nagyon korlátozottan látszik alkalmazhatónak.

A tényezőhelyettesítés eltérő lehetőségeinek — a különböző jövedelemszintek mellett — fontos következményei vannak a munka és a tőke elosztására is. Ha nem lenne ilyen eltérés, akkor a hatékonyságkülönbségüket figyelmen kívül hagyva, a munka és tőke szektorok közötti elosztása összhangban lenne a kibocsátás megoszlásával.[21] Valójában lényeges eltérések uralkodnak. A növekvő jövedelemmel az elsődleges termelés részaránya csökken a teljes kibocsátásban, és a magas helyettesítési rugalmasság következtében az elsődleges foglalkoztatásban még gyorsabb a csökkenés.[22] Másrészt a szolgáltató szektorban felhasznált munka részesedési arányainak a jövedelemmel párhuzamos növekedése elsősorban az alacsony helyettesítési rugalmasságnak tulajdonítható, mivel a szolgáltatások részaránya a teljes kibocsátásban nem növekszik feltűnően [5].

C) A hatékonyság és az árak szóródásai

Bár a kereskedelem elméletében a fő figyelmet erre fordították, a tényezőarányok mégsem egyedüli meghatározói a viszonylagos áraknak. Egy teljes magyarázatnak számításba kell vennie a viszonylagos hatékonyság különbségeit is az országok és iparágak között, amelyekről viszont kevés rendszerezett ismeretünk van. Először bemutatjuk a szektorok viszonylagos hatékonyságának mértékeit Japán és az Egyesült Államok összehasonlításában, azután pedig megvizsgáljuk a három paraméter együttes hatását az országok közt eltérő viszonylagos árakra.

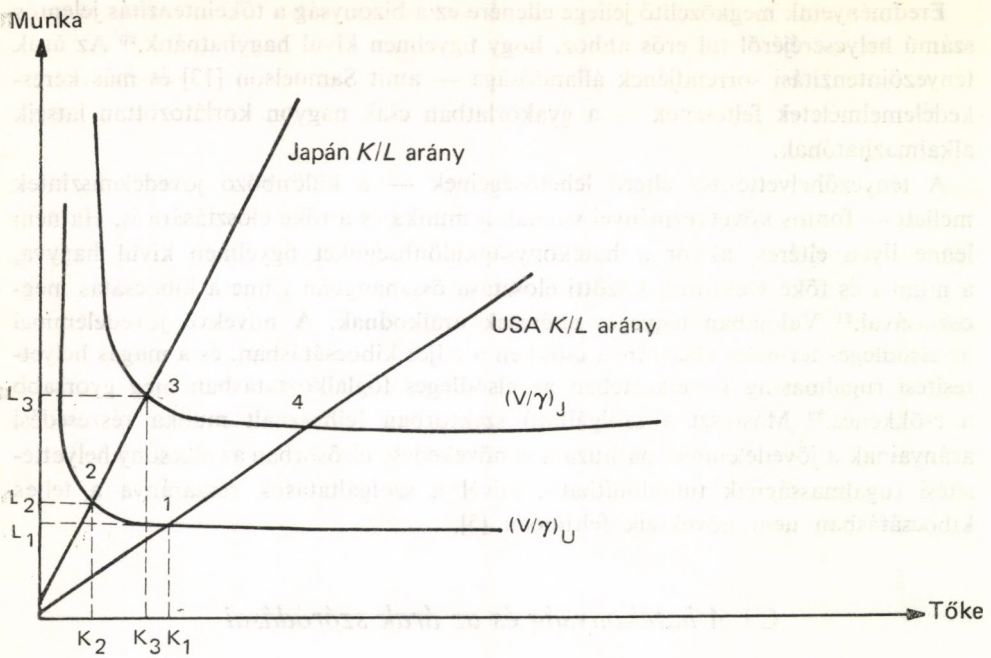
1. *A viszonylagos hatékonyság becslései.* A IV. fejezet *A)* pontjában egyedül a termelési függvény tulajdonságaiból vezettük le a σ és a δ értékeit, ezekből most az áruk viszonylagos árainak felhasználásával meg tudjuk becsülni a γ_J/γ_U viszonylagos hatékonyságot. A legegyenesebb utat fogjuk követni, az egyes országok izokvantjait az áruk árából határozzuk meg, majd az izokvantok összehasonlításából nyerjük a viszonylagos hatékonyságokat. Az áradatok további hatékonysági következményeit a későbbiekben tekintjük át.

A viszonylagos hatékonyság mérésének e módszerét két országra a *3. ábrán* szemléltetjük. Az Egyesült Államok tényezőarányait és tényezőárait az 1. számú pont,

[20] Minhas külön cikkben fogja tárgyalni eredményeinknek ezt az oldalát és következményeit a tényezőárak kiegyenlítődésének kérdésére.

[21] *Johansen* [8] tárgyal olyan növekedési szektormodelleket, amelyek a Cobb—Douglas függvényt használják fel.

[22] Alulfoglalkoztatottság esetén ezt a tendenciát az alacsony bérek és a mezőgazdaság alacsony hatékonysága túllicitálhatja. Japánban ez történik.



3. ábra
A VISZONYLAGOS HATÉKONYSÁG SZÁMÍTÁSI MÓDSZERE

Japánét a 3. számú pont mutatja. A hatékonyságkülönbségek semlegességének feltételezése lehetővé teszi, hogy ebből a két megfigyelésből, ahogy azt az *5. táblázatban* láttuk, megkapjuk a σ és δ paramétereket, és ezzel mindkét ponthoz meghatározhatjuk a rajtuk átmenő izokvantot. Az 1. számú pont L_1 munkaráfordításából és a (12) egyenletből az Egyesült Államok izokvantjának 2. számú pontjához a következő formulával számíthatjuk ki a munkaráfordítást:

$$\frac{V}{\gamma_U} = L_1[\delta x_U^{-\varrho} + (1-\delta)]^{\frac{-1}{\varrho}} = L_2[\delta x_J^{-\varrho} + (1-\delta)]^{\frac{-1}{\varrho}}, \tag{33}$$

ahol x_U és x_J a tőkefelhasználás az Egyesült Államokban, illetve Japánban. A 2. számú pont a tényezőráfordítások azon kombinációja, amely Japán tényezőarányaival állít elő egységnyi kibocsátást az Egyesült Államok γ_U hatékonysági szintjén. A 3. pont a tőke és a munka azon mennyiségét adja meg, amelyet Japán valójában felhasznált ugyanehhez a kibocsátáshoz, vagyis az 1000 $ kibocsátásra jutó tőkét és munkát, az adott áru relatív árkülönbségeinek megfelelően korrigálja. A viszonylagos hatékonyság, ha a kétfajta ráfordítást tekintve semleges, megmérhető akár a munka, akár tőke felhasználásának arányával a 2. és 3. pont között.

$$\frac{\gamma_J}{\gamma_U} = \frac{L_2}{L_3} = \frac{K_2}{K_3}.$$

A CES termelési függvény tulajdonságai mellett a viszonylagos hatékonyság nem függ a kiválasztott ponttól, így ugyanezt az eredményt kapjuk az L_1/L_4 értékből is. A viszonylagos hatékonyságok kiszámolását ezzel a módszerrel a *7. táblázatban* mutatjuk be, az *5. táblázat* valamennyi olyan szektorára, amelyre az áruk viszonylagos árairól az adatok rendelkezésre álltak.

A hatékonysági szint mediánja a feldolgozóiparban 0,43 (a hozzáadott értékkel súlyozva 0,35 adódik), ami nagyjából megegyezik a japán és amerikai hatékonyság azon átlagos arányával, amit a III. fejezetben határoztunk meg.[23] Az elsődleges termelésben jelentősen alacsonyabb ez az érték, a mezőgazdaságban és a szénbányászatban csupán a hetede az amerikai szintnek.

7. táblázat

A VISZONYLAGOS HATÉKONYSÁG SZÁMOLÁSA: JAPÁN AZ EGYESÜLT ÁLLAMOKKAL ÖSSZEVETVE[a]

ISIC szám	Szektor	Értékek a 3. ábrához			Hatékonysági arány
		L_1	L_2	L_3	γ_J/γ_U
	Kitermelő ágak				
01—03	Mezőgazdaság	0,083	0,468	3,740	0,13
10	Szénbányászat	0,166	0,245	1,724	0,14
12	Ércbányászat	0,117	0,279	0,876	0,32
14, 15	Nem fémes ásványok bányászata	0,143	0,326	0,583	0,56
	Feldolgozóipar				
20—22	Feldolgozott élelmiszerek	0,046	0,083	0,339	0,25
23	Textília	0,104	0,145	0,332	0,44
241, 242, 29	Bőráru	0,110	0,123	0,291	0,42
27	Papír	0,063	0,112	0,332	0,32
31	Vegyi anyagok	0,051	0,093	0,269	0,35
321, 329	Olajtermékek	0,025	0,095	0,077	1,23
322, 329	Széntermékek	0,047	0,203	0,215	0,95
33	Nem fémes ásványi termékek	0,122	0,150	0,859	0,17
341, 35	Vas és acél	0,083	0,153	0,171	0,90
342	Színesfémek	0,058	0,116	0,169	0,69

[a] Források:
L_1=az Egyesült Államok munkafelhasználása, munkásév per 1000 $, Bickel [4] művéből.
L_2=Japán munkafelhasználása ugyanezen kibocsátás mennyiséghez az Egyesült Államok hatékonysága mellett, a (33) egyenletből.
L_3=A valóságos japán munkaráfordítás Bickel [4] művéből.
$\gamma_J/\gamma_U=L_2/L_3$.

[23] A III. fejezet négy példája közül egyik sem illik jól az itt alkalmazott nagyobb iparágakra, legnagyobb az eltérés az acél γ_J/γ_U értékénél van, ami a 3. *táblázat*ban sokkal alacsonyabb hatékonyságot mutat.

A viszonylagos hatékonyság e különbségeinek megmagyarázásakor három tényező jöhet számításba:

1. Kétségtelen, hogy a japán elsődleges termelésben a tőke és a munka alacsonyabb hatékonyságának nagy részét a korlátozott természeti erőforrások magyarázzák.

2. A [6] mű a japán exportcikkek és importhelyettesítők területén a gyorsabb termelékenység növekedés egy okaként a verseny nyomását jelölte meg. Az alacsonyabb hatékonyságú szektorok (mezőgazdaság, bányászat, élelmiszer, nem fém ásványok) Japánban a hazai piac számára termelnek, és vagy a szállítási költségek vagy a vámok védik őket a külföldi versenytől.

3. Japán viszonylag hatékony szektoraira (kőolajtermékek, széntermékek, acél, színesfémek) jellemző a magas tőkeintenzitás, a nagy üzemméret és a folyamatos üzem. Valószínűleg technológiai okok magyarázzák, miért könnyebb elérni ilyen feltételek mellett az Egyesült Államokéval összemérhető hatékonysági szintet.

A viszonylagos hatékonyságot magyarázó előbbi és más hipotézisek ellenőrzéséhez meg kell várni, hogy több országra is készüljenek ilyen tanulmányok.

2. *Az áruk viszonylagos árai.* Mivel a termelési függvény mindhárom paraméterére van becslésünk, meg tudjuk vizsgálni ezek szerepét az áruk viszonylagos árainak kialakulásában.

Ehhez behelyettesítjük a (28) formulába az Egyesült Államok, Nyugat-Európa és Japán jellemző w/r értékeit:[24]

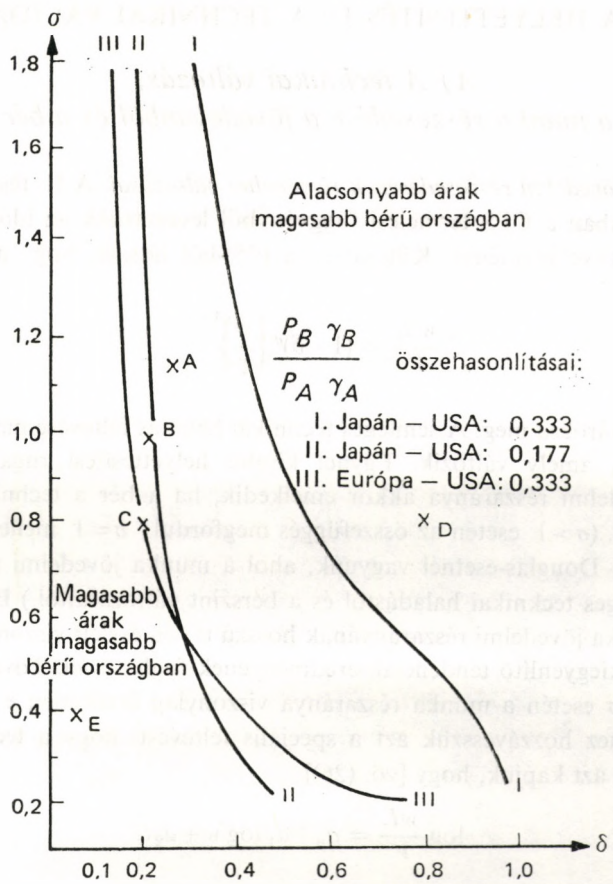
$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{W_A}{W_B}\frac{\gamma_B}{\gamma_A}\left[\frac{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}\left(\frac{w_A}{r_A}\right)^{\sigma-1}+1}{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}\left(\frac{w_B}{r_B}\right)^{\sigma-1}+1}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

és a kapott értékeket felhasználjuk az állandó árarányok görbéinek (izoprix görbék) megszerkesztésére. Amint azt a II. fejezet *D)* pontjának 6. alpontjában jeleztük, elemzésünkben az árak csupán a közvetlen tőke- és munkaköltségeket tükrözik. A *4. ábrán* három ilyen görbét mutatunk be. Az I. görbe a Japán (*B*) és az Egyesült Államok (*A*) között jellemző 0,33-as hatékonysági arány és az egyenlő árak feltételezésével él. A feldolgozóipari szektorokra a *7. táblázat*ban kiszámolt P_J/P_U valójában 0,53 körül van, amit a II. görbe szemléltet. Mivel a hatékonyság változásának ugyanaz a hatása, mint az árváltozásnak, a II. görbe az egyenlő árak és a 0,18 értékű hatékonyság vonalaként is értelmezhető. A III. görbe az I. görbének felel meg, csak az Európa és az Egyesült Államok közötti összehasonlítást tükrözi, 0,33 hatékonysági arány és egyenlő árak mellett.

A *4. ábra* a következő általános elvet tükrözi: Ha a δ, a σ vagy a γ_A/γ_B hányados értéke magas, akkor a magasabb bérű (*A*) országban alacsonyabbak az árak. A σ magasabb értéke tekintélyes mértékben ellensúlyozhatja a δ alacsony értékét. Az 1.

[24] A w/r feltételezett értékei: Egyesült Államok, 21,3; Európa, 5,0; Japán, 1,42.

ábra öt illusztratív termelési paraméteregyüttesére a *4. ábrán* is megmutathatjuk a σ és δ paraméterek jellegzetes kombinációit. Az *5. táblázat* ipari szektorainak jelentős részére, azokra, amelyeket az *A—B—C* pontok szemléltetnek, a *viszonylagos* árak meghatározásában a helyettesítési rugalmasság eltéréseinek szerepe jóval nagyobbnak látszik, mint a δ-é.



4. ábra
σ ÉS δ HATÁSA AZ ÁRARÁNYOKRA

Japán és az Egyesült Államok valóságos árkülönbségeit azonban a szektorok által vásárolt ráfordítások költségei ugyanúgy befolyásolják, mint a hozzáadotértékük komponensei. A *7. táblázat* 10 feldolgozóipari szektorára a (28) alapján elvégzett számítások szerint Japánban a közvetlen költségek az Egyesült Államokhoz képest 0,30—0,95-re tehetők, de ez a komponens az összes költségnek átlagban csak a 35%-a körül mozog. Ugyanakkor Japánban a vásárolt ráfordítások átlagos ára ezekben a szektorokban 0,93-tól 1,70-ig terjed az Egyesült Államokhoz képest,

ami a közvetlenül felhasznált tényezők alacsonyabb költségét bőven ellensúlyozhatja.[25] A viszonylagos árak különbségeinek kielégítő magyarázata ezért megköveteli a tényezők teljes felhasználásának elemzését, pusztán a közvetlen felhasználások nem elegendőek.[26]

V. A HELYETTESÍTÉS ÉS A TECHNIKAI VÁLTOZÁS

A) A technikai változás, a munka részesedése a jövedelemből és a bér

1. *A munka jövedelmi részesedésének történelmi változásai.* A II. fejezet *D)* pontjának 5. alpontjában a CES termelési függvényből levezettünk az idősorokra vonatkozó néhány következményt. Különösen a (25)-ből látszik, hogy a munka részesedését a

$$\frac{wL}{V} = (1-\delta)^{\sigma}\left(\frac{w}{\gamma}\right)^{1-\sigma}. \tag{25a}$$

összefüggés határozza meg. A semleges technikai haladás feltevése mellett γ az egyetlen paraméter, amely változik. Egynél kisebb helyettesítési rugalmasság esetén a munka jövedelmi részaránya akkor emelkedik, ha a bér a technikai haladásnál gyorsabban nő. ($\sigma>1$ esetén az összefüggés megfordul; $\sigma=1$ mellett pedig a megszokott Cobb—Douglas-esetnél vagyunk, ahol a munka jövedelmi részaránya független a semleges tecknikai haladástól és a bérszint változásaitól.) Ezekkel a fogalmakkal a munka jövedelmi részarányának hosszú távon észlelt viszonylagos állandósága egymást kiegyenlítő tendenciák eredményének fogható fel. Továbbmenve, egyhez közelálló σ esetén a munka részaránya viszonylag érzéketlen e tendenciákra.[27]

Ha mindehhez hozzávesszük azt a speciális feltevést, hogy a technikai haladás üteme állandó, azt kapjuk, hogy [vö. (26)]

$$\log\frac{wL}{V} = a_0 + a_1 \log w + a_2 t, \tag{34}$$

[25] Az importált nyersanyagoktól függvén Japán egy kicsit kivételes eset az ipari országok között. Másik két ország között a közvetlen tényezőköltségek eltérései valószínűleg jobban jellemzik a termelés teljes költségének eltérését.

[26] *Bickel* [4] elemzi, hogy milyen mértékben magyarázhatók a két ország árkülönbségei a teljes tényezőfelhasználással. Megmutatja, hogy az átlagos tőkeintenzitás (ami δ-t tükrözi) kombinálva a teljes tényezőintenzitási aránnyal (ami az egész gazdaság súlyozott helyettesítési rugalmassága) a viszonylagos árak egy egészen jó előrebecslését szolgáltatja. Ezt az eredményt a (28) egyenletből lehet levezetni, feltéve, hogy γ_J/γ_U nem szóródik túlzottan.

[27] Mindamellett (25*a*) nem adja meg a munkarészesedés változásának igazi okozati elemzését, ha a bér meghatározása a rendszer többi változójával együtt, szimultán módon történik. A bérszint exogénnek is tekinthető, mint például Lewis növekedési modelljében [11], amely olyan gazdaságokra alkalmazható, ahol nagymértékű rejtett falusi munkanélküliség van.

ahol

$$a_0 = \sigma \log (1-\delta) + (\sigma - 1) \log \gamma_0, \tag{35}$$

$$a_1 = 1-\sigma, \quad a_2 = -\lambda(1-\sigma). \tag{35a}$$

Az a_1 és a_2 becslései segítségével a (35*a*)-ból könnyű becslést adni a λ paraméterre és a helyettesítési rugalmasságra, amely $1-a_1$. A (34) egyenletet a legkisebb négyzetek módszerével az Egyesült Államok termelésének (a farmok termelését kihagyva) adataira illesztettük. Az adatokat 1909-től 1949-ig Solow cikke adja meg.[28] eredményünk: $a_1 = 0{,}431$ és $a_2 = -0{,}003$. σ ennek megfelelő becslése 0,569, és a λ paraméteré 0,008, ami a termelékenység évi 1,83%-os növekedési ütemének felel meg. (Solow [14] 316. old. 1,5%-ot mutat ki; lásd Abramowitz [1]-et is, 11. old.).

Ellenőrizni tudjuk azt, hogy a helyettesítés rugalmassága mennyire szignifikánsan tér el a Cobb—Douglas hipotetikus értéktől, egytől, amiből a_1 és a_2 paraméterek nulla értéke következik. A próba egyenértékű a többszörös korrelációs együttható szignifikanciapróbájával, amely együtthatónak 0,740 az értéke. Egy F-próba 41 adat esetében nagyfokú szignifikanciát mutatott ki. Az alternatív hipotézis, amikor a tőke/termelés és a munka/termelés értékei az időben állandóak: az $a_1 = 1$ értéknek felel meg. Mivel az a_1 becslésének standard hibája 0,042, ezt a hipotézist szintén el kell vetni.

Ugyanúgy, ahogy a keresztmetszeti elemzések esetében, itt is nyomósak a bizonyítékok arra, hogy a helyettesítési rugalmasság nulla és egy között van. A feldolgozóipari szektorok I. fejezetbeli keresztmetszeti elemzésével némileg inkonzisztens az, hogy a helyettesítési rugalmasság idősoros becslése a nemzetközi összehasonlításokból kapottnál jóval kisebb. Az idősoros adatok azonban tartalmazzák a szolgáltatásokat is, amelyeknek helyettesítési rugalmasságáról keveset tudunk.

A (34) egyenlet legkisebb négyzetekkel való becslését csak közelítésnek szabad tekinteni. Ez az eljárás ugyanis a szimultán egyenletekre vonatkozó ismeretlen mértékű torzítást tartalmaz. A pontosabb módszerek megkövetelnék a (34) határtermelékenységi összefüggésben és a termelési függvényben fellépő hibatag típusának részletesebb specifikációját, de erre nem vagyunk felkészülve. Az eredmények ezért csak ideiglenesnek tekinthetők. Azok a nehézségek, amelyeket a *B)* pontban majd megemlítünk, kétségtelenül a becslési módszerek megválasztásához fűződnek.

2. *A termelési függvény egy próbája.* Mint azt a keresztmetszeti elemzés esetében tettük, itt is megpróbáljuk ellenőrizni azt a termelési függvényt, amelyet előző eredményeink implicite tartalmaznak. A próba megint csak szigorú, amennyiben tőkeadatokat használ fel, amelyeket a határtermelékenységi összefüggés illesztésekor nem alkalmaztunk. A (34) illesztésével megkaptuk a σ és a λ becsléseit, de γ_0 és δ

[28] Az adatokat Solow [14] 1. táblázatának oszlopaiból számoltuk ki, a következőképpen: wL/V úgy adódott, hogy a (4) oszlopot (a vagyon részesedése a jövedelemből) kivontuk egyből;

$w = (wL/V)(V/L)$, ahol V/L az (5) oszlop (nem farm GNP per munkásóra a magánszektorban); t az idő, 1929-től, években mérve.

között csak egy összefüggést kaptunk: a (35)-öt. A továbbiakban tőkeadatok segítségével külön-külön becsüljük e két paramétert.

Legyen

$$q = \frac{1}{\text{antilog}\,\frac{a_0}{\sigma}}.$$

Mivel

$$\varrho = \frac{1-\sigma}{\sigma},$$

azért a (35)-ből

$$q = \frac{\gamma_0^{\varrho}}{(1-\delta)}.$$

Ha a termelési függvénybe bevezetjük, hogy a $\gamma = \gamma_0(10)^{\lambda t}$ legyen, és γ_0-t q-val fejezzük ki, akkor némi átalakítás után

$$X_1 - X_2 = \frac{\delta}{1-\delta}, \tag{36}$$

ahol

$$X_1 = q\left(\frac{K}{V}\right)^{\varrho} 10^{\lambda\varrho t}, \quad X_2 = \left(\frac{K}{L}\right)^{\varrho}. \tag{36a}$$

Akár a nemzetközi összehasonlítások esetében, itt is a (36) bal oldalának állandósága lenne a legszigorúbb próba, mert az pontos illeszkedésre vallana, és egyúttal becslést adna a δ paraméterre. A szigorú állandóság hiányában a $\delta/(1-\delta)$-át mint $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ átlagot tudjuk megbecsülni; ez a $\delta = 0{,}519$ becslést adja.[29] Ha az időt években mérjük 1929-től, a_0 értéke — 0,080, tehát γ_0 értéke 0,584. Az Egyesült Államok kibocsátásának (a farmok termelését levonva) termelési függvénye az 1929—1949 időszakra:

$$V = 0{,}584(1{,}0183)^t(0{,}519K^{-0{,}756} + 0{,}481L^{-0{,}756})^{-1{,}322}. \tag{37}$$

Ezt a termelési függvényt összevetettük a tényleges kibocsátással, az illeszkedés kielégítő. A 41 év közül 22-ben az előrebecslési hiba nem több 4%-nál, és 31-ben nem több 8%-nál. Az előrebecslés maximális hibája −13,3% (1933) és +10,7% (1909) volt.

Lényeges még, hogy az az öt év, amelyben a valóságos kibocsátás több mint 8%-kal maradt el az előrebecsült értéktől, pontosan az 1930—1934 depressziós évekre esik. Ez elvileg ésszerű: az a rugalmatlanság, amit a munka és a tőke súlyos alulfoglalkoztatottsága hozott magával, az alkalmazott erőforrások esetében is alacsony hatékonyságot okozott (a gondolatmenet egy kifejtését lásd Arrow [3]). Ha a depressziós éveket kizártuk volna, még jobb illeszkedést remélhettünk volna.

[29] X_1 és X_2 értékeket megintcsak a [14] 1. táblázatából számoltuk. K/L-et a (6) oszlop adja (felhasznált tőke per munkaóra); $K/V = (K/L)(V/L)$, ahol V/L az (5) oszlop.

B) A jövedelemrészesedési arányok és a tőke—munka arány

Egy másik próbát ad a (23), kevésbé kielégítő eredményekkel. Logaritmikus formában a munka és a tőke jövedelmének aránya a következőképpen kapcsolódik a tőke—munka arányhoz:

$$\log\left(\frac{wL}{rK}\right) = \log\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) + \varrho \log\frac{K}{L}. \tag{38}$$

Pozitív ϱ esetén a tőke—munka arány állandó hosszú távú emelkedése a munka részesedési arányát növelné, de igen szerény mértékben, hacsak ϱ értéke nem nagy.

A (38) összefüggést a legkisebb négyzetek módszerével illesztettük, az adatok ugyanazok voltak, mint az előző részben.[30] A ϱ paraméter becsült értéke — 0,095 lett, ami a helyettesítési rugalmasságra egynél valamivel nagyobb értéket ad. A ϱ becslésének standard hibája 0,098, amivel a ϱ pozitivitásának hipotézise még nem dől meg, viszont ezek az értékek nincsenek összhangban az *A)* pont eredményeivel.

Nem világosak a kétfajta becslés ellentmondásának okai. Ha a (34) összefüggés és a (37) termelési függvény mindegyike pontosan fennállna, akkor ugyanazokkal a ϱ és δ értékekkel a (38) összefüggésnek is teljesülnie kellene. Ezért az ellentmondás gyökere bizonyosan abban rejlik, kogy a statisztikai becslési módszerek a hibákra különböző implicit feltevéseket tesznek. A problémát ebben a cikkben nyitva hagyjuk.

Kravis ([9], 940—941. old.) lényegében ugyanezt a módszert alkalmazta a (24) összefüggés formájában, de ő az egész gazdaság adataira (szemben azzal, hogy mi a farmok termelését kizártuk). Becslése a helyettesítési rugalmasságra 0,64, ami az *A)* pont eredményeihez sokkal közelebb áll.

V. BEFEJEZÉS

Cikkünk számos témát érintett: a termelés elméletét, a jövedelem megoszlását a termelési tényezők között, a technikai haladást, a hatékonyság nemzetközi különbségeit, a komparatív előnyök forrásait. Ez a széles spektrum, amint bevezetőnkben szóltunk róla, egyrészt a tőke és a munka közötti helyettesítés mértékének alapvető gazdasági jelentőségét tükrözi. Másrészt rámutat a megoldatlan kérdések széles körére, amelyek további kutatásra és jobb adatokra várnak. (Harmadrészt kétségkívül a cikk szerzőinek nagy száma is szerepet játszik ebben) Mivel munkánk nem alkalmas arra, hogy tartalmát részletesen összefoglaljuk, megelégszünk azzal, hogy egyeseket röviden megismétlünk eredményeink közül, másokon elmeditálunk, és adunk néhány javaslatot a további kutatásra.

[30] $wL/rK = (wL/V)/[1-(wL/V)]$.

A) Eredmények

Bizonyítékokat szolgáltattunk arra, hogy a feldolgozóiparra valószínűleg jellemző az egynél kisebb tőke és a munka közötti helyettesítési rugalmasság. Gyengébb jelek ennek a fordítottjára utalnak az elsődleges kitermelő ágakban. Bár eredeti bizonyításunk az egységnyi munkára jutó hozzáadott érték és a bérek közötti összefüggés elemzésére támaszkodott, az eredményeket a termelési függvények egy új, az eddig használatos függvényeknél jobban kezelhető és (úgy hisszük) a valósághoz közelebb álló osztályának bevezetésével értelmeztük.

Jóllehet empirikus munkánkat azzal a naiv hipotézissel kezdtük meg, hogy egy adott iparág különböző országokhoz tartozó adatait, azokat nagyjából ugyanabban az időpontban véve, egy közös termelési függvényhez tartozónak tekinthetjük, később úgy találtuk, hogy ez a hipotézis nem tartható fenn. Elég jó eredményeket kaptunk viszont egy ennél gyengébb, de még tartalmas feltevést bevezetve, nevezetesen azt, hogy a hatékonyság nemzetközi eltérései a tőkére és a munkára való hatásukat tekintve semlegesek. A hatékonyság nemzetközi különbségeinek közelebbi elemzése arra a gondolatra vezetett, hogy e tényező szoros kapcsolatban lehet a kereskedelem komparatív előnyeinek megoszlásával.

Végezetül közelítésmódunk a termelési tényezők jövedelmi részesedésének sokat vitatott kérdéséhez is hozzátesz valamit. Ha a helyettesítési rugalmasságok átlagban egynél kisebbek, akkor szükségképpen csökken a tőkének, e gyorsan növekedő tényezőnek a részesedése a nemzeti termékben. Ez a valóságban is így volt. A CES termelési függvények esetében viszont az is lehetséges, hogy a semleges technikai haladás hatása a viszonylagos részesedésekre a reálbérek növekedését visszájára fordítja.

B) Gondolatok

Abban a munkában, ami azóta a „Leontief-féle szűkösségi paradoxon" néven vált ismertté [10], Leontief megkockáztatott egy hipotézist, miszerint az Egyesült Államok nem azért exportál viszonylag munkaintenzív javakat, mintha a megszokott módon mért munka olyan bőven állna rendelkezésére, hanem azért, mert az amerikai munka hatékonysága kb. háromszorosa a külföldi munka hatékonyságának. Jelöléseink szerint ez egyenértékű azzal az állítással, hogy a hatékonyság nemzetközi eltérései a β/α vagy, ami ugyanaz, a δ változásában nyilvánulnak meg. Ezzel szemben mi arra a hipotézisre hajlunk, hogy β/α az országok között konstans, a hatékonyság változásai semlegesek. Japán és az Egyesült Államok összehasonlításakor azonban annak is láttuk némi jelét, hogy Amerika előnye a hatékonyságot tekintve éppen a tőkeintenzív iparágakban a legkisebb. Ha ez a sajátosság beigazolódna, akkor bizonyára elvezetne a Leontief-jelenség egy másik értelmezéséhez. Emellett azonban felmerül a kérdés, miért éppen ennek az összefüggésnek kell fennállnia a hatékonyságkülönbség és a tőkeintenzitás között. A IV. fejezet *C)* pontjában megemlítettünk

néhány lehetséges magyarázatot, bár az olvasó egészen másokat is találhat. Nem foglalkoztunk egy esetleges harmadik tényezővel sem, az extern hatásokkal, figyelmen kívül hagytuk a bruttó beruházás jelentőségét a fejlett technika elterjesztésében, és így lehet, hogy valami fontos dolgot elhanyagoltunk.

Egy másik kibontakozó ága a közgazdasági kutatásnak, ahol eredményeinknek jelentősége lehet: a növekedéselmélet. J. D. Pitchford, a Melbourne Egyetemről egy még publikálatlan tanulmányában[31] bevezeti a CES termelési függvényt a gazdasági növekedés egy makroökonómiai modelljébe, és arra a következtetésre jut, hogy ez a módosítás legalábbis néhány esetben újra biztosítja a megtakarítási hányad bizonyos hatását a növekedés végső ütemére. Még érdekesebbek a várható következmények az általános egyensúly dezaggregált modelljeiben. Szisztematikus különbségeket véve a szektorok helyettesítési rugalmasságaiban és a kereslet jövedelemrugalmasságaiban, előfordulhat, hogy maga a gazdasági fejlődési folyamata megváltoztatja az egész gazdaság helyettesítési rugalmasságát.

C) Megoldatlan kérdések

E cím alatt csak utalásokra szorítkozunk. Először is mihelyt több országra és iparágra lesznek használható tőkeadatok, ellenőrizhetővé válik valamennyi eredményünk érvényessége és általánossága. Például, elmélkedéseink az eltérő hatékonyság okairól elsősorban az Egyesült Államok és Japán összehasonlítására támaszkodtak. Egy szélesebb körű vizsgálat könnyen ellentétbe kerülhet velük.

A volumenhozadék kérdése szintén tisztázatlan. Tudomásul vesszük, hogy az állandó volumenhozadéknak és az összes paraméter állandóságának szigorú tesztjét el kell vetni. Hasznos lenne azonban kiterjedtebben kutatni a növekvő volumenhozadék lehetőségét. Vajon a (16) egyenletre támaszkodva meg lehet-e úgy választani a $C(K)$ függvényt, hogy az a növekvő volumenhozadékra adjon próbát? Mit mutatna ez a nemzetközi összehasonlítás esetében, különös tekintettel a kevésbé fejlett országokra?

Végezetül a további dezaggregálás kérdése is feltárásra vár. Nem annyira a finomabb ipari osztályozásra, hanem a ráfordítások dezaggregálására gondolunk itt. Eredményesen tovább bontható-e a munka- és a tőkeráfordítás? Mi a helyzet a természeti erőforrásokkal és a más szektoroktól vásárolt anyagokkal?

[31] Azóta megjelent: Growth and the Elasticity of Factor Substitution Economic Record. 1960 december, 491—500. old. (A levonathoz csatolt lábjegyzet).

IRODALOM

[1] *Abramovitz, M.:* Resource and Output Trends in the United States Since 1870. American Economic Review, 46. évf. (1956) 5—23. old.

[2] *Allen, R. G. D.:* Mathematical Analysis for Economists. London, 1938.

[3] *Arrow, K. J.:* Toward a Theory of Price Adjustment. Megjelent: *Abramovitz, M.* (és mások): The Allocation of Economic Resources c. kötetben, Stanford, California, 1959, 41—51. old.

[4] *Bickel, G. W.:* Factor Proportions and Relative Prices in Japan and the United States, az Ökönometriai Társaság nyári találkozóján felolvasott előadás, Stanford, California, 1960.

[5] *Chenery, H. B.:* Patterns of Industrial Growth. American Economic Review, 50. évf. (1960) 624—654. old.

[6] *Chenery, H. B.—Shishido, S.—Watanabe, T.:* The Pattern of Japanese Growth, 1914—1954. 1960 (soksz.)

[7] *Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.—Pólya, G.:* Inequalities. Cambridge, England, 1934.

[8] *Johansen, L.:* Rules of Thumb for the Expansion of Industries in a Process of Economic Growth. Econometrica, 28. évf. (1960) 258—271. old.

[9] *Kravis, I. B.:* Relative Income Shares in Fact and Theory. American Economic Review, 49. évf. (1959) 917—949. old.

[10] *Leontief, W. W.:* Domestic Production and Foreign Trade: The American Capital Position Reexamined. Proceedings of the American Philosophical Society, 97. (1953) 331—349. old.

[11] *Lewis, W. A.:* Economic Development with Unlimited Supplies of Labor, The Manchester School. 22. évf. (1954) 139—191. old.

[12] *Minhas, B. S.:* An International Comparison of the Rates of Return on Capital in Manufacturing Industry. Az Ökonometriai Társaság nyári találkozóján felolvasott előadás, Stanford, California, 1960.

[13] *Samuelson, P. A.:* International Trade and the Equalization of Factor Prices. Economic Journal, 58. évf. 1948. 163—84, és ugyanő: International Factor Price Equalization Once Again. ugyanott, 59. évf. 1949. 181—197. old.

[14] *Solow, R. M.:* Technical Change and the Aggregate Production Function. Review of Economics and Statistics, 39. évf. 1957. 312—320. old.

[15] *Solow, R. M.:* A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics, 65. évf. 1956. 65—94. old.

[16] *Solow, R. M.:* Technical Change and the Aggregate Production Function. Review of Economics and Statistics, 60. évf. 195. 413. old.

[17] *Solow, R. M.:* A Skeptical Note on the Constancy of Relative Shares. American Economic Review, 48. évf. (1958) 618—631. old.

[18] *Swan, T. W.:* Economic Growth and Capital Accumulation. Economic Record, 32. évf. (1956) 334—361. old.

FÜGGELÉK

A nemzetközi adatokat a munkaráfordításról és a bérszínvonalról a következő öt táblázat tartalmazza.

Iparág	Tejtermék		Tartósított zöldség és gyömölcs		Malomipar		Pékáru		Cukorgyártás és -finomítás	
	202		203		205		206		207	
Ország	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $
1. Egyesült Államok (1954)	0,1256	3833	0,1449	2956	0,0903	3955	0,1472	3863	0,1203	3906
2. Kanada (1954)	0,1860	2751	0,1859	2254	0,1254	3138	0,2224	2503	0,1002	3403
3. Új-Zéland (1955/56)	0,2003	2053	0,3410	1604	0,2311	1851	0,3679	1495		
4. Ausztrália (1955/56)	0,2638	1886	0,3339	1715	0,2522	1916	0,3347	1680	0,2641	1846
5. Dánia (1954)	0,3758	1314	0,3735	1214	0,2562	1657	0,3600	1418	0,3348	1503
6. Norvégia (1954)	0,3170	1228	0,5472	1091	0,4932	1503	0,3073	1343		
7. Egyesült Királyság (1951)	0,5077	972	0,5885	761	0,3775	1110	0,6467	846	0,3625	1195
8. Írország (1953)	0,5019	910			0,4964	965	0,6469	857	0,4563	865
9. Puerto Rico (1952)	0,3180	1234	0,9270	484			0,5350	1015	0,3110	1637
10. Kolumbia (1953)	0,3480	937	0,3450	825	0,2090	653	0,6460	595	0,6710	854
11. Brazília (1949)										
12. Mexikó (1951)	0,6188	495	0,7255	364	0,6821	340	0,8190	503	0,6341	524
13. Argentína (1950)	0,7437	396	0,6255	466	0,6507	585	1,7532	353	0,5145	681
14. Salvador (1951)	0,5388	501			0,5040	495	0,5647	526	0,8525	178
15. Dél-Rhodesia (1952)	0,7294	536			0,8475	402	1,2626	398		
16. Irak (1954)										
17. Ceylon (1952)	0,5960	412	1,8150	236	2,0870	163				
18. Japán (1953)	0,5920	501	0,9472	391	0,6606	461	1,9185	253	0,2068	721
19. India (1953)			2,1500	165	5,1523	98	1,8200	236	2,4903	153

Iparág	Dohányáruk		Textil (fonás és szövés)		Kötöttáru		Fa- és fűrészáru		Bútorgyártás	
	220		231		232		250		260	
Ország	L/V	$\omega\$$	L/V	$\omega\$$	L/V	$\omega\$$	L/V	$\omega\$$	L/V	$\omega\$$
1. Egyesült Államok (1954)	0,0945	2738	0,2250	2920	0,2360	2698	0,2026	2993	0,1706	3515
2. Kanada (1954)	0,1161	3023	0,2349	2708	0,2779	2260	0,2171	2546	0,2385	2668
3. Új-Zéland (1955/56)	0,2346	1562	0,3053	1755	0,3985	1548	0,2655	2002	0,3678	1834
4. Ausztrália (1955/56)	0,2251	1810	0,3895	1559	0,3837	1487	0,3517	1794	0,3857	1713
5. Dánia (1954)	0,4044	1211	0,5024	1242	0,5004	1169	0,4905	1312	0,5040	1288
6. Norvégia (1954)	0,2888	1308	0,4993	1127	0,5046	1021	0,4714	1335	0,5228	1342
7. Egyesült Királyság (1951)	0,2598	959	0,5560	874	0,6408	802	0,6359	964	0,6291	1078
8. Írország (1953)	0,3500	1073	0,6813	708	0,8016	701	0,8288	850	0,8037	811
9. Puerto Rico (1952)			0,6290	932	0,7690	983	0,3340	1157	0,6240	861
10. Kolumbia (1953)	0,2960	826	0,3052	1089	0,5302	845	0,6310	696	0,7200	738
11. Brazília (1949)	0,5943	395	0,9334	343	0,9231	364	0,8611	347	0,9415	448
12. Mexikó (1951)	0,1369	627	0,8673	461	0,7968	546	0,8584	358	0,9017	471
13. Argentína (1950)	0,2497	481	0,8212	481	0,8012	523	1,2050	367	1,0863	464
14. Salvador (1951)	0,2470	909	0,8702	456	0,8032	542	1,1198	342	1,7825	377
15. Dél-Rhodesia (1952)	1,1848	246					2,3201	298	1,2970	421
16. Irak (1954)			2,1531	215						
17. Ceylon (1952)	1,0530	256	1,2190	226			2,0220	228		
18. Japán (1953)			1,3901	287	2,0526	252	1,8056	292	1,9668	323
19. India (1953)			2,5320	276			2,3840	188		

Ország / Iparág	Cellulóz, papír, papírlemez 271		Nyomdaipar és könyvkiadás 280		Bőrcserzés és -kikészítés 291		Vegyi alapanyagok és műtrágyák 311		Növényi és állati olajok és zsírok 312	
	L/V	ω $	*L/V*	ω $	*L/V*	ω $	*L/V*	ω $	*L/V*	ω $
1. Egyesült Államok (1954)	0,0945	4508	0,1254	4507	0,1645	3868	0,0814	4754	0,1037	3821
2. Kanada (1954)	0,0924	4262	0,1736	3297	0,2104	2948	0,0973	4036	0,0793	3784
3. Új-Zéland (1955/56)	0,0998	2570	0,2655	2008	0,2851	2014	0,1603	2433	0,1576	2234
4. Ausztrália (1955/56)	0,1927	2334	0,3118	1960	0,3283	2025	0,2341	2060	0,1250	2318
5. Dánia (1954)	0,2519	1428	0,3593	1683	0,3363	1702	0,2477	1553	0,2438	1698
6. Norvégia (1954)	0,2338	1545	0,5350	1457	0,4519	1391	0,2028	1612	0,2668	1524
7. Egyesült Királyság (1951)	0,2503	1154	0,4838	1155	0,4822	1109	0,3641	1251	0,3559	1239
8. Írország (1953)	0,6001	805	0,6221	1024	0,5746	903	0,4900	1178		
9. Puerto Rico (1952)	0,1130[a]	1426[a]	0,3190	1450	0,4510	989	0,2580	1647		
10. Kolumbia (1953)	0,6820	792	0,4590	1166	0,3070	1388	0,3050	1039	0,5840	591
11. Brazília (1949)	0,6355[a]	402[a]	0,5783	682	0,8800	328	0,4208[c]	481[c]		
12. Mexikó (1951)	0,3831	676	0,7880	602	0,8787[b]	430[b]	0,3509	644	0,2167	710
13. Argentína (1950)	0,4016	644	0,7697	591	0,7836	572	0,5335	548	0,7146	561
14. Salvador (1951)	0,9200	457	0,7502	624	0,7764	424	1,1740	298	0,7310	314
15. Dél-Rhodesia (1952)										
16. Irak (1954)										
17. Ceylon (1952)			1,3300	398	2,1890[b]	293[b]			0,7310	197
18. Japán (1953)	0,5077	647	0,8454	494	1,1112	439	0,5868	563	0,4460	507
19. India (1953)	1,3190	277			3,0100	185	0,9410	320	2,2422	157

[a] Cellulózra, papírra, papírlemezre és papírárura is vonatkozik.
[b] A bőrcserzésre és a bőrárukra is vonatkozik.
[c] Valamennyi vegyi anyagra vonatkozik.

Iparág	Különböző vegyi anyagok		Agyagtermékek		Üveg és üvegáruk		Kerámia		Cement	
	319		331		332		333		334	
Ország	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $
1. Egyesült Államok (1954)	0,0720	4509	0,1712	3669	0,1228	4179	0,1958	3408	0,0752	4216
2. Kanada (1954)	0,1120	3377	0,1606	3198	0,1926	3370			0,0635	3910
3. Új-Zéland (1955/56)	0,2189	1906	0,2126	2136	0,2457	2036	0,3172	1775	0,0686	2503
4. Ausztrália (1955/56)	0,1871	1790	0,3351	2066	0,2856	1932	0,3828	1894	0,2562	2071
5. Dánia (1954)	0,2765	1575	0,4629	1329	0,4142	1416	0,4883	1320	0,2034	1738
6. Norvégia (1954)	0,2468	1473	0,5024	1358	0,3742	1484	0,5155	1187	0,2881	1569
7. Egyesült Királyság (1951)	0,3600	1059	0,5941	1109	0,5477	1068	0,7666	835	0,2394	1431
8. Írország (1953)	0,4745	943								
9. Puerto Rico (1952)	0,1680	1554	0,2800	800	0,5680	1079	0,7260	1184		
10. Kolumbia (1953)	0,2740	1094	1,0630	516	0,3290	968	0,6740	783	0,2040	1227
11. Brazília (1949)										
12. Mexikó (1951)	0,3668	748	1,7452	321	0,6707	493	1,2285	328	0,2709	630
13. Argentína (1950)	0,5193	570	1,5700	370	0,8646	570	1,0480	440	0,5443	581
14. Salvador (1951)	0,6830	429								
15. Dél-Rhodesia (1952)										
16. Irak (1954)										
17. Ceylon (1952)	0,8340	293	1,9340	167						
18. Japán (1953)	0,5270	486	2,5310	274	0,9660	467	1,8700	331	0,1693	1025
19. India (1953)	1,0970	337			5,4400	146	3,0470	229	0,8890	319

Ország	Iparág	Vas- és acél-alapanyagipar 341		Színesfém-alap-anyagipar 342		Fémáruk (a gépeket kivéve) 350		Elektromos felszerelések és berendezések 370	
		L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $	L/V	ω $
1. Egyesült Államok (1954)		0,1266	4387	0,1119	4540	0,1332	4314	0,1314	4119
2. Kanada (1954)		0,1410	3769	0,0768	3955	0,1562	3507	0,1579	3536
3. Új-Zéland (1955/56)		0,2340[d]	2190[d]			0,2639	2190	0,3122	1856
4. Ausztrália (1955/56)		0,2338	2306	0,2351	2194	0,3268	1966	0,3431	1898
5. Dánia (1954)		0,2173	1656	0,1775	1695	0,4006	1441	0,4272	1466
6. Norvégia (1954)		0,2918	1568	0,2684	1648	0,4142	1438	0,3266	1489
7. Egyesült Királyság (1951)		0,4503	1224	0,3870	1208	0,5464	979	0,6226	1024
8. Írország (1953)									
9. Puerto Rico (1952)						0,2800	1307	0,1370	1535
10. Kolumbia (1953)		0,4199	1168	0,4560	1526	0,5640	879	0,4270	972
11. Brazília (1949)								0,5350	572
12. Mexikó (1951)		0,4728	594			0,5580	455	0,5537	643
13. Argentína (1950)		0,7920	591	0,5512	542	0,8747	463	0,6826	619
14. Salvador (1951)						2,7322	243		
15. Dél-Rhodesia (1952)									
16. Irak (1954)		1,2866	210						
17. Ceylon (1952)									
18. Japán (1953)		0,7256	664	0,5432	621	1,2388	422	0,8054	517
19. India (1953)		0,9860	450	2,2000	262			1,7170	306

[d] A vason és acélon kívül a színesfémeket is magában foglalja.

A gazdasági jólét és a feltalálást szolgáló erőforrások elosztása[*1]

A feltalálói tevékenységet tágan — az ismeretek termeléseként — értelmezzük. A feltalálást szolgáló erőforrások optimális elosztásának meghatározása — a jóléti gazdaságtan szempontjából — a feltalálási folyamat technológiai jellemzőitől és az ismeretek piacának természetétől függ.

A jóléti gazdaságtan klasszikus kérdését tesszük fel: milyen mértékben vezet a tökéletes verseny az erőforrások optimális elosztásához? Az elmélet hosszú évekig tartó türelmes tökéletesítésének eredményeként tudjuk, hogy bizonyos feltételezések mellett a verseny biztosítja a Pareto-optimum elérését. A modell többek között felteszi, hogy 1. a fogyasztók hasznossági és a termelők transzformációs függvényei a gazdasági rendszerben a termékek jól definiált függvényei, és 2. a transzformációs függvények nem tartalmaznak oszthatatlanságot (szigorúbban kifejezve, a transzformációs halmazok konvexek). A második feltétel nem igényel magyarázatot. Az első ártatlannak látszik, de valójában magában rejti a szokásos modellek két alapvető feltevését. Nem engedi meg a bizonytalanságot a termelési kapcsolatokban és a hasznossági függvényekben, valamint megkívánja, hogy minden, a termelés vagy az egyéni jólét szempontjából fontos termékkel kereskedjenek a piacon. Más a helyzet, ha egy termék — valamilyen okból — nem tehető magántulajdonná.

Három klasszikus okát ismerjük annak, amiért a tökéletes verseny nem képes az erőforrások elosztásának optimalitását elérni: az oszthatatlanságokat, az eltulajdoníthatatlanságot és a bizonytalanságot. Az első problémát sokat tanulmányozták az irodalomban a határköltség alapján történő árképzés címszava alatt; a másodikat pedig a társadalmi és egyéni haszon (vagy költség) eltéréseként; sokkal kevesebb figyelmet szenteltek azonban a bizonytalanság melletti optimális erőforrás-elosztás elméletének. Először összefoglalom a ma létező formális elméletet, majd

*Economic Welfare and the Alloaction of Resources for Invention. National Bureau of Economic Research (szerk.): The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors c. kötetben Princeton University Press, Princeton 1962, 609—625. old.

[1] Rendkívül nagy hasznát láttam kollégám, William Capron megjegyzéseinek. Hálás vagyok Richard R. Nelsonnak, Edward Phelpsnek és Sidney Winternek (a RAND Corporation munkatársainak) is a segítőkész eszmecseréért.

rámutatok arra, mennyire kritikus az információ azon fogalma, amely csak a bizonytalanság összefüggésében merül fel. Ezt követően megvizsgálom az információ mint áru gazdasági jellemzőit, különösen pedig a feltalálási folyamat mint információtermelő folyamat jellemzőit. Megmutatom, hogy mindhárom említett ok — amely miatt a versenyrendszernek nem sikerül optimális erőforrás-elosztást megvalósítania — érvényes a feltalálás esetére is. Elméleti alapon egy sor megfontolásra lehet még hivatkozni, mint például a téves elosztások valószínű torzító hatásaira és ezeknek a gazdasági szervezetekre vonatkozó következményeire.[2]

ERŐFORRÁS-ELOSZTÁS BIZONYTALANSÁG ESETÉN

Úgy tűnik, kevés figyelmet szenteltek annak a szerepnek, amit a versenyrendszer játszik a bizonytalanság elosztásában.[3] Először felvázolok egy ideális gazdaságot, amelyben az elosztási probléma megoldható versennyel, majd bemutatom a valóságos világ néhány olyan eszközét, amelyekkel ez a megoldás közelíthető.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak a termelési kapcsolatokban fordul elő bizonytalanság. A termelőknek a jelen pillanatban kell dönteniük a ráfordításokról, de a kibocsátás előre nem határozható meg pontosan a ráfordítások alapján. Formálisan úgy írhatjuk le a kibocsátásokat, mint amit a ráfordítások és a „természet állapota" határoz meg, és az utóbbi ismeretlen a termelők számára. Egy „feltételes áru" (commodity-option) definíció szerint legyen a szokásos értelemben vett árunak a természet egy állapotával való megjelölése. Ez a definíció analóg a tőkeelméletben használt egy adott termék idő szerinti, a területi tervezés elméletében pedig a hely szerinti megkülönböztetéssel. Egy adott termék bizonytalanság melletti termelése ekkor az ún. feltételes áruk egy vektorával írható le.

Ezt a megfogalmazást a legkönnyebben úgy szemléltethetjük, ha a mezőgazdasági termelésre hivatkozunk. A természet állapota ebben az esetben azonosítható az időjárással. Ekkor bármely adott ráfordításhalmaznak a gabona egy bizonyos mennyisége felel meg, ha a csapadék jó, és egy ettől különböző mennyisége, ha a csapadék

[2] Más hasonló álláspontot képviselő elemzések: *R. R. Nelson:* The Simple Economics of Basic Scientific Research. Journal of Political Economy, 1959. 297—306. old.; és *C. J. Hitch:* The Character of Research and Development in a Competitive Economy. The RAND Corporation, 1958. május. 1297. old.

[3] Az első tanulmányok, amelyekről tudok, M. Allais előadása és a sajátom, mindkettő 1952-ben a Colloque International sur le Risque konferencián hangzott el Párizsban; lásd *M. Allais:* Généralisation des théories de l'équilibre economique général et du rendement social an cas des risqnes. és *K. J. Arrow:* Role des valuers bousiéres pour la répartition la meilleure des risques; mindkettő az Econométrie-ben jelent meg, Colloques Internationaux de Centre National de la Recherche Scientifique, Vol. XL, Paris Centre National de la Recherche Scientifique, 1953. Allais előadása megjelent az Econometrica-ban is, 1953. 269—290. old. Az elméletet nagyon elegánsan általánosította *G. Debreu* a Theory of Values című könyve VII. fejezetében, New York, Wiley, 1959.

rossz. A csapadékra vonatkozóan tetszőleges számú közbeeső feltételt bevezethetünk mint a természet lehetséges állapotait; növelhetjük a természet állapotának leírásában részt vevő lényeges változók számát, például a hőmérséklettel. Ennek az eljárásnak a kiterjesztésével megadhatjuk a termelésben fellépő bármilyen bizonytalanság formális leírását.

Tételezzük fel — s ez a kritikus pont a gazdaság idealizációjában —, hogy minden feltételes árunak van piaca. Az üzlet minden piacon olyan szerződésekből áll, amelyek alapján a vevő egy megállapodás szerinti összeget fizet, illetve az eladó egy adott termék megállapodás szerinti mennyiségét szállítja, *ha* a természet egy bizonyos állapota bekövetkezik, és semmit nem fizet, illetve szállít, ha a természetnek ez az állapota nem következik be. A vállalat ismeri a ráfordítások bármely adott halmazához tartozó kibocsátásait a természet minden állapota mellett, és a feltételes áruk egy ennek megfelelő mennyiségét adja el; jövedelme ekkor teljesen meghatározott. Megválaszthatja ráfordításait úgy, hogy a profitját maximalizálja.

A fogyasztók jövedelme kínálataik — a munkát is ide értve — vállalatoknak való eladásából és profitbevételeikből származik. A profitról feltesszük, hogy teljes mértékben elosztásra kerül. A fogyasztók úgy vásárolnak feltételes árukat, hogy a jövedelmük által meghatározott költségvetési korlát mellett maximalizálják várt hasznosságukat. Minden feltételes áru piacán elérik az egyensúlyt, s ez az egyensúly pontosan ugyanazokkal a Pareto-optimalitási tulajdonságokkal rendelkezik, mint a bizonyosság mellett kialakult versenyegyensúly.

Ebben az ideális modellben a feltételes áruk piacai azt a célt szolgálják, hogy megvalósulhasson a kockázatvállalás optimális elosztása a gazdaság tagjai között. Ez az elosztás számításba veszi mind az erőforrásokban, mind a kockázatvállalásra való hajlamban létező különbségeket. Többek között az következik ebből, hogy a kockázatvállalás és a termelés egymástól független gazdasági funkciók. A ráfordítások — ideértve az emberi tehetséget is — legtermelékenyebben történő felhasználását nem gátolja az, hogy a vállalatok vagy a termelők húzódoznak a kockázatvállalástól vagy éppen képtelenek erre.

A valóságos gazdasági rendszerben azonban nincsenek feltételes áru piacok. Hogy lássuk milyen helyettesítők léteznek, tekintsünk először egy — a másik végletet képviselő — modellgazdaságot, amelyben a kockázatvállalás újraelosztására vonatkozóan semmiféle kikötés nem létezik. Minden vállalat maga dönt a ráfordításairól; majd megtermeli a ráfordítások és a természet állapota által meghatározott kibocsátásokat. Az árak ekkor úgy alakulnak, hogy megtisztítsák a piacot. A végső soron érvényesülő árak a természet állapotának függvényei lesznek.

Ebben a modellben a vállalatok és tulajdonosaik nem szabadulhatnak meg a kockázatvállalástól. Ezért a kockázatvállalástól való minden vonakodás vagy az erre való képtelenség az erőforrások nem optimális elosztását idézi elő annyiban, amennyiben diszkriminálni fogják a kockázatos vállalkozásokat az optimummal összehasonlítva. A kockázat előnyben részesítése ellenkező irányú hibás elosztást okozhat, de a pénzügyi korlátok következtében valószínűbb, hogy a kockázatos vállalkozá-

sokba túl keveset ruháznak be. Ehhez hasonlóan, ha az egyének nem képesek pénzzel kivédeni a bizonytalanságot, az a jólét csökkenését okozza.

Valóban, a kockázat feltételezéséből adódó probléma enyhítésére egy sor intézményes rendezési mód jött létre. Tegyük fel, hogy a gazdaság minden vállalata és egyéne tökéletesen képes a természet minden állapotában a kialakuló árak előrejelzésére. Tételezzük fel továbbá, hogy a természet állapotával kapcsolatban létezik egy szerencsejáték, tehát bármely egyén és vállalat fogadhat, mielőtt a természet állapota ismertté válna. Belátható ekkor, hogy a hatás bármely adott egyén vagy vállalat szempontjából azonos azzal, mintha a valamennyi típusú feltételes áru piaca létezne, mert bármelyik feltételes áru kifejezhető a természet egy alkalmas állapotára tett fogadás és a szóban forgó termék — a természet megfelelő állapotának megvalósulása esetén létező — eladási és vásárlási szándékának kombinációjaként.

A szerencsejátékokra és a fogadásra hivatkozni frivolitásnak tűnhet, de csak a biztosításra kell gondolnunk, hogy tisztán lássuk, a kockázat áthárítása — olyasvalamin keresztül, ami valójában a természet állapotára vonatkozó fogadás — nagyon fontos jelenség. Ha minden elképzelhető esetre létezne biztosítás, akkor az előző érvelésből az optimális elosztás megvalósíthatósága következik. A szokásos értelemben vett biztosítás természetesen a gazdasági világ szempontjából releváns eseményeknek csak kis körét fogja át; a kockázat áthárításának sokkal fontosabb eszközei az értékpapírok, különösen a részvények és a pénz. Tulajdonosi érdekeltségeik különböző cégek közti szabad átcsoportosításával az egyének nagymértékben képesek a természet különböző olyan állapotaira fogadni, amelyek különböző mértékben kedvezőek a vállalatok számára. Ezt a — számos esetlegesség ellen biztosító — szabadságot fokozzák a készpénztartás, illetve a költekezés alternatívái.

Sajnos, túlságosan is nyilvánvaló, hogy a kockázatok áthárítása a valóságos világban tökéletlen. Azt a tényt, hogy az értékpapírok a kockázat vonatkozásában nem töltik be tökéletesen elosztási szerepüket, jól szemlélteti az önfinanszírozás túlsúlya az iparban a külső eszközökkel történő finanszírozáshoz képest. Ennek több oka van. Én egy — a feltalálások szempontjából különös jelentőségű — okra szorítkozom. A biztosítás gyakorlatában úgy hivatkoznak a morális tényezőre, mint a biztosítás lehetőségeinek korlátjára. A tűzbiztosítási kötvények összege például nem múlhatja felül a biztosított javak értékösszegét. Tisztán biztosítási statisztikai szempontból nincs ok erre a megkötésre; a megszorítás oka az, hogy a biztosítási kötvény megváltoztatja a biztosított indítékait, ebben az esetben szándékos gyujtogatásra vagy legalábbis gondatlanságra ösztönöz. Általában nehéz különbséget tenni a természet egy állapota és a biztosított elhatározása között. Ennek eredményeként bármilyen biztosítási kötvény és általában a kockázat áthárításának bámilyen eszköze gyengítheti az ösztönzést. Egy tűzbiztosítási kötvény például gyengíti a tűzmegelőzés indítékát, még akkor is, ha összege a biztosított javak értékére korlátozódik. Így azok a lépések, amelyek növelik a gazdaság hatékonyságát a kockázatvállalás tekintetében, csökkenthetik technikai hatékonyságát.

A biztosítás kedvezőtlen hatásai mérsékelhetők az együttes biztosítással. Ekkor a biztosítás a biztosított kockázatának csak egy részére terjed ki. Ezt az eszközt használják például az orvosi kockázatok biztosításakor. Ez nyilvánvalóan kompromisszumot jelent az ösztönző hatások és a kockázatvállalás elosztása között; mindkét irányba feláldozva valamit.

A morális tényezőnek a rendkívül kockázatos üzleti tevékenység — beleértve ebbe a feltalálást is — két esetében van különös jelentősége. Az ilyen tevékenység sikere kibogozhatatlanul szövevényes módon függ az objektív bizonytalansági tényezőktől és a vállalkozók döntéseitől, s minden bizonnyal nem lehet biztosítani. Másfelől akkor kezdenek ilyen tevékenységekbe — figyelmen kívül hagyva, mekkora a szórás —, ha a várt nyereség felülmúlja a piaci nyereségrátát.[4] A részvények létezése látszólag megoldja a kockázat elosztásának problémáját; bármelyik részvénytulajdonos csökkentheti kockázatát azzal, hogy a részvényeknek csak egy kis részét veszi meg és értékpapír-állományát úgy variálja, hogy elérje azt a kockázati szintet, amelyet előnyben részesít. De ekkor a szóban forgó menedzserek ismét nem kapják meg döntéseikért a teljes ellenértéket; a kockázatot ismét a hatékonyság irányába ható ösztönzők gyengülése kíséri. Találhatunk helyettesítő motívumokat; akár anyagiakat — mint például a vállalatvezetői kártérítést —, akár nem anyagiakat — mint például a presztízst —, de a morális tényező dilemmáját sohasem oldhatjuk meg teljesen.

A másik példa az ún. „cost-plus" (önköltség plusz) szerződés egy formája a sok közül. Ha a hadi áruk termelési költségei nagyon bizonytalanok, a katonai kormányzat nem rögzített egységárat fog fizetni, hanem a termelés költségét, plusz egy olyan összeget, amely manapság rendszerint egy rögzített illetmény. Az ilyen szerződést úgy tekinthetjük, mint egy rögzített áron történő szerződés és a költségek elleni biztosítás kombinációját. Biztosítási díjnak pedig a rögzített illetménynek és annak a rögzített árnak a különbségét tekinthetjük, amelyet a kormány hajlandó lett volna fizetni.

A „cost-plus" szerződéseket az teszi szükségessé, hogy a vállalatok nem képesek, illetve nem akarnak kockázatot vállalni. A kormánynak nagyobb a kockázatvállalási képessége, ezért a kockázatok terhét áthárítják rá. Így aztán módjában áll, hogy a vállalatoktól inkább termelési hatékonyságuk, mint kockázatvállalási képességük alapján vásároljon, s lehetséges, hogy e két dolog csak tökéletlenül korrelál. A „cost-plus" szerződések hatása az elosztásra közismerten kedvezőtlen.[5]

Ezt — a kockázatvállalás elméletéről szóló — kissé terjengős kitérőt a téma irodalmának szegényessége tette szükségessé. A levonható leglényegesebb következtetések a következők: 1. a gazdasági rendszernek vannak eszközei a kockázat áthárítására,

[4] Ennek az állításnak érvényessége függ néhány — itt nem említett — feltételtől is, de a kifejtendő állítást kisebb módosítások nem érintik.

[5] Ezek a megjegyzések nem igénylik az ún. „cost-plus" szerződések teljes értékelését. Különösen azért nem, mert bizonyos mértékig léteznek olyan más ösztönzők, amelyek csökkentik a hatékonyságra gyakorolt kedvezőtlen hatásaikat.

de ezek az eszközök korlátozottak és tökéletlenek; ez okból várható, hogy a kockázatos tevékenységekbe túl kevés lesz a beruházás, 2. kétségtelenül érdemes az ilyen eszközök választékát bővíteni, de a morális tényező határt szab a bővítés lehetőségeinek.

AZ INFORMÁCIÓ MINT ÁRU

Az erőforrások elosztása során keletkező bizonytalanság rendszerint még kényesebb probléma; itt ugyanis az információ áruvá válik. Tegyük fel, hogy a gazdasági rendszer egy részében olyan megfigyelést tettek, amely — ha ismert lenne — megváltoztatná bárkinek a világ különböző állapotaira vonatkozó valószínűségi becsléseit. Ilyen megfigyelések adódhatnak kutatási eredményként, de adódhatnak a mindennapi gazdasági élet folyamán is, a napi gazdasági tevékenység melléktermékeként. Egy vállalkozó automatikusan megszerzi tevékenységi területéről a termelési és keresleti feltételekre vonatkozó ismereteket, ami a kívülállók számára csak különleges erőfeszítések árán hozzáférhető. Az információnak gyakran gazdasági értéke van, abban az értelemben, hogy bárki, aki egy bizonyos információ birtokában van, nagyobb profitot tud elérni, mint aki nincs.

Ezek alapján azt várhatnánk, hogy az információ bekerül a kereskedelembe, és ez természetesen jelentős mértékben így is van; ezt az információközvetítés számos gazdasági intézménye — például az újságok — szemléltetik. Ennek ellenére sok esetben felvetődik az elosztás optimalitásának kérdése. Az információk egy adott halmazának átadási költsége gyakran nagyon alacsony. Ha nulla lenne, akkor kézenfekvő, hogy az optimális elosztás az információk korlátlan, ingyenes elosztását igényelné. Valójában az információk egy adott része definíció szerint oszthatatlan termék; így itt is megjelennek az elosztásnak az oszthatatlanságok esetén fellépő klaszszikus problémái. Az információ tulajdonosának nem kellene kiaknáznia az információban rejlő gazdasági értéket, ha optimális elosztásra törekedne; de kismértékben monopolista, és így keresni fogja, hogy ebből a tényből hogyan húzhat hasznot.

Külön jogi védelem hiányában azonban a tulajdonos nem tudja egyszerűen a szabad piacon eladni az információt. Bármelyik vásárló le tudja rombolni monopóliumát, ugyanis kis költséggel vagy költség nélkül képes sokszorosítani az információt. Tehát az egyetlen hatékony monopólium az lenne, ha az információt eredeti tulajdonosa használná fel. Ez azonban nemcsak társadalmilag lenne kevésbé hatékony, de lehetséges, hogy az információ tulajdonosának sem lenne sok haszna belőle, mert nem volna képes olyan hatékonyan kiaknázni, mint a többiek.

Megfelelő jogi intézkedésekkel az információ kisajátítható áruvá válhat. Ekkor a monopolista hatalmat valóban gyakorolni lehet. Bármilyen nagy jogi védelem sem képes azonban teljesen kisajátítható áruvá tenni egy annyira megfoghatatlan dolgot, mint az információ. Ahhoz, hogy az információt termelő módon egyáltalán fel lehessen használni — legalábbis részben —, napvilágra kell hozni. Az információ terjedésének egyik útja a személyek mozgása a vállalatok között. Ezt csak részben

gátolhatják a jogilag szabályozott tulajdonjogok, mert nyilvánvalóan rendkívül nehéz az információk egy részét definíciószerűen leválasztani, és így megkülönböztetni a többi résztől.

Az információ iránti keresletnek kényelmetlen tulajdonságai vannak. Elsősorban az információ hasznossága minden bizonnyal alá van vetve oszthatatlanságoknak; például a termelési lehetőségekre vonatkozó információk hasznossága szükségképpen nem függ a termelés szintjétől. Másodsorban az információ iránti kereslet meghatározásában van egy alapvető paradoxon; a vásárló számára értéke ismeretlen addig, amíg nem rendelkezik az információval, de ha már birtokában van, akkor valójában ingyen jutott hozzá. Ha az eladó az információ használatában tulajdonjogokat tud fenntartani, akkor ez természetesen nem probléma, de ha adott a nem teljes kisajátíthatóság, akkor a potenciális vásárló információvásárlási döntéseit nem optimalitási kritériumokra fogja alapozni. Cselekedhet például az adott osztályba tartozó információk múltbeli tapasztalatokban megmutatkozott átlagértéke alapján. Ha a gazdaság különböző szereplői számára bármelyik információtételnek különböző az értéke, akkor ez egyrészt oda vezet, hogy egyetlen ár mellett sem lesz optimális az információk vásárlása, másrészt a megvásárolt információk elosztása sem lesz optimális.

Rá kell mutatnunk, hogy egy létező információállomány hatékony elosztásának szempontjából a kisajátítás nehézségei előnyt jelentenek, feltéve, hogy az információ közvetítésének nincsenek költségei, mert az optimális elosztás szabad információelosztást igényel. A lényeg itt az, hogy ha valaki bármely okból piacot akar teremteni az információk számára, nehézségekbe ütközik.

Érvelésünkből az következik, hogy az információ közvetítésének költségei olyan elosztási nehézségeket okoznak, amelyek különben nem léteznének. Az információt határköltségen kellene átadni, ekkor azonban fellépnek a már felvetett keresleti nehézségek. Az optimális elosztás szempontjából a vásárló ágazat az oszthatatlanságból eredő problémákkal találkozik; s azt a kérdést, hogy a vásárló nem képes előre megítélni annak az információnak az értékét, amelyet megvásárol, még mindig nem oldottuk meg. Ilyen körülmények között elegendő ok van a központosított döntésre.

A FELTALÁLÓI TEVÉKENYSÉG MINT INFORMÁCIÓTERMELÉS

A feltalálás és kutatás folyamatának alapvető gazdasági lényege, hogy mindkettő információt termel. Az információ definíciója szerint a feltalálásnak kockázatos folyamatnak kell lennie; amennyiben a kibocsátást (a nyert információt) sohasem lehet tökéletesen előre kiszámítani a ráfordításokból. Most alkalmazhatjuk az előző két pont érvelését.

Minthogy kockázatos folyamatról van szó; léteznie kell valamiféle hátrányos megkülönböztetésnek a feltalálási és kutatási tevékenységek beruházásaival szemben.

Ezen a területen különösen nagy a súlya a morális tényezőnek a biztosítás bármely formájához vagy bármely ennek megfelelő kockázatvállalási formához viszonyítva. Egy keresett új termék vagy termelési eljárás fejlesztésének kudarca ellen a biztosítás bizonyára nagymértékben gyengítené a sikert elősegítő ösztönzőket. A magánvállalati rendszerben e probléma minimalizálásának egyetlen útja, hogy a kutatásokat nagyvállalatok irányítják, sok olyan egyidejűleg futó kutatási témával, amelyek mindegyike kisméretű a vállalat nettó jövedelméhez képest. Ekkor a vállalat úgy működik, mint önmaga biztosítótársasága. Világos azonban, hogy ez nem tökéletes megoldás.

A rossz elosztás mélyebb problémái a termék természetéből fakadnak. Ahogy már láttuk az információáru sajátos tulajdonságai különösen zavaróak az optimális elosztás megvalósításában. Elsősorban, bármely megszerzett információnak — például egy új termelési eljárásnak — jóléti szempontból ingyenesnek kellene lennie (eltekintve az információ közvetítésének költségeitől). Ez biztosítja az információ optimális hasznosítását, de természetesen nem ösztönöz a kutatásba eszközölt beruházásra. Egy ideális szocialista gazdaságban a feltalálás jutalmát teljesen elkülönítenék az információ felhasználóit terhelő díjtól.[6] Egy szabad vállalkozáson alapuló gazdaságban — ahol a feltalálói tevékenységet azzal támogatják (pontosan olyan mértékben amennyire sikeres), hogy a találmányt tulajdonjogok létrehozására használják fel — az információt nem hasznosítják megfelelő mértékben. A tulajdonosi jogok vagy magában az információban — szabadalmak vagy hasonló jogi eszközök révén —, vagy a vállalat eszmei vagyonrészeiben lehetnek, ha az információt a vállalat visszatartja és csak profitjának növelésére használja fel.

Az első probléma ekkor az, hogy a szabad vállalkozáson alapuló gazdaságban a feltalálás rentábilitása a források nem optimális elosztását kívánja meg. De még ekkor is feltehető a kérdés, vajon optimális-e a feltalálást szolgáló források elosztása vagy sem. Az előző pont fejtegetése megvilágítja; nem várhatjuk, hogy így legyen; valójában nagyon valószínű, hogy a feltalálásra fordított források összege az optimálistól lefelé tér el. Bármekkora is legyen az ár, az információk kereslete az optimálisnál két okból kisebb: 1. mert az ár pozitív, és nincs a nulla optimális értéken; ezért a keresletnek az optimális alatt kell lennie; 2. ahogy az előbb láttuk, bármely adott ár esetén az információ természetéből következően a kereslet az optimálisnál alacsonyabb lesz.

Ahogy már megjegyeztük; a feltaláló bármely esetben jelentős nehézségekbe ütközik az általa létrehozott információ kisajátításában. A szabadalmi törvényeknek elképzelhetetlenül bonyolultaknak és nehezen megfoghatóaknak kellene lenniük ahhoz, hogy nagymértékben lehetővé tegyék az információ effajta kisajátítását. Tételezzük fel, hogy bonyolult kísérletek eredményeképp felfedezik, hogy egy fém egy kívánatos tulajdonsággal rendelkezik; például ellenáll a magas hőmérsékletnek. Ekkor e fém-

[6] N. M. Kaplan és R. H. Moorsteen (a RAND Corporation munkatársai) szóbeli közlése szerint a Szovjetunióban létezik ez az elkülönítés.

nek minden olyan felhasználási területén, ahol ez a tulajdonsága fontos, természetesen hasznosítanák ezt az információt, amiért a felhasználónak fizetnie kellene. Még inkább így van, ha egy másik feltalálót ez arra ösztökél, hogy a kémiailag közelálló fémeket megvizsgálja a hőellenállás szempontjából, minthogy a már felfedezett információt felhasználja, valamilyen mértékben fizetnie kellene; akárcsak találmánya minden haszonélvezőjének. Ahhoz, hogy a rendszer egyáltalán elviselhető legyen, szükség lenne a részleges tulajdonjogok minden fokozata közti alaposan kidolgozott megkülönböztetésre. A végrehajthatóság érdekében a jelenlegi szabadalmi törvények határozottan keretek közé szorítják a kisajátítható információk körét, s ezáltal csökkentik azokat az ösztönzőket, amelyek a kutatási és feltalálói tevékenység vállalására hatnak.

Ez utóbbi megfontolások felhívják a figyelmet a feltalálási tevékenységek kölcsönös függőségére; ami alátámasztja azokat a nehézségeket, amelyek az eredmények optimális elosztásával kapcsolatban felmerülnek. Az információ nemcsak terméke a feltalálói tevékenységnek, hanem ráfordítása is — bizonyos értelemben a legjelentősebb ráfordítás, eltekintve a feltaláló tehetségétől. Az a szellemi irányzat, amelyik azt hangsúlyozza, hogy a találmányokat a társadalmi légkör határozza meg — ahogy ezt a szimultán felfedezések bizonyítják —, valójában a megelőző információk produktív szerepét hangsúlyozza az új információk létrehozásában. Bár e kölcsönös függőségek elvben nem hoznak létre újabb nehézségeket, intenzívebbé teszik az előzőekben kifejtetteket. Sokkal nehezebb kisajátítani az információt a további kutatásokhoz, mint az áruk termeléséhez; a további információ létrehozásához felhasznált információ értéke jóval problematikusabb, mint a termelésben felhasznált információé, ezért sokkal valószínűbb, hogy alábecsülik őket. Ennek következtében, ha az információért árat számolnak fel, még valószínűbb, hogy a kereslet nem fogja elérni az optimumot.

Különösen valószínűtlen, hogy az alapkutatás — amelynek kibocsátását mint a többi feltalálói tevékenység információs ráfordítását használják fel — ellenszolgáltatásban részesül. Valójában az a valószínű, hogy az alapkutatásra vállalkozó cég számára ennek csak akkor van kereskedelmi értéke, ha megakadályozza azt, hogy más cégek is felhasználhassák az így megszerzett információt. Az információátadás ilyen korlátozása azonban általában csökkenti a feltalálói tevékenység hatékonyságát, s ezért csökkenteni fogja mennyiségét is. Ez kifejezhető a sorozatos döntéshozás fogalmaival is. A természet valódi állapotának *a priori* valószínűségi eloszlása relatíve egyenletes ahhoz, hogy kiinduljunk belőle. Másfelől minél több vizsgálatot végzünk, az egymást követő *a posteriori* eloszlások annál élesebben csúcsosodnak, illetve koncentrálódnak egy mind korlátozottabb tartományban, s ezért egyre jobb az információnk ahhoz, hogy eldöntsük mi legyen a kutatásban a következő lépés. Ebből az következik, hogy kezdetben a különböző alternatív kutatási lehetőségek közötti preferenciák sokkal kevésbé élesen meghatározottak, mint ahogy ez feltehető a későbbiekben, s ez legalábbis annak fontosságát sugallja, hogy a kutatások széles választékával kell kezdeni, és az információ felhalmazódásával fokozatosan küszöböljük

ki a kevésbé ígéreteseket.[7] A következő lépésre vonatkozó döntésnek, minden fázisban, az összes rendelkezésre álló információn kellene alapulnia. Ez a különböző kutatási tervek között korlátlan információáramlást kívánna, ami összeegyeztethetetlen az ideális szabad vállalkozáson alapuló rendszer teljes decentralizációjával. Amikor az információtermelésnek is jelentősége van, akkor a gazdaság klasszikus modellje — amelyben az árrendszer helyettesíti az információ részletes terjedését — már nem teljesen helytálló.

Összefoglalva, valószínűnek tartjuk, hogy egy szabad vállalkozáson alapuló gazdaságban (az ideálissal összevetve) a kutatásokba és a felhasználói tevékenységbe nem kielégítő mértékben ruháznak be, mert kockázatos, mert termékét csak korlátozott mértékben lehet kisajátítani, és mert hozadéka felhasználásával nő. Minél inkább alapkutatásról van szó, annál kevésbé kielégítő mértékű a beruházás erre a területre. Továbbá, amilyen mértékben sikerül egy vállalatnak feltalálói tevékenysége gazdasági értékét növelni, olyan mértékben fogják az ideálisnál kevésbé hasznosítani az adott információt.

VERSENY, MONOPÓLIUM ÉS A TALÁLMÁNYOK ÖSZTÖNZÉSE

Hasznos lehet, ha megjegyezzük, hogy a termékek piacán még a tökéletes verseny körülményei között is létezhetnek a feltalálói tevékenység ösztönzői, annak ellenére, hogy a találmányokban rejlő információk „piacán" nincsenek. Különösen világos ez a költségcsökkentő találmányok esetében. A feltaláló azzal az egy feltétellel, hogy megfelelő szabadalmi díjat lehet követelni, anélkül profitálhat találmányából, hogy zavarná az iparág versenytermészetét. A helyzet nem nagyon különbözik új termék feltalálásakor sem; a feltaláló monopolprofitnak megfelelő jövedelmet kaphat, ha megfelelő szabadalmi díjat számít fel a szóban forgó iparágnak.

A következőkben a találmányok ösztönzőit vizsgáljuk meg monopolista feltételek mellett, illetve tökéletes versenypiacra vonatkozóan; azaz egy találmányból nyerhető lehetséges profitot összehasonlítjuk a költségekkel. Az információ kisajátításának nehézségeit elhanyagoljuk; így a fennmaradó probléma, az információ egy lényegi tulajdonsága, az oszthatatlanság a felhasználásban. A versenyhelyzet olyan helyzetet jelent itt, amelyben az iparág versenyfeltételek között termel, míg a feltaláló tetszőleges szabadalmi díjat állapíthat meg találmányának felhasználásáért. A monopolista helyzetben feltételezzük, hogy csak maga a monopólium képes feltalálásra. Így a monopólium itt belépési korlátot jelent: egy időleges monopolista helyzet, amely talán egy korábbi találmánynak tulajdonítható — és nem akadályozza meg

[7] Különösen hangsúlyozta a párhuzamos kutatási témák fontosságát bizonytalanság esetén *Burton H. Klein;* (lásd; A Radical Proposal for R. and D. c. cikkét, Fortune, 1958. május. 112. old.); és *Klein* és *W. H. Meekling*; Application of Operation Research to Development Decisions. Operation Research, 1958, 352—363. old.

azt, hogy új vállalatok lépjenek be a piacra saját találmányukkal —, sokkal közelebbinek tekinthető a versenyhelyzethez, mint a monopolhelyzethez, figyelembe véve ennek az elemzésnek a célját. Bebizonyítjuk, hogy a feltalálásra való ösztönzés monopolista körülmények között kisebb, mint versenyhelyzetben, de még ez utóbbi esetben is kisebb társadalmilag kívánatos szintnél.

A költségekről feltételezzük, hogy állandóak mind a vizsgált találmány előtt, mind utána; legyen az egységköltség c a találmány előtt és $c' < c$ utána. A találmány előtti versenyár ezért c lesz. Az ennek megfelelő kereslet legyen x_c. Ha az egységre jutó szabadalmi díj szintje r, akkor a találmány után a versenyár $c' + r$ lesz; ez természetesen nem lehet c-nél magasabb, mert a vállalatok mindig szabadon választhatják a régi módszerekkel való termelést.

Feltesszük, hogy mind a kereslet, mind a határbevétel-görbe csökkenő. Legyen $R(x)$ a határbevétel-görbe. Ekkor a találmány előtti monopolista kikocsátást, x_m-et az

$$R(x_m) = c$$

egyenlettel lehet meghatározni.

Ehhez hasonlóan a találmány utáni kibocsátást az

$$R(x'_m) = c'$$

összefüggés határozza meg.

Legyenek az x_m és x'_m kikocsátásnak megfelelő monopolista árak p_m és p'_m. Végül legyen P és P' a monopolista profitja a találmány előtt és után.

Mekkora a szabadalmi díj optimális szintje a feltaláló számára verseny esetén? Tételezzük fel, hogy p'_m-mel — a találmány utáni helyzetben megszerezhető optimális árral — számol. Ha a költségcsökkenés eléggé erős, azaz $p'_m < c$, akkor az a legjövedelmezőbb cselekvési mód számára, ha r-t úgy állapítja meg, hogy a versenyár p'_m legyen, azaz

$$r = p'_m - c'.$$

Ebben az esetben a feltaláló szabadalmi díja egyenlő azzal a profittal, amit egy monopolista érne el azonos körülmények között, azaz a feltalálói tevékenység ösztönzője P' lesz.

Tegyük fel azonban, hogy kiderül $P'_m > c$. Minthogy az eladási ár nem haladhatja meg c-t, a feltaláló szabadalmi díját

$$r = c - c'$$

szinten állapítja meg.

Ekkor a versenyár c lesz és az értékesítés x_c marad. A feltaláló anyagi ösztönzésére tehát $x_c(c - c')$ jut.

Másfelől világos, hogy a monopolista ösztönzője $P' - P$. Az említett két eset közül az elsőben kézenfekvő, hogy verseny esetén a monopolista ösztönzője kisebb, mint a feltalálóé, ami P', nem pedig $P' - P$. A találmány előtti monopolista hatalom a további újítás erős gátjaként működik.

Kissé bonyolultabb az elemzés a második esetben. A monopolista ösztönzője, $P'-P$ egyenlő a bevételváltozás mínusz a termelés teljes költségének változása, azaz

$$P'-P = \int_{x_m}^{x'_m} R(x)\,dx - c'x'_m + cx_m.$$

Minthogy a határbevétel $R(x)$ csökkenő, ahogy x az x_m-ről x'_m-re nő, mindig kisebbnek kell lennie $R(x_m)=c$-nél, tehát

$$\int_{x_m}^{x'_m} R(x)\,dx < c(x'_m - x_m),$$

és

$$P'-P < c(x'_m-x_m)-c'x'_m+cx_m = (c-c')x'_m.$$

A vizsgált esetben a találmány utáni monopolista ár p'_m nagyobb, mint c. Továbbá a csökkenő keresleti görbe alapján $x'_m<x_c$. Az egyenlőtlenség azt mutatja, hogy a monopolista ösztönzője mindig kisebb, mint a költségcsökkenés hatása a találmány utáni monopolista kibocsátásra, ami következésképp — ebben az esetben — kisebb, mint a versenykibocsátás (akár a találmány előtt, akár utána). Minthogy a feltaláló ösztönzője — verseny esetén — a költségcsökkenés hatása a versenykibocsátásra, ez mindig felülmúlja a monopolista ösztönzőjét.

Meg lehet mutatni, hogy ha c' különböző értékeit tekintjük, akkor a két ösztönző közti különbség növekszik c' csökkenésével, s akkor éri el maximumát P-nél (a találmány előtti monopolista profit értékénél) ha c' elég nagy ahhoz, hogy az első eset érvényesüljön. Másfelől a versenyhelyzetben érvényesülő ösztönző aránya a monopólium esetén érvényesülőhöz — bár mindig nagyobb 1-nél — c'-vel együtt állandóan csökken. A c-hez nagyon közel eső c' esetén (azaz nagyon kis találmányok esetén) a két ösztönző aránya megközelítőleg x_c/x_m, azaz a monopolista kibocsátás aránya közelít a versenykibocsátáshoz.[8]

[8] Ezen állítások bizonyításának gyors felvázolásához jegyezzük meg, hogy c' változásával P konstans marad. Ezért a $P'-P$ képletből beláthatjuk, hogy

$$d(P'-P)/dc' = dP'/dc' = R(x'_m)(dx'_m/dc') - c'(dx'_m/dc') - x'_m = -x'_m,$$

mert $R(x'_m)=c'$. Legyen $F(c')$ a feltalálás ösztönzőinek — verseny és monopolista feltételek közti — különbsége. Abban az esetben, amikor $p_m \leqq c$, ez a különbség a P konstans. Másként,

$$F(c') = x_c(c-c') - (P'-P),$$

tehát

$$dF/dc' = x'_m - x_c.$$

A most tekintett esetre $x'_m<x_c$-nek kell lennie, ahogy a szövegben már láttuk. Ezért $dF/dc' \leqq 0$, tehát $F(c')$ növekszik c' csökkenésével.

Az egyetlen érv amellett, hogy a monopólium jobban ösztönözhet a feltalálásra az az, hogy monopólium esetén nagyobb lehet a kisajátíthatóság, mint verseny esetén. Bármekkora különbségek létezhetnek ebben a vonatkozásban, de — természetesen — ellensúlyozni kell a monopolista ellenérdekeltségét, amelyet a találmány előtti monopolista profit hoz létre.

A találmányok ösztönzését versenyhelyzetben össze lehet vetni a társadalom hasznával. A realizált társadalmi hasznot meg lehet különböztetni a lehetséges társadalmi haszontól, az utóbbi az a haszon, ami ideális körülmények között keletkezne, ami ebben az esetben a termék találmány utáni költségen, c'-n való értékesítését jelenti. Világos, hogy a lehetséges társadalmi haszon mindig felülmúlja a realizált társadalmi hasznot. Meg fogom mutatni, hogy a realizált társadalmi haszon másfelől mindig egyenlő vagy felülmúlja a feltalálás versenykörülmények közötti ösztönzőjét, és következésképp a monopolista ösztönzőjét is.

Tekintsük ismét a tárgyalt két esetet. Ha a találmány eléggé csökkenti a költségeket, tehát $p'_m < c$, akkor az árcsökkenés következtében a fogyasztóknak van hasznuk, amit a feltaláló nem sajátított el. Ha nem, akkor az ár változatlan, tehát a fogyasztók helyzete sem változott, és minden haszon a feltalálóé. Mivel feltevésünk szerint minden termelő nulla profittal dolgozik mind a találmány előtt, mind utána; azt látjuk, hogy a feltaláló szerzi meg a szerény mértékben költségcsökkentő találmányok teljes realizált társadalmi hasznát, de a radikálisabb találmányokból semmit. Az eddigiek — esetlegesen megfogalmazva — a nagyobb újításokkal szembeni elfogultságot sugallnak abban az értelemben, hogy egy újítás — amely költségeinek egy részét átalányként megfizethetik a fogyasztók anélkül, hogy rosszabb helyzetbe kerülnének, mint azt megelőzően voltak — nem lehet kifizetődő a feltaláló által elérhető maximális szabadalmi díj esetén.

Legyen $G(c')$ a verseny esetén és a monopólium esetén létező ösztönző aránya. Ha $p'_m \leqq c$, akkor

$$G(c') = P'/(P' - P)$$

világos, hogy c' csökkenésével ez csökken. A $p'_m > c$ esetén

$$G(c') = x_c(c - c')/(P' - P)$$

Ekkor $dG/dc' = [-(P' - P)x_c + x_c(c - c')x'_m]/(P' - P)^2$.

A szövegben a $P' - P$-re megállapított felső korlát miatt a számlálónak pozitívnak kell lennie; a hányados c' csökkenésével csökken.

Végül, ha c'-t c-hez nagyon közelinek tekintjük, $G(c')$ megközelítően egyenlő lesz a számláló és a nevező deriváltjainak arányával (L'Hopital-szabály), ami x_c/x'_m és közelíti x_c/x_m-et, ahogy c' közeledik a c-hez.

A GAZDASÁGI SZERVEZETEK LEHETSÉGES FORMÁI A FELTALÁLÓI TEVÉKENYSÉGBEN

Az előző érvelés ahhoz a következtetéshez vezet, hogy a feltalálásra jutó források optimális elosztásához az lenne szükséges, hogy a kormány vagy más — nem nyereség—veszteség kritériumok által irányított — szervezet finanszírozza a kutatásokat és a feltalálói tevékenységet. Természetes, hogy a valóságban bizonyos mértékig mindig is ez történt. Az alapkutatások nagy többségét az ipari rendszeren kívül, az egyetemek, állami szervek és magánszemélyek folytatják. Fel kell ismerni a nem anyagi ösztönzők fontosságát mind a kutatók részéről, mind pedig azoknak a magánszemélyeknek és kormányoknak a részéről, amelyek támogatják a kutató szervezeteket és egyetemeket. Az utóbbiak esetében a tanítás és kutatás egymást kiegészítő volta — a gazdaság szempontjából — szerencsés véletlen. Néhány, inkább alkalmazott jellegű kutatási területet — mint például a mezőgazdaságot, a gyógyszeripart és a repülést — következetesen az állami részvétel alkalmas területének tekintettek, s annak szerepe e területeken valóban nagy fontosságú volt.

Két probléma merül fel, ha az államnak és más, nem profitra dolgozó intézménynek kell ellensúlyoznia azt a tényt, hogy a magánvállalatok találmányok létrehozásához nem a kellő mértékben használják fel forrásaikat: hogyan határozzák meg a feltalálói tevékenységre szánt források nagyságát, és hogyan ösztönözzenek azok hatékony felhasználására? Ezek a problémák mindannyiszor felmerülnek, ahányszor az állam szükségesnek találja, hogy gazdasági tevékenységet folytasson azért, mert az oszthatatlanságok megakadályozzák a magángazdaság megfelelő működését (pl. autópályák, hidak, mocsárlecsapolások vagy hasonló jellegű beruházások esetén), de ebben az esetben még nehezebb a relatív nagyságok meghatározása. Formálisan — természetesen — mindaddig kellene forrásokat áldozni a találmányokra, amíg az itt várt társadalmi határhaszon egyenlővé nem válik a többi lehetséges területen felhasznált források társadalmi határhasznával, de a bizonytalanság jelenlétét tekintve ezek a számítások még nehezebbek és bizonytalanabbak, mint a közmunkák esetében. Valószínű, hogy amiben bízhatunk az csak a múltbeli megtérülési rátából becsült jövőbeli megtérülési ráta, aszerint növelve vagy csökkentve az e területre jutó beruházást, hogy az általános profitrátát a múltbeli átlagos megtérülési ráta felülmúlja-e vagy pedig alatta marad. A megtérülési rátáknak még *ex post* számítása is óriási — bár lehet, hogy nem leküzdhetetlen — nehézségekbe ütközik.[9]

A kutatásra szánt alapok felhasználásának hatékonysága olyan probléma, amelylyel a vállalatok belülről is szembekerültek, saját kutatási részlegeikkel foglalkozva. A katonai kutatás és fejlesztés gyors növekedése vezetett a találmányok és a kutatási tevékenység termelői és fogyasztói közti szerződéses kapcsolatok nagyarányú fejlődéséhez. A hatékonyság biztosításának itt előforduló problémái azonosak azokkal,

[9] Előremutató tanulmányt írt erről Z. Griliches. *Z. Griliches:* Research Costs and Social Returns: Hybrid Corn and Related Innovations. Journal of Political Economy, 1958. 419—431. old.

amelyekkel az állam találkozna, ha polgári területeken finanszírozná a feltalálást és a kutatást. A gazdasági kapcsolatok formája itt nagyon különbözik a szokásos piacokon létezőtől. A kifizetés független a terméktől; ezt a költségek szabályozzák, bár a nettó jövedelem (a rögzített járandóság) független mindkettőtől. Úgy tűnik, ez az elrendezés ellentétes a hatékonyság ösztönzésének elvével, és kétségtelenül helytelen felhasználáshoz vezet, de a közelebbi vizsgálat egyrészt megmutatja az enyhítő tényezőket, másrészt pedig némiképp megmagyarázza ennek elkerülhetetlenségét. Először: az új szerződések díjazása részben a múltbeli teljesítménytől függ, tehát nem hiányzik teljesen a hatékonyságra való ösztönzés. Másodszor: a két szerződő fél közti kapcsolat valamivel szorosabb, mint egy tisztán piaci kapcsolatban. Jobban hasonlít a szakértői szolgáltatások eladásához, ahol az eladó nem annyire egy meghatározott eredmény szállítására, mint inkább jó ítélőképességének eladására szerződik. (Az ilyen szolgáltatások iránti igény is a bizonytalanságból és az információ értékes voltából fakad.) Harmadszor: a teljesítmény szerinti fizetség nagy kockázatot jelentene a feltaláló számára, olyan kockázatot, amely ellen — ahogy láttuk— csak részben tud védekezni.

Világos, hogy szükség van a kompenzáció lehetséges módszereinek további tanulmányozására. Például a szerződés szerinti járandóság egy része függhetne a találmány sikerének mértékétől. Ennél sokkal komolyabb azonban a döntéshez vezető folyamat problémája. Meg kellene vizsgálni az állami döntéshozatal mögöttes motívumait e területen. Hitch bebizonyította, hogy az állami elosztásban részrehajlás van, különösen a kockázatos feltalálási folyamatokkal szemben, és túlzott a centralizáció, bár ez utóbbit jobb politikával helyre lehetne hozni.[10]

Menjünk tovább. Valóban nincs szükség arra, hogy a vállalat legyen a szervezeti alapegység a feltalálói tevékenységben; egy sor okunk van arra, hogy feltételezzük a vállalatnál mint szervezetnél, sokkal többet számít az egyéni tehetség. Ha a kutatáshoz szükséges felszerelések bérleti díjáról gondoskodnak, sokkal többféle kutatási szerződést lehet kötni egyénekkel és vállalatokkal egyaránt; ösztönzőket is magában foglaló, változó fizetési módokkal. A szervezetek más formái is — mint például az iparágak vagy az állam által finanszírozott kutatóintézetek, a magánadakozás — a jelenleginél élénkebb szerepet játszhatnának.

[10] im.

A termeléssel szerzett tudás jelentősége a gazdasági elmélet számára * **

Ma már vitathatatlan, hogy a tőke—munka arány emelkedése nem ad teljes magyarázatot az egy főre jutó jövedelem növekedésére. Bár nincs közgazdász, aki tagadta volna a technikai változás szerepét a gazdasági növekedésben, a tőkeképződésénél jóval nagyobb jelentőségére teljes mértékben talán csak Abramowitz [1] és Solow [11] fontos empirikus tanulmányai nyomán ébredtek rá. Ezek az eredmények nem mondanak ellent a termelési függvény neoklasszikus felfogásának, amely szerint a függvény a technikai tudást fejezi ki, csak hozzáteszik ehhez azt a nyilvánvaló tényt, hogy a tudás az időben növekszik. A gazdasági növekedés így kialakított képe viszont olyan erősen függ a tudás mennyiségének egzogén, és ráadásul bonyolult módon mérhető változójától, hogy az már aligha fogadható el. Mennyiségi, empirikus szempontból magyarázó változónak csupán az idő marad meg. Trendek előrevetítése azonban, bármennyire is szükséges lehet a gyakorlatban, alapjában véve a tudatlanság beismerését jelenti, és ami gyakorlati szempontból még rosszabb, nem ad teret a gazdaságpolitikai változóknak.

Továbbá, meg kell vizsgálni a tudásnak azt a fogalmát, amit egy időpont termelési függvénye feltételez. A tudást el kell sajátítani. Az oktatásban nem találjuk meglepőnek, hogy még az azonos képzésben részesült tanulók tudása is különbözik, ezért készek vagyunk elismerni azt az empirikusan kimutatott tényt (lásd a [2] III. részét), hogy a különböző országoknak ugyanabban az időpontban még akkor is más-más a termelési függvényük, ha eltekintünk a természeti adottságok különbségétől.

Ebben a tanulmányban egy endogén elméletet szeretnék indítványozni azokra a tudásbeli változásokra, amelyek a termelési függvények időbeli és országok közötti eltolódásait eredményezik. A tudás megszerzését „tanulás"-nak nevezzük. Talán

* The Economic Implications of Learning by Doing. The Review of Economic Studies. Vol. 29. No. 80, 1962. június, 155—173. old.

** A „termeléssel szerzett tudás" nem pontos fordítása a „learning by doing" kifejezésnek, de a cikk egészének tartalmát jobban kifejezi, mint a szószerintibb „termelve tanulás" „termelésközbeni tanulás" vagy „munka közbeni tanulás" megoldások, v.ö. Arrow 3. megjegyzésével a tanulmány végén. (A ford. megj.)

találunk valamilyen vezérfonalat annak a nagyszámú pszichológusnak a munkájában, akik ezt a területet tanulmányozták (megfelelő áttekintést Hilgard [5] műve ad). Úgy vélem, hogy semmiképp sem erőltetett dolog a technikai változást cselekvési környezetünk folyamatos megismeréseként felfogni, pontosan ez rejlik az időben növekvő teljesítményekben is.

Természetesen a pszichológusok sem egységesebbek a közgazdászoknál, és a tanulás folyamatáról alkotott véleményükben éles különbségek vannak. Az az általánosítás azonban, hogy a tudás a tapasztalat gyümölcse, olyan nyilvánvaló a gyakorlatból, hogy az elmélet valamennyi iskolájának el kell fogadnia, bármennyire különbözőképpen értelmezik is. Tanulni csak valamely probléma megoldási kísérletével, és ezért kizárólag tevékenység útján lehet. Még a „Gestalt" teoretikusok és más mezőelméletek képviselői is, akik a problémamegoldásban az intuició szerepét hangsúlyozzák, el kell hogy ismerjék az előzetes tapasztalatok jelentős szerepét az egyén gondolatmenetének alakításában (gondoljunk Köhler híres majmaira).

Egy másik általánosítás, amit a tanulás klasszikus kísérleteiből vonhatunk le az, hogy a lényegében azonos problémák ismételt megoldása esetén a tanulás hozadéka gyorsan csökken. Bármely adott ösztönzést tekintünk is, van a válasznak egy egyensúlyi sémája, amely felé az ismétléssel a tanuló viselkedése tart. Ebből az következik, hogy állandóan növekvő eredmény eléréséhez az ösztönzési helyzeteknek maguknak is állandóan fejlődniük kell, és nem elég csupán ismétlődniük.

Nem mondhatjuk, hogy nem figyeltek fel a tapasztalat szerepére a termelékenység növekedésében, ennek ellenére a köztük levő összefüggés beépülése a közgazdasági elmélet fő vonulatába még várat magára. A repülőmérnökök, első helyen T. P. Wright [14], már korán felismerték, hogy azoknak a munkaóráknak a száma — amelyet egy repülőgépváz (a repülőgép teste a gépek nélkül) építésére fordítanak — csökkenő függvénye az ugyanolyan típusú vázból előzőleg már termelt mennyiségnek. Az összefüggés csakugyan figyelemreméltóan pontos: a termelés beindulásától számolva, az N-edik számú, adott típusú váz elkészítéséhez szükséges munkamennyiség az $N^{-1/3}$ értékkel arányos. Ez az összefüggés az Egyesült Államok Légierejénél alapvetővé vált a termelés és a költségek tervezésénél. [3]. Hirsch (lásd a [6] művet és annak hivatkozásait) más gépek termelése esetén mutatta ki az ugyanilyen típusú „tanulási görbék" vagy „felfutási hányadok" (az elnevezések változóak) létezését. A tanulás üteme ezeknél nem ugyanaz, mint a repülőgépvázak esetében.

Verdoorn ([14], 433—434. old.) alkalmazta először a tanulási görbe elvét a nemzeti termékre. Azt feltételezve, hogy a kibocsátás exponenciálisan növekszik, a folyó kibocsátás arányos lesz a kezdeti időponttól számított összes kibocsátással. Verdoorn a munkatermelékenység magyarázatául ez utóbbi változót használja fel.

A függvényillesztés eredményét a [13] mű közli, a becsült felfutási hányad a különböző európai országokra 0,5 körül van. (Erre a [13] mű a növekvő tőke—munka arányra támaszkodó neoklasszikus értelmezést ad, lásd 7—11. old.)

Lundberg ([9], 129—133. old.) a „Horndal-effektus" nevet adta egy nagyon hasonló jelenségnek. A svéd Horndnal vasművek 15 éven keresztül nem hajtott végre

új beruházást (és ezért termelési eljárásaik feltehetően nem változtak), a termelékenység (az egy munkásórára jutó kibocsátás) évi átlagban mégis közel 2%-kal növekedett. Az állandóan növekvő teljesítményt itt is kizárólag a tapasztalatból való tanulásnak tulajdoníthatjuk.

Ebben a tanulmányban azt a hipotézist fejtjük ki, hogy a technikai haladás általában a tapasztalat következménye, hogy a problémák, amelyekre választ adnak, az idők folyamán magában a termelési tevékenységben merülnek fel. Ennek az eddigiekben idézett jelei — akár a pszichológiai, akár a közgazdasági irodalomból származtak — természetesen képzeletünket megmozgató példák csupán.

A tanulmány célja az, hogy ezt a hipotézist pontosabban megfogalmazzuk, és levonjuk néhány gazdasági következményét. Ily módon a hipotézist és következményeit sokkal könnyebben összevethetjük majd az empirikus tényekkel.

A bemutatandó modell bizonyos vonatkozásokban nagyon leegyszerűsített; figyelmen kívül hagyjuk benne például a tőke—munka helyettesítés lehetőségét. Célunk az, hogy ezzel az alaphipotézis sarkalatos szerepét még világosabbá tegyük. A gazdasági világról itt következő tételek különböznek a legtöbb standard gazdasági elmélet tételeitől: itt a profit a technikai változás eredménye; a szabad vállalkozás rendszerében a beruházás aránya kisebb az optimálisnál; a nettó beruházás és a tőkeállomány másodlagos fogalmakká válnak, a bruttó beruházásé lesz a vezető szerep.

Az 1. fejezetben a modell fő feltételezéseit fejtjük ki. A 2. fejezetben a bérből élőkre vonatkozó következményeket vonjuk le, a 3. fejezetben a profitokra, a beruházási ösztönzésre és a kamatlábra vonatkozóakat. A 4. fejezetben az egész rendszer viselkedésével foglalkozunk, állandó növekedés és kölcsönösen konzisztens várakozások mellett. Az 5. fejezet a társadalmi és az egyéni hozadékok különbségét tárgyalja részletesen egy speciális esetre (arra, amikor a jövőbeli fogyasztás szubjektív diszkontlába állandó érték). Végül, a 6. fejezet a modell érvényességének néhány korlátját és a továbbfejlesztés irányait vázolja.

1. A MODELL

Az első nehézséget annak a gazdasági változónak a megválasztása okozza, amely a „tapasztalatot" fejezi ki. Az említett gazdasági példák a kumulált kibocsátás (az összes kibocsátás a kezdeti időponttól fogva) felhasználásának a lehetőségét vetik fel a tapasztalat mérőszámaként, de ez nem tűnik teljesen kielégítőnek. Például az állandó ütemű kibocsátás a tanulás azonos mértékű ösztönzését jelenti, ami mellett a tudás fokozatosan az egyensúlyi magatartáshoz közeledik. Ez okból a bruttó beruházás kumulált értékét (a tőkejavak termelésének kumulált értéke) tekintjük a tapasztalat mérőszámának. Minden megtermelt és használatba vett új gép képes megváltoztatni a termelés körülményeit, és így általuk a tanulás állandóan új ösztönzést kap. Ez legalábbis valószerűvé teszi a folyamatos tanulást, ami itt a termelékenység állandó ütemű növekedésének felel meg.

A második kérdés annak eldöntése, hol lép be a tudás a termelés feltételei közé. Ebben Solow [12] és Johansen [7] modelljét követem, amelyek szerint a technikai változás teljes mértékben az új tőkejavakban testesül meg. Bármely új időpillanatban az új tőkejavak az akkor meglevő teljes tudást hordozzák, de ha egyszer már megépítettük őket, termelési hatékonyságuk további tanulással többé már nem változtatható meg.

A tárgyalás egyszerűsítésére feltételezzük, hogy egy bizonyos új tőkejószággal való termelés állandó koefficiensekkel jellemezhető, oly módon, hogy a termelés rögzített mennyiségű munkát igényel, és rögzített mennyiségű kibocsátást ad. Továbbá feltételezzük, hogy az új tőkejavak jobbak a régieknél, abban az értelemben, hogy ha összehasonlítunk egy egységnyi t_1 időpontban termelt tőkét egy egységnyi $t_2 > t_1$ időpontban termelt tőkével, az első legalább annyi munka közreműködését igényli, mint a második, és az első nem termel több terméket a másodiknál. E feltétel következtében az új tőke felhasználása mindig előnyösebb a régiekénél.

Legyen G a kumulált bruttó beruházás. Ahhoz az egységnyi tőkejószághoz, amivel a felhalmozódott bruttó beruházás mennyisége eléri a G értéket, a G *sorszámot* rendeljük. Legyen

$\lambda(G)$ = a G sorszámú tőkén való termelésben felhasznált munka mennyisége,

$\gamma(G)$ = a G sorszámú tőke kapacitása, kibocsátását tekintve,

L = az összes alkalmazott munkaerő.

Feltételeztük, hogy $\lambda(G)$ nem növekvő, míg $\gamma(G)$ nem csökkenő függvény. Ekkor tekintet nélkül a bérekre és a tőkejavak bérleti értékére, mindig kifizetődő a magasabb sorszámú tőkét alkalmazni az alacsonyabb sorszámú helyett.

Kikötjük továbbá, hogy a tőkejavak élettartama rögzített, $\overline{T}$. Ekkor a tőkejavak sorszámaik sorrendjében semmisülnek meg. Következésképpen bármely időpontban a működésben levő tőkék azok, amelyek sorszáma valamely G'-től G-ig, a kumulált bruttó beruházások folyó mennyiségéig terjed. Ebben az esetben:

$$x = \int_{G'}^{G} \gamma(G)\, dG, \tag{1}$$

$$L = \int_{G'}^{G} \lambda(G)\, dG. \tag{2}$$

Az x, L, G és G' mennyiségek természetesen függvényei az időnek, amit t-vel jelölünk, és ha ezt a függőséget ki kell emelni, $x(t), L(t), G(t)$ és $G'(t)$-nek írjuk őket. Ekkor például $G(t)$ a t időpontig kumulált bruttó beruházás. A tőkejavak élettartamára vonatkozó feltevésből következik, hogy

$$G'(t) \geqq G(t-\overline{T}). \tag{3}$$

Mivel $G(t)$ a t időpontban adott, G' értékét az (1)-ből, a (2)-ből vagy, ha az egyenlőség, a (3)-ból megállapíthatjuk. A gazdasági növekedés szempontjából a teljes foglalkoztatás a legtermészetesebb feltételezés. A munkaerőt az idő adott függvényének

tekintjük, és feltételezzük, hogy megegyezik a foglalkoztatott munkával, ily módon $L(t)$ egy adott függvény. Ekkor $G'(t)$ megkapható a (2) megoldásával. Ha behelyettesítjük az eredményt az (1)-be, az x az L és a G függvényeként írható fel, a szokásos termelési függvénnyel analóg módon. Ennek kifejezéséhez definiáljuk a

$$\Lambda(G) = \int \lambda(G)\, dG, \qquad \Gamma(G) = \int \gamma(G)\, dG. \tag{4}$$

határozatlan integrálokat. Mivel mind $\lambda(G)$, mind $\gamma(G)$ pozitív, azért $\Lambda(G)$ és $\Gamma(G)$ szigorúan monoton növekvők, tehát létezik inverzük: $\Lambda^{-1}(u)$ és $\Gamma^{-1}(v)$. Ily módon az (1), illetve a (2) a következőképpen írható fel:

$$x = \Gamma(G) - \Gamma(G'), \tag{1'}$$

$$L = \Lambda(G) - \Lambda(G'). \tag{2'}$$

A (2')-t G'-re megoldva:

$$G' = \Lambda^{-1}[\Lambda(G) - L]. \tag{5}$$

Az (5)-öt (1')-be helyettesítve:

$$x = \Gamma(G) - \Gamma\{\Lambda^{-1}[\Lambda(G) - L]\}, \tag{6}$$

ami tehát egy termelési függvény, némileg újszerű értelemben. A (6) egyenlőség mindig érvényes, de csak a teljes foglalkoztatás feltevése esetén tekinthetjük L-et a rendelkezésre álló munkaerő mennyiségének.

A depresszió helyzetére egy másik feltevés alkalmasabb, amely esetén a termék kereslete a korlátozó tényező. Ekkor x értékét adottnak tekintjük; G' az (1)-ből vagy az (1')-ből kifejezhető, a foglalkoztatás pedig a (2)-ből vagy a (2')-ből. Ha a foglalkoztatás kisebbnek adódik, mint a rendelkezésre álló munkaerő, a keynesi munkanélküliséggel állunk szemben.

Egy harmadik lehetőség, amely ugyanúgy, mint az első, alkalmas lehet a növekedés elemzésére, az, amikor az (5) megoldása az L segítségével nem elégíti ki a (3) feltételt. Ebben az esetben tőkehiány van, amely az elavulásnak tulajdonítható. Megint csak munkanélküliség lesz, de most nem a kereslet elégtelensége, hanem inkább szerkezeti eltérések miatt.

Bármelyik esetben, leszámítva a véletlen megegyezést, lesz olyan munkaerő, amelyet nem alkalmaznak, vagy lesz kihasználatlan tőke. A kereslet elégtelensége esetében mindkettő lehetséges. Természetesen egy neoklasszikusabb modell, amelyben szerepel a tőke és munka közötti helyettesítés valamennyi sorszámú tőkére, lehetővé teheti mind a tőke, mind a munka teljes kihasználását. E modell kidolgozása további kutatás tárgya lehet.

Az itt következőkben elsősorban a teljes foglalkoztatás esetét tanulmányozzuk. A harmadik esetet, a tőke hiányát, csak zárójelben említjük meg. Teljes foglalkoztatás mellett az elavulással kapcsolatos feltevés nem jelent igazi megszorítást, ez esetben

kizárólag a G'-nél alacsonyabb sorszámú tőkék elavulása okozhatja a tőkejavak kivonását a termelésből.

Az elemzést egy speciális eseten vezetjük végig. Nagyon durva megközelítésként a tőke—termelés arány állandó, míg a munka—termelés arány csökkenő. Feltételezzük tehát, hogy

$$\gamma(G) = a, \tag{7}$$

állandó, míg $\lambda(G)$ a G csökkenő függvénye. Közelebbről, kikötjük, hogy $\lambda(G)$ formája egyezzék meg a repülőgépvázak termelésében megállapított tanulási görbével.

$$\lambda(G) = bG^{-n}, \tag{8}$$

ahol $n>0$. Ily módon

$$\Gamma(G) = aG, \quad \Lambda(G) = cG^{1-n},$$

ahol $c=b/(1-n)$, $n\neq 1$ esetén.
Ekkor a (6) a következő alakot ölti:

$$x = aG\left[1-\left(1-\frac{L}{cG^{1-n}}\right)^{1/(1-n)}\right], \quad \text{ha} \quad n \neq 1. \tag{9}$$

A (9) egyenlőség a számunkra lényeges tartományokban mindig jól definiált, mivel (2')-ből

$$L = \Lambda(G)-\Lambda(G') \leqq \Lambda(G) = cG^{1-n}.$$

Ha $n=1$, akkor $\Lambda(G)=b \log G$ (a természetes alapú logaritmussal), és

$$x = aG(1-e^{-L/b}), \quad \text{ha} \quad n = 1. \tag{10}$$

Jóllehet a (9) és a (10) bizonyos értelemben termelési függvények, volumenhozadékuk G-ben és L-ben növekvő. Ez a (10)-re nyilvánvaló, ahol az L-et állandónak véve és a G-t növelve, x ugyanolyan arányban növekszik, és az L egyidejű növelése további x növekedést jelent. A (9)-et tekintve, először tételezzük fel, hogy $n<1$. Ekkor az L és a G arányos növelése növeli az L/G^{1-n} értékét, és ezért, növeli a zárójelben levő kifejezést, ami G-vel szorzódik. Hasonló az érvelés, ha $n>1$. Meg kell jegyezni, hogy x a G és L volumenének változásához képest általában, és nem csupán a (7) és a (8) által megadott speciális esetekben növekszik az arányosnál jobban. Ez a (6) viselkedésének kimerítő vizsgálatával igazolható lenne, amelyben ismét felhasználjuk, hogy $\lambda(G)$ nem növekvő és $\gamma(G)$ nem csökkenő, és legalább az egyikre igaz a szigorú monotonitás. Intuitív meggondolással állításunk világos, mivel az L és a G újabb mennyiségeit a korábbiaknál hatékonyabban használják fel.

A növekvő hozadék mindazonáltal nem kerül összeütközésbe az elosztás elméletével. Látni fogjuk, hogy mind a tőkének, mind a munkának a határtermékeit fizetik, ha a határterméket megfelelően definiáljuk. Ennek magyarázata természetesen az, hogy a tőke (pontosabban az új beruházás) privát határtermelékenysége alacsonyabb

lesz társadalmi határtermelékenységénél azzal, hogy a tanulás eredményét a piac nem fizeti meg.

Ebben a fejezetben a kifejtett termelési feltételezések célja ugyanaz, mint Káldor „technikai fejlődési függvényéé", amely az egy munkásra jutó kibocsátás növekedési ütemét viszonyítja az egy munkásra jutó tőke növekedési üteméhez (lásd [8], VIII. rész). Jómagam viszont a növekedési ütemek közötti összefüggéseket inkább úgy értelmezem, mint az elsődleges mennyiségek közötti összefüggések következményeit. Ezenkívül az itt kifejtett megfogalmazás a technikai változás alapvető hordozójaként inkább a bruttó, mint a nettó beruházásra helyezi a hangsúlyt.

Korábban Haavelmo ([4], 7.1. és 7.2. részei) javasolt egy többé-kevésbé hasonló modellt. Nála a kibocsátás a tőkétől és a tudástól függött; a beruházás a kibocsátástól, a tőkeállománytól és a felhalmozott tudástól. A felhalmozott tudás vagy pusztán az idő függvénye volt, vagy — egy kifinomultabb változatban — a beruházásból következett; egy adott beruházás oktató hatása az időben exponenciálisan csökkent.

Verdoorn ([14], 436—437. old.) szintén kidolgozott egy hasonló egyszerű modellt, amelyben a termeléshez szükséges tőke és munka a kibocsátásnak nemlineáris függvényei (azon az alapon, hogy a kibocsátás szintje közelítőleg méri a kumulált kibocsátást, és ezért a tanulást), a beruházás pedig a kibocsátásnak egy állandó hányada. Verdoorn megjegyzi, hogy e feltételek mellett a tőke és a munka együttes teljes kihasználása általában lehetetlen, amely következtetés, mint láttuk, a mi modellünkben is igaz. Ennek ellenére Verdoorn hamis következtetéshez jut; azt gondolja, hogy a megtakarítási hányadot valamilyen társadalmi mechanizmus útján rögzíteni kell azon az egyértelműen meghatározott szinten, ami biztosítja mindkét tényező teljes foglalkoztatását. A helyes következtetés az, hogy vagy az egyik, vagy a másik tényező kihasználatlan lesz. Modellünk számára e tétel társadalmi jelentősége sokkal kisebb, mivel itt a kihasználatlanság terhét az elavult tőke is viselheti. Verdoorn modelljében ez nem állhat fenn, ő a tőkét homogénnek tekinti.

2. A BÉREK

A teljes foglalkoztatás feltételezése mellett a G' sorszámú tőke felhasználásakor a nyereségességnek nullának kell lennie; mivel, ha pozitív lenne, akkor nyereséges lenne alacsonyabb* sorszámú tőkéket is felhasználni, és ha negatív lenne, akkor a G' tőkét nem alkalmaznák, ami ellentétben van a G' definíciójával. Legyen

w = a bér a kibocsátás egységében kifejezve.

Az (1′) és a (7) összefüggésből:

$$G' = G-(x/a), \tag{11}$$

* Az eredeti szövegben „magasabb" áll, nyilván elírás. *(Ell. szerk.)*

úgyhogy

$$\lambda(G') = b\left(G-\frac{x}{a}\right)^{-n}. \tag{12}$$

A G' tőke kibocsátása $\gamma(G')$, míg működtetésének költsége $\lambda(G')w$. Ezért

$$\gamma(G') = \lambda(G')w,$$

valamint a (7) és a (12) következményeként:

$$w = a\left(G-\frac{x}{a}\right)^{n}\Big/b. \tag{13}$$

Érdekes kiszámítani a munka részesedési arányát, ami wL/x. A (2')-ből $\Lambda(g)=$ $=c\,G^{1-n}$, és a (11) által adott G' mellett

$$L = c\left[G^{1-n}-\left(G-\frac{x}{a}\right)^{1-n}\right], \quad \text{ha} \quad n \neq 1,$$

és ezért

$$wL/x = a\left[\left(\frac{G}{x}-\frac{1}{a}\right)^{n}\left(\frac{G}{x}\right)^{1-n}-\left(\frac{G}{x}-\frac{1}{a}\right)\right]\Big/(1-n), \quad \text{ha} \quad n \neq 1, \tag{14}$$

ahol felhasználtuk a $c=b/(1-n)$ összefüggést. Érdekes megfigyelni, hogy a munka részesedési aránya a G/x arányból határozható meg. Mivel azonban x a G és az L függvénye, amelyek mindig egy időpont adatai, hasznos kifejezni a w bérarányt és a munka wL/x részesedési arányát is az L és a G függvényeként. Először G'-t adjuk meg a (2') megoldásával.

$$G' = \left(G^{1-n}-\frac{L}{c}\right)^{1/(1-n)}, \quad \text{ha} \quad n \neq 1. \tag{15}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel a következő összefüggéseket nyerjük

$$w = a\left(G^{1-n}-\frac{L}{c}\right)^{n/(1-n)}\Big/b, \tag{16}$$

$$\frac{wL}{x} = \frac{\left[\left(\frac{L}{G^{1-n}}\right)^{(1-n)/n}-\frac{1}{c}\left(\frac{L}{G^{1-n}}\right)^{1/n}\right]^{n/(1-n)}}{b\left[1-\left(1-\frac{L}{cG^{1-n}}\right)^{1/(1-n)}\right]}. \tag{17}$$

A munka részesedési aránya ily módon az L/G^{1-n} hányadostól függ; mégpedig meg lehet mutatni, hogy ha ez a hányados nő, a munka részesedési aránya csökken.

A teljesség kedvéért felírjuk az $n=1$ esetnek megfelelő formulákat is. A G és az x függvényében:

(18) $$w = (aG-x)/b,$$

(19) $$wL/x = \left(\frac{aG}{x}-1\right)\log\frac{G/x}{(G/x)-(1/a)}.$$

A G és az L függvényében:

(20) $$G' = Ge^{-L/b},$$

(21) $$w = \frac{aG}{be^{L/b}},$$

(22) $$wL/x = \frac{L}{b(e^{L/b}-1)}.$$

Ebben az esetben a munka részesedési aránya csak az L-től függ, ami valóban az L/G^{1-n}-től való függés speciális ($n=1$) esete.

Az előző tárgyalás teljes foglalkoztatást feltételezett. Tőkehiány esetén versenyegyensúly nem állhat fenn pozitív bérek mellett, hiszen ilyenkor szükségképpen munkanélküliség van. A nulla bér viszont nyilvánvalóan irreális. A modell teljességéhez szükséges lenne néhány további feltételezés a bérek viselkedéséről. A kérdést általánosságban nem tárgyaljuk; az állandó ütemű növekedés speciális esetével majd az 5. fejezetben találkozunk.

3. PROFIT ÉS BERUHÁZÁS

Egységnyi, a v-edik ($v \leqq t$) időszakbeli beruházás nyeresége a t-edik időszakban

$$\gamma[G(v)]-w(t)\lambda[G(v)].$$

Amikor meggondoljuk, hogy beruházzunk-e a v-edik időszakban, a potenciális nyereségek a jövőbeli bérekre vonatkozó várakozásoktól függnek. Feltételezzük, hogy egy adott időpontban előretekintve, valamennyi vállalkozó a bérek exponenciális emelkedését várja a fennálló szinthez képest. Ily módon a v-edik időpontban a t-edik időpontra várt bér $w(v)e^{\theta(t-v)}$, és a v-edik időpontban a t-edik időpontra várt nyereség

$$\gamma[G(v)][1-W(v)e^{\theta(t-v)}],$$

ahol

(23) $$W(v) = w(v)\lambda[G(v)]/\gamma[G(v)]$$

az egységnyi kibocsátás munkaköltsége a beruházás időpontjában. A W változónak a v-től való függését explicit módon csak akkor fejezzük majd ki, ha erre szükség

lesz. A beruházás nyereségességét az időben csökkenőnek várjuk (ha $\theta>0$) úgy, hogy a T^*+v időpontban nullává válik. A T^* időt a

$$We^{\theta T^*} = 1. \tag{24}$$

egyenlet definiálja.

T^* tehát a beruházás előrelátható gazdasági élettartama, feltéve, hogy nem nagyobb $\overline{T}$-nél, a fizikai élettartamnál. Legyen

$$T = \min(\overline{T}, T^*). \tag{25}$$

Ekkor a beruházó a T hosszúságú időszakban számít nyereségre, ennek végére a beruházás vagy már elavult fizikailag, vagy a bérek emelkedtek addig a pontig, ahol már nem nyereséges a működtetése. Mivel azok a béremelkedést illető várakozások, amelyek kiváltják a selejtezést az előrelátható beruházásoktól és az ezeknek megfelelő technikai haladástól függnek, azért T^* az elavulás előrelátható időpontja. Legyen

$$\varrho = a \text{ kamatláb.}$$

Ha a kamatlábról feltételezik, hogy a jövőben állandó marad, akkor a nyereségek diszkontált árama a beruházás működésének tartamára:

$$S = \int_0^T e^{-\varrho t}\gamma[G(v)](1-We^{\theta t})\,dt, \tag{26}$$

vagy

$$\frac{S}{\gamma[G(v)]} = \frac{1-e^{-\varrho T}}{\varrho} + \frac{W(1-e^{-(\varrho-\theta)T})}{\theta-\varrho}. \tag{27}$$

Legyen

$$V = e^{-\theta T} = \max(e^{-\theta T}, W), \quad \alpha = \varrho/\theta. \tag{28}$$

Akkor

$$\frac{\theta S}{\gamma[G(v)]} = \frac{1-V^{\alpha}}{\alpha} + \frac{W(1-V^{\alpha-1})}{1-\alpha} = R(\alpha). \tag{29}$$

Ahhoz, hogy az $R(\alpha)$ függvény az $\alpha=0$ és $\alpha=1$ helyeken is folytonos legyen, értékeit a következőképp kell definiálni:

$$R(0) = -\log V + W(1-V^{-1}), \quad R(1) = 1-V+W\log V.$$

Ha a (26), a (27) és a (29) összefüggések valamennyi paraméterét állandónak vesszük, akkor az S a ϱ függvénye, és ami ezzel ekvivalens, R az α függvénye. Ha (26)-ot ϱ szerint differenciáljuk, azt kapjuk, hogy

$$dS/d\varrho = \int_0^T (-t)e^{-\varrho t}\gamma[G(v)](1-We^{\theta t})\,dt < 0.$$

Ezenkívül

$$S < \gamma[G(v)] \int_0^T e^{-\varrho t}\, dt = \gamma[G(v)](1-e^{-\varrho T})/(\varrho < \gamma[G(v)]/\varrho.$$

Mivel nyilvánvaló, hogy $S>0$, azért az S a nullához tart, ha a ϱ a végtelenhez. Mivel az R és az α csak egy-egy pozitív állandó tényezőben különbözik az S-től, illetve a ϱ-tól, levonhatjuk a következtetést:

$$dR/d\alpha < 0, \quad \lim_{\alpha \to +\infty} R(\alpha) = 0.$$

Ahhoz, hogy $R(\alpha)$ viselkedését az $\alpha \to -\infty$ esetben megvizsgálhassuk, tekintsük az

$$R(\alpha) = -\frac{(1/V)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}[(1-\alpha)V+\alpha W]\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}+\frac{W}{1-\alpha}$$

alakot. Ebben az utolsó két tag nullához tart. Ha $\alpha \to -\infty$, akkor $1-\alpha \to +\infty$. Mivel $1/V>1$, azért az

$$\frac{(1/V)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}$$

tényező a $+\infty$-hez tart, mivel egy exponenciális függvény bármely hatványfüggvénynél gyorsabban tart végtelenhez. A (28)-ból $V \geqq W$. Ha $V=W$, akkor az

$$(1-\alpha)V-\alpha W = \alpha(W-V)+V$$

tényező pozitív állandó; ha $V>W$, akkor ez a tényező $+\infty$-hez tart, amint az α tart a $-\infty$-hez. Végül az

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

szükségképpen a -1-hez tart. Tehát:

(30) $R(\alpha)$ szigorúan monoton csökkenő függvény, amely $+\infty$-hez tart, ha α tart a $-\infty$-hez, és θ-hoz tart, ha α tart a $+\infty$-hez.

A piacnak azonban úgy kell alakítania a kamatlábat, hogy a profitok diszkontált árama a beruházási költséggel legyen egyenlő, vagyis $S=1$ legyen, illetve a (29)-ből:

$$R(\alpha) = \theta/\gamma[G(v)]. \tag{31}$$

Mivel a (31) jobb oldala pozitív, a (30) tétel biztosítja, hogy létezik olyan α, amely kielégíti a (31)-et. Adott θ esetén az egyensúlyi profitráta, ϱ egyenlő az $\alpha\theta$ értékkel, ami valóban lehet negatív is. A profitráta ily módon a bérek várható növekedésétől, az egységnyi kibocsátás folyó munkaköltségétől és a beruházás fizikai élettartamától függ. Továbbá, ha ezek közül az első kettő elég nagy, akkor a fizikai élettartamnak nincs hatása, mert ekkor $T^* < \overline{T}$, és $T=T^*$.

A profitok és hozadékok tárgyalásakor a termelési összefüggések alakjára nem éltünk speciális feltevésekkel.

4. ÉSSZERŰ VÁRAKOZÁSOK A MAKROGAZDASÁG EGY NÖVEKEDÉSI MODELLJÉBEN

Tekintsünk úgy egy egyszektoros modellt, hogy az egész gazdaság termelési összefüggéseit az 1. fejezet modellje adja. Ebből például az következik, hogy bármely időpont bruttó beruházása egyszerűen elvonás azokból a javakból, amelyeket egyébként elfogyaszthatna a gazdaság. A kibocsátás és a bruttó beruházás ebben az esetben ugyanazzal a mértékegységgel mérhető.

Felmerül a kérdés, hogy teljesülhetnek-e valójában azok a várakozások, amelyek az előző rész feltételezései szerint a beruházásokat szabályozzák. Különösen kérdéses, hogy a bérek viszonylagos növekedése és a kamatláb lehetnek-e olyan állandók, amelyeknek megfelelő várakozások a vállalkozókat úgy irányítják, hogy a beruházási hányad — a kívülről adott kamatlábbal összhangban — egy adott szinten maradjon. A világ ilyen berendezését gyakran nevezik „tökéletes előrelátás"-nak, bár jobb ennél J. Muth [10] kifejezése, a „racionális várakozások".

A kérdést először a teljes foglalkoztatás esetében tanulmányozzuk. Ekkor a beruházások fizikai élettartama nem jelent igazi korlátozást. Ha, az előző fejezet jelöléseivel, $T^* > \overline{T}$, és a bérekre vonatkozó várakozások helyesek, a beruházások értéktelenedésük időpontjában még mindig pozitív nyereséggel működnek. Mint a 2. fejezetben láttuk, ez a versenyegyensúllyal és a teljes foglalkoztatással nem egyeztethető össze. Tegyük fel ezért, hogy

$$T^* \leqq \overline{T}; \tag{32}$$

ekkor a (28)-ból $W = V$, és a (29)-ből valamint a (31)-ből a ϱ egyensúlyi értékét a

$$\frac{1-W^{\alpha}}{\alpha} + \frac{W-W^{\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\Theta}{a}, \tag{33}$$

egyenlet határozza meg, ahol a jobb oldalon fölhasználtuk a (7) összefüggést.

A (16)-ból látható, hogy a bér állandó, θ ütemű növekedéséhez szükséges, hogy a

$$G^{1-n} - \frac{L}{c}$$

mennyiség $\theta(1-n)/n$ ütemben növekedjék. Mivel θ állandó, a (33)-ból következik, hogy egy állandó ϱ és ennek következtében állandó α fennállásához állandó W szükséges. A (7) és a (8)-beli speciális termelési összefüggésekre a (23) megmutatja, hogy

$$W = a \frac{\left(G^{1-n} - \frac{L}{c}\right)^{n/(1-n)}}{b} \frac{bG^{-n}}{a} = \left(1 - \frac{L}{cG^{1-n}}\right)^{n/(1-n)},$$

és ezért W állandósága ekvivalens az L/G^{1-n} mennyiség állandóságával. Az előző megjegyzéssel együtt ezzel beláttuk, hogy

(34) Az L a $\theta(1-n)/n$ ütem szerint, a G pedig θ/n ütemben növekszik.

Tegyük fel, hogy

$$\sigma = \text{a munkaerő növekedési üteme,}$$

egy adott állandó. Ekkor

(35) $$\Theta = n\sigma/(1-n), \quad \text{és}$$

(36) $$G \text{ növekedési üteme: } \sigma/(1-n).$$

Behelyettesítve a (9) termelési függvénybe

(37) $$x \text{ növekedési üteme: } \sigma/(1-n).$$

A (36) és a (37) következtében a G/x arány az időben állandó. Eddigi meggondolásaink viszont nem adják meg ennek az állandónak a konkrét értékét, a rendszer teljességéhez a megtakarítási függvény is szükséges. Legyen az említett állandó arány

(38) $$G(t)/x(t) = \mu$$

Definiáljuk:

$g(t)=dG/dt$ a bruttó beruházás üteme a t-edik időpontban.

A (36)-ból $g/G=\sigma/(1-n)$ állandó. Ekkor

(39) $$g/x = (g/G)(G/x) = \mu\sigma/(1-n).$$

Egyszerű feltételezés, hogy a bruttó megtakarítás (ami egyenlő a bruttó beruházással) aránya a jövedelemben (ami egyenlő a kibocsátással) a ϱ kamatláb függvénye legyen. (Az a szokásos feltevés, hogy e megtakarítás—jövedelem arány állandó, ennek egy speciális esete.) Ekkor μ is a ϱ függvénye. Másrészt a (23) és a (13) felhasználásával W-t a következőképpen írhatjuk fel:

(40) $$W = a\frac{\left(G-\frac{x}{a}\right)^n}{b}\frac{bG^{-n}}{a} = \left(1-\frac{x}{aG}\right)^n = \left(1-\frac{1}{a\mu}\right)^n.$$

Mivel θ-t a (35) összefüggés megadja, azért a (33) a W és a ϱ közötti összefüggés, és a (40) következtében a μ és a ϱ közötti összefüggés is. Most már két összefüggésünk van a μ és a ϱ között, nagyságuk tehát meghatározott.

A (38)-ból μ segítségével G és X között már kaptunk egy összefüggést. Ha a munkaerő, L adott egy időpontban, akkor a (9) termelési függvény még egy ilyen összefüggést ad, és így a rendszer teljesen meghatározott.

Mint számos más növekedési modellben, a rendszer változóinak növekedési üteme itt sem függ a megtakarítási magatartástól, jóllehet abszolút nagyságuk függ tőle.

Ki kell emelnünk, hogy mindössze egy olyan megoldás létezését bizonyítottuk be, amelyben minden változó állandó — és tökéletesen előrelátott — ütemben növekszik. A megoldás stabilitása további vizsgálatot igényel.

Ebben a megoldásban a bérek növekedési ütemének van egy ellentmondásos oldala: a munkaerő növekedési ütemével együtt emelkedik; (feltéve, hogy $n<1$). Ennek magyarázata az lehet, hogy teljes foglalkoztatás mellett a növekvő munkaerő lehetővé teszi az új felszerelések gyorsabb létesítését. Meg kell jegyezni azt is, hogy állandó g/x megtakarítási arány mellett a σ növekedése a (39) szerint μ csökkenését eredményezi, amiből belátható, hogy a bérek a kezdő időpontban alacsonyabbak lennének. Ebben az összefüggésben megemlíthető, hogy a σ-nak és $1-n$-nek egyforma előjelűnek kell lenniük ahhoz, hogy állandó növekedési ütemű pálya létezhessék. Természetesen $\sigma>0$ és $n<1$ a legkézenfekvőbb eset.

Ez a megoldás azonban csak akkor megengedett, ha teljesül a (32) feltétel, azaz, hogy az értékcsökkenés nem lehet túl gyors. Az új beruházás gazdasági élettartamára, T^*-ra közvetlen formulát is megadhatunk. A (24) miatt ez kielégíti az $e^{-\theta T^*}=W$ feltételt. Ha vesszük a (35) és a (40) összefüggéseket, és megoldjuk őket T^*-ra, a következőt kapjuk:

$$T^* = \frac{-(1-n)}{\sigma} \log\left[1-\frac{1}{a\mu}\right], \tag{41}$$

és ezt kell összehasonlítani $\overline{T}$-vel. A teljes foglalkoztatási megoldás az exponenciálisan növekvő bérekre és az állandó kamatlábra vonatkozó ésszerű várakozások feltevésével akkor megengedett, ha $T^* \leqq \overline{T}$.

Ha $T^*>\overline{T}$, akkor a teljes foglalkoztatási megoldás nem megengedett. Felvethető, hogy vajon lehetséges-e ebben az esetben állandó növekedésű megoldás. A válasz a bérek dinamikájára vonatkozó feltételezésektől függ.

Megőrizzük azt a két feltételezést, hogy a bérek állandó ütemben nőnek, és a kamatláb állandó. Állandó θ mellett a ϱ kamatlábat a (31) összefüggés meghatározza; ez a (29) miatt megköveteli, hogy fennálljon, hogy

(42) W az időben állandó.

A (23) összefüggésből, azaz W definíciójából és a termelési összefüggések sajátos, a (7) és a (8) alakjából következik, hogy a bérhányadnak, w-nek ugyanolyan ütemben kell emelkednie, mint G^n-nek, azaz:

(43) G az állandó θ/n ütemben nő.

Tartós munkanélküliség mellett a szabad piacon a csökkenő, vagy legjobb esetben az állandó bérszint lenne a legtermészetesebb. Mivel azonban a G sohasem csökkenhet, a (43)-ból az következik, hogy a θ soha nem lehet negatív. Nem fogunk külön kikötést tenni a bérváltozásokra, hanem feltételezzük, hogy a kormány, a szakszervezet vagy a társadalom nyomására θ bármely értéke fennállhat, és azt vizsgáljuk

majd meg, hogy a többi egyensúlyi feltétel milyen korlátozásokat ad θ lehetséges értékeire.

Tőkehiány esetén a legrégebben működő tőke sorszámát a fizikai élettartam határozza meg, vagyis

$$G' = G(t-\overline{T}).$$ A (43)-ból

$$G(t-T) = e^{-\Theta T/n}G.$$

Ekkor az (1')-ből és a (7)-ből

$$x = aG(1-e^{-\Theta T/n})$$

úgy, hogy a G/x arány, azaz μ állandó, éspedig:

$$\mu = 1/a(1-e^{\Theta T/n}). \tag{44}$$

A (43)-ból $g/G=\theta/n$; ezért ugyanazzal az érveléssel, ami a (39) összefüggéshez vezetett:

$$g/x = \Theta/na(1-e^{-\Theta T/n}). \tag{45}$$

A növekedési folyamatnak három ismeretlen állandója van: θ, ϱ és W. Ha, mint az előzőekben, feltesszük, hogy a bruttó megtakarítás aránya, g/x, a ϱ kamatlábanak függvénye, akkor adott ϱ esetén a θ a (45)-ből meghatározható. Vegyük észre, hogy a (45) jobb oldala θ-nak — $\theta \geqq 0$ esetén — szigorúan monoton növekvő függvénye úgy, hogy a megoldás egyértelmű, és a növekedés üteme a bruttó megtakarítási hányad növekvő függvénye, ami ellentétes a teljes foglalkoztatásnál kapott eredménnyel. Ezek után W a (31)-ből és a (29)-ből adható meg.

Ily módon a kamatláb szabadon megválasztható paraméter, amely meghatározza a növekedés ütemét és W-t, valamint az induló bérszintet is. Természetesen ahhoz, hogy a megoldás a tőkehiányos esethez tartozzék és ne a teljes foglalkoztatáséhoz, néhány egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell (például ilyen a $W \leqq V$); és a munkaerőnek is elegendőnek kell lennie a növekedéshez. A (2')-t figyelembe véve ez azt követeli, hogy a munkaerő minden időpontban legalább a

$$cG^{n-1} - c(G')^{n-1} = cG^{n-1}(1-e^{-\theta(1-n)\overline{T}/n})$$

mennyiséget érje el. Ha σ a munkaerő növekedési üteme, fenn kell állnia, hogy

$$\sigma \geqq \theta(1-n)/n, \tag{46}$$

amely felső korlátot ad θ-ra (ha $n<1$). $\theta \geqq 0$ és $W \geqq 0$ további feltételeket adna ϱ-ra (ha feltételezzük, hogy a bérhányadok nemnegatívak). Az első feltétel alsó korlátot ad g/x-re; a (45)-ből megmutatható, hogy

$$g/x \geqq 1/a\overline{T}; \tag{47}$$

vagyis a bruttó megtakarítási hányadnak legalább akkorának kell lennie, mint amennyi az élettartamuk alatt egységnyi kibocsátást hozó tőkejavak mennyisége. A $W>0$ megkötésből következik, hogy ϱ-nak egy intervallumban kell elhelyezkednie. E megszorítások konzisztenciájának feltételeit (hogy létezik-e legalább egy megoldás a tőkehiányos esetre) nem vizsgáltuk meg.

5. AZ EGYÉNI ÉS A TÁRSADALMI EREDMÉNY ELTÉRÉSE

Amint azt már hangsúlyoztuk, a tanulási folyamatból következik, hogy a beruházások a jövő beruházóinak is javára válnak, bár ezt az előnyt a piac nem fizeti meg. Ezért várható, hogy az előző rész versenymodelljében az összes beruházás nem éri el a társadalmilag optimális szintet. Ebben a részben ezt a különbséget vizsgáljuk meg részletesen, egy egyszerű feltevéssel élve a társadalom hasznossági függvényéről. A rövidség kedvéért az előző rész *kompetitív megoldás*ára hivatkozom majd, szembeállítva azt az *optimális* megoldással. Teljes foglalkoztatást feltételezünk. Megmutatjuk, hogy a társadalmilag optimális növekedési ütem azonos azzal, ami a verseny körülményei mellett adódik, de a bruttó beruházásnak a társadalmilag optimális aránya a kibocsátáshoz képest magasabb, mint a kompetitív arány.

A hasznosságot a fogyasztás folyamának függvényeként kezeljük. Legyen

$$c = \text{Fogyasztás} = \text{Kibocsátás} - \text{Bruttó beruházás} = x - g.$$

Ha feltételezzük, hogy a jövőbeli fogyasztást állandó β diszkontlábbal számítják át (diszkontálják), akkor a hasznosság

$$U = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} c(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} x(t)\, dt - \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} g(t)\, dt. \tag{48}$$

Parciálisan integrálva:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} g(t)\, dt = e^{-\beta t} G(t) \int_0^{+\infty} + \beta \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} G(t)\, dt.$$

A (48)-ból

$$U = U_1 - \lim_{t \to +\infty} e^{-\beta t} G(t) + G(0), \tag{49}$$

ahol

$$U_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} [x(t) - \beta G(t)]\, dt. \tag{50}$$

A döntési feladat a $G(t)$ függvény megválasztása, $G'(t) \geqq 0$, úgy, hogy a (49)-et maximalizálja, ahol $x(t)$-t a (9) termelési függvény határozza meg, és

$$L(t) = L_0 e^{\sigma t}. \tag{51}$$

A (49) második tagja szükségképpen nemnegatív. Meg fogjuk mutatni, hogy elég magas β diszkontláb esetén az U_1-et maximáló $G(t)$ függvény azt is teljesíti, hogy a (49) második tagja nulla, ezért a (49)-et is maximalizálja, hiszen $G(0)$ adott nagyság.

Helyettesítsük be a (9) és az (51) összefüggéseket az (50)-be.

$$U_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} G(t) \left[a - \beta - a \left(1 - \frac{L_0 e^{\sigma t}}{c G^{1-n}} \right)^{1/(1-n)} \right] dt.$$

Legyen

$$\bar{G}(t) = G(t) e^{-\sigma t/(1-n)}.$$

$$U_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\beta - \frac{\sigma}{1-n}\right) t} \bar{G}(t) \left[a - \beta - a \left(1 - \frac{L_0}{c \bar{G}^{1-n}} \right)^{1/(1-n)} \right] dt.$$

Tegyük fel, hogy

(52) $$\beta > \frac{\sigma}{1-n};$$

különben végtelen hasznosság is elérhető. Ekkor U_1 maximálásához elegendő $\bar{G}(t)$-t úgy megválasztani, hogy valamennyi t esetén maximális legyen:

(53) $$\bar{G} \left[a - \beta - a \left(1 - \frac{L_0}{c \bar{G}^{1-n}} \right)^{1/(1-n)} \right].$$

Mielőtt ténylegesen meghatároznánk a maximumot, megjegyezzük, hogy $\bar{G}$ maximalizáló értéke független t-től, tehát állandó érték. Így az optimális döntés

(54) $$G(t) = \bar{G} e^{-\sigma t/(1-n)},$$

úgy, hogy a (36)-ból a növekedési ütem a kompetitív növekedési ütemmel azonosnak adódik. Az (52)-ből $e^{-\beta t} G(t) \to 0$, amint $t \to +\infty$.

Az optimális $\bar{G}$ meghatározásához előnyös új változók bevezetése. Definiáljuk

$$v = \left(1 - \frac{L_0}{c \bar{G}^{1-n}} \right)^{n/(1-n)}$$

úgy, hogy

(55) $$\bar{G} = \left[\frac{L_0}{(1 - v^{(1-n)/n})} \right]^{1/(1-n)}.$$

Az elemzést elsősorban arra az esetre végezzük el, ahol az egységnyi tőkére jutó kibocsátás elég magas; pontosabban, ahol

(56) $$a > \beta.$$

Legyen

(57) $$\gamma = 1 - \frac{\beta}{a} > 0.$$

A $\bar{G}$ vagy a v maximalizáló értéke nem változik meg, ha az (53) függvényt, amit maximálni kívánunk megszorozzuk a $(c/L_0)^{1/(1-n)}/a$ pozitív mennyiséggel, és azután elvégezzük az (55) és az (57) behelyettesítéseket. Így v maximalizálja az

$$(1-v^{(1-n)/n})^{-1/(1-n)}(\gamma-v^{1/n}) \qquad \text{értékét.}$$

A v változó nullától egyig vehet fel értékeket. A második tényező eltűnik, ha $v=\gamma^n<1$ (mivel $\gamma<1$), v-nek ennél nagyobb értékeire pedig negatívvá válik; és mivel az első tényező mindig pozitív, azért feltehetjük a maximum keresésénél, hogy $v<\gamma^n$, és mindkét tényező pozitív. Ez esetben v a vizsgált függvény logaritmusát is maximálja, ami

$$f(v)=-\frac{\log(1-v^{(1-n)/n})}{1-n}+\log(\gamma-v^{1/n}),$$

úgyhogy

$$f'(v)=\frac{v^{\frac{1}{n}-2}}{n}\left[\frac{\gamma-v}{(1-v^{(1-n)/n})(\gamma-v^{1/n})}\right].$$

Világos, hogy $n<1$ esetén $f'(v)>0$, ha $0<v<\gamma$, és $f'(v)<0$, ha $\gamma<v<\gamma^n$, így a maximumot az

(58) $$v=\gamma$$

érték mellett érjük el. Az optimális $\bar{G}$-t úgy kapjuk meg, hogy az (55)-be v helyére γ-t helyettesítünk.

Az (54)-ből L/G^{1-n} az időben állandó. A v változó definíciójából és az (58) összefüggésből ekkor

$$\gamma=\left(1-\frac{L}{cG^{1-n}}\right)^{n/(1-n)}$$

valamennyi t-re az optimális pályán, és a (9) termelési függvényből

(59) $$\gamma=\left(1-\frac{x}{aG}\right)^{n}$$

valamennyi t-re az optimális pályán.

Ezt az optimális megoldást hasonlítjuk össze az előző fejezetben tanulmányozott állandó növekedésű kompetitív megoldással. A (40)-ből tudjuk, hogy

(60) $$W=\left(1-\frac{x}{aG}\right)^{n}$$

valamennyi t-re az optimális pályán.

Meg fogjuk mutatni, hogy $W<\gamma$, és ebből már következik, hogy *a G/x arány a kompetitív pálya mentén kisebb, mint az optimális pálya mentén.* Mivel mindkét pályán

$$g/x=[\sigma/(1-n)](G/x),$$

az is következik, hogy *a bruttó megtakarítási arány a kompetitív pályán kisebb, mint az optimális pályán.*

A speciális (48) alakú hasznossági függvény esetén a tőke kínálata $\varrho = \beta$ esetén végtelenül rugalmas, azaz β-t meghaladó kamatláb mellett a közösség bármely beruházást megvalósít, míg β-nál kisebb kamatláb mellett egyáltalán nem lesz beruházás. Egyensúly esetén, ahol megtakarítanak valamennyi jövedelmet, de nem az összeset, fenn kell hogy álljon:

$$\varrho = \beta. \tag{61}$$

A (35)-ből $\theta = n\sigma(1-n)$, így a (28) definíció szerint

$$\alpha = (1-n)\beta/n\sigma. \tag{62}$$

Mivel $n<1$, a (62)-ből és az (52) feltevésből következik, hogy

$$\alpha > 1. \tag{63}$$

Így a (33) egyenlet lesz az, ami W-t meghatározza. A bal oldalt $F(W)$-vel jelöljük.

$$F'(W) = \frac{1-W^{(\alpha-1)}}{1-\alpha}.$$

A (63)-ból $F'(W)<0$, ha $0 \leqq W<1$, és csak ez a minket érdeklő tartomány, mivel a beruházás sosem lesz nyereséges, ha $W>1$. A $W<\gamma$ bemutatásához elegendő megmutatni, hogy $F(W)>F(\gamma)$ a W azon értékeire, amelyek kielégítik a (33) egyenletet, vagyis megmutatni, hogy

$$F(\gamma) < \theta/a. \tag{64}$$

Végezetül a (64) belátásához megjegyezzük, hogy $\gamma<1$ és $\alpha>1$, amiből következik, hogy $\gamma^\alpha<\gamma$, és ezért

$$(1-\alpha)-\gamma^\alpha+\alpha\gamma > (1-\alpha)(1-\gamma).$$

Mivel $\alpha>1$, $\alpha(1-\alpha)<0$. Mindkét oldalt elosztva ezzel a mennyiséggel az eredmény

$$\frac{1-\gamma^\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma-\gamma^\alpha}{1-\alpha} < \frac{1-\gamma}{\alpha} = \frac{\Theta}{a},$$

ahol az (57), a (28) és a (61) összefüggéseket használtuk fel. De a (33)-ból látszik, hogy a bal oldal éppen $F(\gamma)$, és ezzel a (64) összefüggést beláttuk.

Az (56) által kizárt $a \leqq \beta$ esetet hasonlóan kezelhetjük, és ekkor az optimális v nulla. Hasonló okoskodás megmutatja, hogy az ennek megfelelő kompetitív pályán $W<0$ lenne, ami lehetetlen.

6. NÉHÁNY MEGJEGYZÉS

1. Sok szerző, mint például Theodore Schultz, hangsúlyozta, hogy a megnövekedett termelékenység egyik forrása a munkaerő minőségének javulása az idő folyamán. Ez az értelmezés beépíthető modellünkbe, annak feltételezésével, hogy σ, a munkaerő növekedési üteme ugyanúgy tartalmazza a minőségi, mint a mennyiségi növekedést.

2. Ebben a modellben az egyes időpontok új beruházásaihoz egyetlen hatékony tőke—munka arány tartozik. A legtöbb modellben az ellenkezőjét tételezik fel; azt, hogy többféle tőke—munka arány lehetséges mind a tőkeberuházás előtt, mind utána. Egy még kézenfekvőbb modell Johansené [7], amelyben a beruházás időpontja előtt többféle tőke—munka arány áll a vállalkozó rendelkezésére, de a tőke—munka arány rögzített, ha a beruházás már tőkejószággá szilárdult.

3. Ebben a modellben, mint ahogy Solow [12] és Johansen [7] modelljeiben is, a tanulási folyamat csak a tőkejavakat gyártó iparágban hat, egy egyszer már megépített tőke felhasználásakor nincs tanulás. Lundberg Horndal-effektusa azt sugallja, hogy ez nem reális. Modellünket ki kell terjeszteni, hogy ezt a lehetőséget is magába foglalja.

4. Azt feltételeztük, hogy a tanulás csak mint a szokásos termelés „melléktermeke" jelentkezik. Valójában a társadalom oktatási és tudományos kutatási intézményeket állít fel, hogy ezzel a tanulást gyorsabbá tegye. Egy teljesebb modellnek további változókként ezeket is figyelembe kellene vennie.

IRODALOM

[1] *Abramovitz, M.:* Resource and Output Trends in the United States Since 1870. American Economic Review, Papers and Proceedings of the American Economic Associations, 46. évf. 1956. 5—23. old.

[2] *Arrow, K. J.—Chenery, H. B.—Minhas, B. S.—Solow, R. M.:* Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. Review of Economics and Statistics, 43. évf. 1961. 235—250. old.*

[3] *Asher, H.:* Cost-Quantity Relationships in the Airframe Industry. R—291, Santa Monica, California, The RAND Corporation, 1956.

[4] *Haavelmo, T.:* A Study in the Theory of Economic Evolution. Amsterdam, North Holland, 1954.

[5] *Hilgard, E. R.:* Theories of Learning, 2. kiadás, New York, Appleton-Century-Crofts, 1956.

[6] *Hirsch, W. Z.:* Firm Progress Ratios. Econometrica, 24. évf. 1956. 136—143. old.

[7] *Johansen, L.:* Substitution vs. Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: A Synthesis. Econometrica, 27. évf. 1959. 157—176. old.

[8] *Kaldor, N.:* Capital Accumulation and Economic Growth. Megjelent a *F. A. Lutz—D. C. Hague* (szerk.): The Theory of Capital, New York c. kötetben, St. Martin's Press, 1961. 177—222. old.

[9] *Lundberg, E.:* Produktivitet och räntabilitet, P. A. Norstedt and Söner, Stockholm, 1961.

* Ez a tanulmány kötetünkben is megtalálható a 235—281. oldalakon. *(A szerk.)*

[10] *Muth, J.:* Rational Expectations and the Theory of Price Movements. Econometrica, 29. évf. 1961. 315—335. old.

[11] *Solow, R. M.:* Technical Change and the Aggregate Production Function, Review of Economics and Statistics 39. évf. 1957. 312—320. old.

[12] *Solow, R. M.:* Investment and Technical Progress. Megjelent: *K. J. Arrow—S. Karlin—P. Suppes* (szerk.): Mathematical Methods in the Social Sciences a kötetben, 1959. Stanford, Calif. Stanford University Press, 1960. 89—104. old.

[13] *Verdoorn, P. J.:* Fattori che regolano lo sviluppo della produttivita del lavoro, L'Industria, 1. évf. 1949.

[14] *Verdoorn, P. J.:* Complementarity and Long-Range Projections. Econometrica, 24. évf. 1956. 429—450. old.

[15] *Wright, T. P.:* Factors Affecting the Cost of Airplanes. Journal of the Aeronautical Sciences, 3. évf. 1936. 122—128. old.

Termelési függvény a gépjavítási feladathoz[*1]

1. BEVEZETÉS

Tanulmányunkban a gépjavítási feladatot a termelési elmélet oldaláról tekintjük. A kérdés, aminek igen nagy irodalma van[2], a következőképpen körvonalazható. Adott m darab egyforma gép, amelyek egymástól függetlenül működnek. Működésük nem igényel emberi felügyeletet, viszont bármely időpontban meghibásodhatnak, és ilyenkor javításra szorulnak. Meghibásodásuk exponenciális valószínűségelosztást követ. Feltételezzük továbbá, hogy r számú szerelőnk van, egy szerelő egy időpontban egy gép javítására képes. A megjavításhoz szükséges idő szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ha r-nél kevesebb gép áll javítás alatt, egy újabb hibás gép javításához haladéktalanul hozzá lehet kezdeni. Ugyanakkor, ha r vagy annál több gép már javítás alatt áll, akkor a továbbiakban meghibásodott gépek sorba állnak a javításért. A sorbanállási szabály csak azt követeli meg, hogy valamennyi szerelő dolgozzék, ha van javításra váró gép, de egyébként a kiszolgálás sorrendje tetszőleges. Ha $x(t)$ a t időpontban termelt összes kibocsátás, akkor $x(t)$ a t időpontban működő gépek $n(t)$ számával arányos, $n(t)$ egy sztochasztikus születési—halálozási folyamatot követ.

Tanulmányunk célja $x(t)$ aszimptotikus viselkedésének tanulmányozása, ha az idő végtelenhez tart,különös tekintettel $x(t)$ várható értékére, m és r nagy értékei mellett.

Be fogjuk bizonyítani, hogy *amint a gépek és a szerelők száma nő, a várható kibocsátás, egy később részletezett módon, arányossá válik vagy a szerelők, vagy a gépek számával, attól függően, hogy a szerelő—gép arány egy bizonyos érték alatt van, vagy meghaladja azt.*

Numerikus számításokkal megmutatták már [4], hogy sima (folytonos helyettesítési határarányú) izokvantjai vannak annak a termelési függvénynek, amely össze-

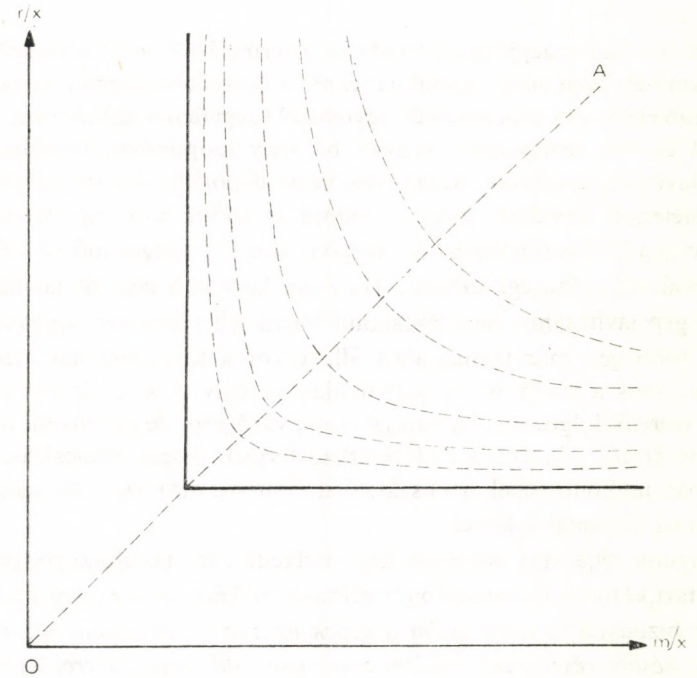
* (Társszerző: *David Levhari—Eytan Sheshinski*): A Production Function for the Repairman Problem. The Review of Economic Studies, Vol. 39. No. 119, 1972. július, 241—249. old.

[1] Ezt a munkát a Nemzeti Tudományos Alap (National Science Foundation) GS—2530 megbízásából a Stanford Egyetem „Matematikai Tanulmányok a Társadalomtudományokban" (Mathematical Studies in the Social Sciences) intézetében végeztük. Szeretnénk köszönetet mondani S. Karlin és D. L. Ighlehart professzoroknak a velük folytatott hasznos beszélgetésekért.

[2] Lásd például: *Barlow* [1], *Feller* [2], 416—421. old. és *Ighlehart* [3], valamint ezek hivatkozásait.

kapcsolja a várható kibocsátást a gépek és a szerelők számával. Ezért úgy tűnt, hogy a termelési folyamat véletlen jellege „kisimítóan" hatott az egyébként rögzített együtthatókkal jellemezhető technológiára.[3] Itt viszont bebizonyítjuk, hogy nagyszámú gép esetén a termelési függvény rögzített együtthatós technológiát mutat. Az *1. ábrán* az egységnyi kikocsátáshoz tartozó ráfordításokat összekötő izokvant L alakhoz közelít, ha m tart a végtelenhez. A kritikus érték (az $0A$ sugár) a sztochasztikus folyamat paramétereitől, azaz a meghibásodások átlagos idejétől és az átlagos javítási időtől függ.

Még általánosabban, meg lehet mutatni, hogy a kibocsátási folyamatok sorozata egy jól ismert diffúziós határfolyamathoz, az Ornstein—Uhlenbeck-folyamathoz tart.



1. ábra

2. A GÉPJAVÍTÁSI FELADAT

Feller [2] munkáját követve automata gépeket feltételezünk, amelyek nem igényelnek emberi felügyeletet, és amikor működnek, kibocsátásuk árama állandó. Egy gép bármely időpontban meghibásodhat, és ezzel javításra szorulhat. A gépek meghibásodási ideje és a javítás ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Tehát

[3] Ilyen kisimító hatásokat tárgyal *Walters* [6] és Liviatan [5].

egy gépet két paraméter jellemez, λ és μ, amelyekről elmondhatók a következők. Ha egy t időpontban a gép működő állapotban van, annak valószínűsége, hogy a $t+h$ időpont előtt javításra szorul λh plusz az $o(h)$ kifejezés, ami határértékben elhanyagolható: $o(h)/h \to 0$, ha $h \to 0$. Ha viszont a t időpontban a gépet javítják, akkor annak valószínűsége, hogy a javítás a $t+h$ időpont előtt befejeződik, és a gép ismét működő állapotban lesz: $\mu h+o(h)$.

Feltételezzük, hogy az m gép egymástól függetlenül működik. Működésük ugyanazzal a λ és μ paraméterekkel jellemezhető. A javításokat r számú gépjavító végzi, $r<m$. Ha egy gép meghibásodik, vagy azonnal hozzáfognak javításához, vagy, ha már valamennyi szerelő más gépen dolgozik, a várakozók sorához kell csatlakoznia.

Amikor n számú gép dolgozik, azt mondjuk, hogy a rendszer az E_n állapotban van. Abban az esetben, ha $n \leqq m-r$, E_n azt az állapotot írja le, hogy r gépet javítanak, és $m-n-r$ gép sorban áll. Ha $n>m-r$, az E_n állapot azt jelenti, hogy $r-m+n$ szerelő tétlen, $m-n$ gépet javítanak, és egyetlen gép sem várakozik. Az E_m állapotban minden gép dolgozik, és a szerelők valamennyien tétlenek.

Az $E_n \to E_{n-1}$ változást az okozza, hogy az n számú működő gépből egy gép meghibásodik, míg az $E_n \to E_{n+1}$ változás akkor áll elő, ha egy javítás alatt álló gép újból működő állapotba kerül. Annak valószínűsége, hogy a $(t, t+h)$ időtartamban $E_n \to E_{n-1}$ bekövetkezik, legyen $\lambda_n h+o(h)$, az $E_n \to E_{n+1}$ (ha $n \leqq m-1$) valószínűsége pedig legyen $\mu_n h+o(h)$. Feltesszük, hogy a $(t, t+h)$ intervallumban egynél több változás valószínűsége $o(h)$.

Ily módon feladatunk egy születési—halálozási folyamattá válik, a következő koefficiensekkel:

$$\lambda_n = n\lambda\mu_n = r\mu \qquad (0 \leqq n \leqq m-r) \tag{1}$$

$$\lambda_n = n\lambda\mu_n = (m-n)\mu \qquad (m-r \leqq n \leqq m).$$

Jól ismert az az eljárás, amivel differenciálegyenleteket állíthatunk fel a $P_n(t)$ értékekre, amelyek annak valószínűségei, hogy a rendszer a t időpontban az E_n állapotban van.

A $P_n(t+h)$ kiszámításához megjegyezzük, hogy a rendszer $t+h$-ban csak akkor lehet az E_n állapotban, ha a következő feltételek valamelyike teljesül: 1. a t-edik időpontban a rendszer az E_n állapotban van, és $(t, t+h)$ alatt nem változik meg; 2. a t-edik időpontban a rendszer E_{n+1} állapotú, ami E_n állapottá változik; 3. a t-edik időpontban a rendszer állapota E_{n-1}, ami E_n állapottá változik. Ez a három eset kölcsönösen kizárja egymást, tehát valószínűségeik összeadódnak. Ezért

$$P_n(t+h) = P_n(t)[1-\lambda_n h-\mu_n h]+\lambda_{n+1} hP_{n+1}(t)+\mu_{n-1} hP_{n-1}(t)+o(h).$$

A $P_n(t)$ értéket bal oldalra áthelyezve és h-val osztva, a $h \to 0$ esetén a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$P_n'(t) = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\lambda_{n+1}P_{n+1}(t)+\mu_{n-1}P_{n-1}(t), \tag{2}$$

amely a $0<n\leqq m-1$ esetet írja le. Az $n=0$, illetve az $n=m$ esetekben hasonló módon:

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\mu_0 P_0(t)+\lambda_1 P_1(t), \\ P_m'(t) &= -\lambda_m P_m(t)+\mu_{m-1} P_{m-1}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Így az (1) együtthatóival a (2) és a (3)-ból a következő differenciálegyenlet-rendszert nyerjük:

$$P_n'(t) = -[n\lambda+r\mu]P_n(t)+(n+1)\lambda P_{n+1}(t)+r\mu P_{n-1}(t), \quad (0 < n \leqq m-r) \tag{4}$$

$$P_n'(t) = -[n\lambda+(m-n)\mu]P_n(t)+(n+1)\lambda P_{n+1}(t)+(m-n+1)\mu P_{n-1}(t), \tag{5}$$

$$(m-r < n \leqq m-1)$$

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -r\mu P_0(t)+\lambda P_1(t), \\ P_m'(t) &= -m\lambda P_m(t)+\mu P_{m-1}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Ez egy véges rendű differenciálegyenlet-rendszer, és a szokásos módszerekkel megoldható. Most azonban csak a rendszer állandósult állapota érdekel minket. Belátható, hogy a

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

határértékek léteznek, és függetlenek az induló állapottól. A (4)—(6) egyenletekbe $P_n'(t)=0$-át helyettesítve, a határvalószínűségekre a következő egyenleteket kapjuk:

$$[n\lambda+r\mu]P_n = (n+1)\lambda P_{n+1}+r\mu P_{n-1}, \quad (0 < n \leqq m-r)$$

$$[n\lambda+(m-n)\mu]P_n = (n+1)\lambda P_{n+1}+(m-n+1)\mu P_{n-1}, \quad (m-r < n \leqq m-1)$$

$$\begin{aligned} r\mu P_0 &= \lambda P_1, \\ m\lambda P_m &= \mu P_{m-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

A két utolsó egyenletből a $\frac{P_0}{P_1}$ és $\frac{P_{m-1}}{P_m}$ hányadosokat nyerjük. Az első egyenletből indukcióval az $n\leqq m-r$ esetére kapjuk:

$$n\lambda P_n = r\mu P_{n-1} \tag{8}$$

és a (7) második egyenletéből $m-r<n\leqq m$ esetére:

$$n\lambda P_n = (m-n+1)\mu P_{n-1}. \tag{9}$$

Ezek az egyenletek lehetővé teszik valamennyi $\frac{P_n}{P_m}$ arány kiszámítását. Végezetül a P_m értéket a $\sum P_k=1$ feltétel adja meg. Vegyük észre, hogy a valószínűségek csak a $\frac{\lambda}{\mu}$ aránytól, az átlagos javítási idő és az átlagos meghibásodási idő hányadosától függnek.

3. A TERMELÉSI FÜGGVÉNY

Feltételezve, hogy működő állapotban valamennyi gép kibocsátása egységnyi, a működő gépek várható száma adja meg az x-et, a *várható állandósult kibocsátást* (expected steady-state output)

$$x = x(m, r) = \sum_{n=0}^{m} nP_n. \tag{10}$$

A (8) és a (9) rekurziv egyenleteket megoldjuk a valószínűségekre.

$$P_n = \frac{m!r^r}{r!}\left(\frac{r\mu}{\lambda}\right)^{-m} P_m \frac{1}{n!}\left(\frac{r\mu}{\lambda}\right)^n \quad (0 \leqq n \leqq m-r) \tag{11}$$

$$P_n = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-m} P_m \binom{m}{n}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{m-n} \quad (m-r \leqq n \leqq m).$$

Látható, hogy $n \leqq m-r$ esetén a P_n határvalószínűségek arányosak az $\frac{r\mu}{\lambda}$ paraméterű Poisson valószínűségekkel, az $n \geqq m-r$ esetben pedig a $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ paraméterű binomiális eloszlás valószínűségeivel. Legyen $P'_n = e^{\frac{-r\mu}{\lambda}} \frac{1}{n!}\left(\frac{r\mu}{\lambda}\right)^n$ a Poisson eloszlás n-edik tagja és $P''_n = \binom{m}{n}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{m-n}$ az m-ed rendű binomiális eloszlás n-edik tagja. Ekkor (11) a következő alakba írható át:

$$\begin{aligned} P_n &= C' P'_n \quad (0 \leqq n \leqq m-r) \\ P_n &= C'' P''_n \quad (m-r \leqq n \leqq m), \end{aligned} \tag{12}$$

ahol

$$C' = \frac{m!r^r}{r!}\left(\frac{r\mu}{\lambda}\right)^{-m} e^{\frac{r\mu}{\lambda}} P_m \quad \text{és} \quad C'' = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-m} P_m.$$

A (10) kifejezést mint m és r explicit függvényét nehéz lenne megadni. A [4] numerikus számításai megmutatták, hogy a termelési függvény kvázikonkáv, és azt az állandó hozadéktól alig eltérő növekvő volumenhozadék jellemzi. Továbbmenve, láttuk, hogy a felrajzolt izokvantok aszimptotikusan párhuzamosak a ráfordítások tengelyeivel.

Ezeket a határérték tulajdonságokat könnyen megmagyarázhatjuk. A (8)—(9) rekurziv formulákból összegzéssel kapjuk:

$$\lambda \sum_{n=0}^{m-r} nP_n = r\mu \sum_{n=0}^{m-r} P_{n-1} \tag{13}$$

$$\lambda \sum_{n=m-r+1}^{m} nP_n = m\mu \sum_{n=m-r+1}^{m} P_{n-1} - \mu \sum_{n=m-r+1}^{m} (n+1)P_{n-1}.$$

λ-val osztva és az egyenleteket összeadva, nyerjük:

$$(14)\qquad \sum_{n=0}^{m} nP_n = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) r \sum_{n=0}^{m-r} P_{n-1} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) m \sum_{n=m-r+1}^{m} P_{n-1} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \sum_{n=m-r+1}^{m} (n+1) P_{n-1}.$$

Tekintsünk most két esetet:

1. *r kicsi m-hez képest.* Ilyenkor a jobb oldal második és harmadik tagja elhanyagolható, és az első tagban a $\sum_{n=0}^{m-r} P_{n-1}$ megközelítőleg egy. Ezért közelítőleg

$$(15)\qquad x = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) r.$$

Meg lehet mutatni, hogy $r=1$ esetén a (15) egyenlet az x pontos kifejezését adja.[4]

2. *r nagy m-hez képest.* Ilyenkor a jobb oldal első tagja hanyagolható el, és a harmadik tagja a $\sum_{n=m-r+1}^{m} (n+1) P_{n-1}$ kifejezés közel egyenlő a $\sum_{n=0}^{m} nP_n$ kifejezéssel; míg $\sum_{n=m-r+1}^{m} P_{n-1}$ közel egy. Ezért megközelítőleg igaz

$$(16)\qquad x = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) m.$$

Belátható, hogy $r=m$ esetén a (16) egyenlet pontos kifejezése x-nek.

A bemutatott esetek értelmezése egyszerű. Ahogy a gépek aránya a szerelőkhöz képest megnövekszik, a szerelő válik szűkös erőforrássá és a javításért gyakorlatilag minden gép sorba áll. A kibocsátás ekkor a szerelők számával arányos. Az arányossági tényező az átlagos meghibásodási idő, $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ és az átlagos javítási idő, $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ hányadosa. Másrészt, ha a szerelők száma közel van a gépek számához, a gép a szűkös erőforrás, mert a sorbanállás gyakorlatilag megszűnik.

4. A TERMELÉSI FÜGGVÉNY NAGY RÁFORDÍTÁSI ÉRTÉKEK ESETÉN

Legyen

$$(17)\qquad x_0 = x_0(m, r) = \min\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} m, \frac{\mu}{\lambda} r\right].$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel. $\dfrac{x(m, r)}{x_0(m, r)} \to 1$, *ha* $r, m \to \infty$. *Továbbá minden olyan* $\left\{\dfrac{r}{m}\right\}$ *sorozatra, amely a* $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$, *hányados valamilyen környezetén kívül esik,* $x(m, r) \to x_0(m, r)$, *ha* $r, m \to \infty$.

[4] Lásd erről: *Feller* [2], 418. old.

Bizonyítás. Először a második kijelentést bizonyítjuk be. Tekintsük a P'_{m-r}-et, amint $r\to\infty$ és $m\to\infty$. A Stirling-formulát felhasználva a nagy faktoriálisokra kapjuk, hogy

$$P'_{m-r}=\frac{e^{\frac{-r\mu}{\lambda}}}{(m-r)!}\left(\frac{r\mu}{\lambda}\right)^{m-r}\sim\frac{e^{m-r}}{[2\pi(m-r)]^{1/2}}\frac{e^{\frac{-r\mu}{\lambda}}}{(m-r)^{m-r}}\left(\frac{r\mu}{\lambda}\right)^{m-r}=$$

$$=\frac{1}{[2\pi(m-r)]^{1/2}}e^{(1-y)(m-r)}y^{m-r}= \tag{18}$$

$$=\frac{1}{[2\pi(m-r)]^{1/2}}(e^{(1-y)}y^{m-r}),$$

ahol $y=\dfrac{r\mu}{(m-r)\lambda}$. Tegyük fel, hogy az $\left\{\dfrac{r}{m}\right\}$ sorozat legkisebb felső korlátja kisebb* mint a $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ hányados, azaz van olyan y_0, amelyre $0\leqq y\leqq y_0<1$. Legyen $\Phi(y)=e^{1-y}y$.

Kiszámolható, hogy $\Phi(0)=0$, $\Phi(1)=1$, $\Phi'(y)>0$ és $0<\Phi(y)<1$, ha $0<y<1$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\Phi(y)^{m-r}\leqq\Phi(y_0)^{m-r}\to 0$, ha $r,m\to\infty$. Ezért $P'_{m-r}\to 0$, ha $r,m\to\infty$. Továbbá az is látható, hogy $(m-r)P'_{m-r}\to 0$, ha $r,m\to\infty$.

A definíció szerint $P'_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\mu r}{\lambda}\right)P'_{n-1}$. E rekurziv összefüggést szukcesszív módon alkalmazva:

$$P'_n=\frac{1}{n(n-1)\dots(m-r+1)}\left(\frac{\mu r}{\lambda}\right)^{n-m+r}P'_{m-r}\leqq P'_{m-r}y^{n-m+r}. \tag{19}$$

$n\geqq m-r$ esetén. Így

$$\sum_{n=m-r+1}^{\infty}P'_n\leqq P'_{m-r}\sum_{n=m-r+1}^{\infty}y^{n-m+r}.$$

Mivel $y\leqq y_0<1$, a $\sum_{n=m-r+1}^{m}y^{n-m+r}$ összeg véges. Ezért

$$\sum_{n=m-r+1}^{\infty}P'_n\to 0, \tag{20}$$

ha $r,m\to\infty$. Így a (20)-ból következik, hogy

$$\sum_{n=0}^{m-r}P'_n\to 1, \tag{21}$$

ha $r,m\to\infty$. A (11) és a (12) révén

$$\sum_{n=0}^{m}P_n=C'\sum_{n=0}^{m-r}P'_n+C''\sum_{n=m-r+1}^{m}P''_n=1. \tag{22}$$

* Az eredetiben: „$\dfrac{r}{m}$ is bounded below from $\lambda/(\lambda+\mu)$" nyilván elírás *(ell. szerk.)*

Ebből adódik, hogy $C' \sum_{n=0}^{m-r} P'_n \leqq 1$. A (21)-ből kapjuk, hogy C' korlátos. A definícióból

$$P''_n = \left(\frac{m-n+1}{n}\right)\frac{\mu}{\lambda} P''_{n-1} \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{\mu r}{\lambda}\right) P''_{n-1} \leqq y_0 P''_{n-1},$$

ahol $n > m-r$. A $C' P'_{m-r} = C'' P''_{m-r}$ azonosság felhasználásával nyerjük

$$C'' \sum_{n=m-r+1}^{m} P''_n \leqq C'' P''_{m-r} \sum_{n=m-r+1}^{\infty} y_0^{n-m+r} = C' P'_{m-r}\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) \to 0, \tag{23}$$

ha $r, m \to \infty$. A (21), a (22) és a (23) összefüggésekből következik, hogy $C' \to 1$, ha $r, m \to \infty$.

Most a (23) segítségével

(24)

$$C'' \sum_{n=m-r+1}^{m} nP''_n \leqq C'' \sum_{n=m-r+1}^{m} n y_0^{n-m+r} P''_{m-r} \leqq C' P'_{m-r}\left[\frac{y_0}{(1-y_0)^2} + \frac{(m-r)y_0}{1-y_0}\right] \to 0,$$

ha $r, m \to \infty$.

Az előzőek szerint:

$$x = \sum_{n=0}^{m} nP_n = C' \sum_{n=0}^{m-r} nP'_n + C'' \sum_{n=m-r+1}^{m} nP''_n \to \sum_{n=0}^{m-r} nP'_n, \tag{25}$$

de a (19)-ből

$$\sum_{n=m-r+1}^{\infty} nP'_n \leqq P'_{m-r} \sum_{n=m-r+1} n y^{n-m+r} \to 0,$$

ha $r, m \to \infty$, ahonnan a kívánt eredmény következik:

$$x = \sum_{n=0}^{m} nP_n \to \sum_{n=0}^{\infty} nP'_n, \tag{26}$$

ha $r, m \to \infty$.

Tételezzük fel most, hogy $\left\{\frac{r}{m}\right\}$ legnagyobb alsó korlátja, nagyobb,* mint $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, azaz van olyan y_0, hogy $y \geqq y_0 > 1$. A definíció szerint

$$P''_{m-r} = \binom{m}{m-r}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m-r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{r} =$$

$$= \frac{m!}{(m-r)!r!}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r} \sim \left[\frac{m}{2\pi(m-r)r}\right]^{1/2} \frac{m^m}{(m-r)^{m-r}r^r}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r} = \tag{27}$$

$$= \left[\frac{m}{2\pi(m-r)r}\right]^{1/2}\left(\frac{m}{m-r}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{m-r}{r}\right)^{r}.$$

* Az eredetiben: $\left\{\frac{r}{m}\right\}$ is bounded from $\lambda/(1+\mu)$ az előzővel analóg elírás *(ell. szerk.)*.

Legyen $z=\frac{m-r}{r}$ és $\varrho=yz=\frac{\mu}{\lambda}$. Ekkor

$$P''_{m-r} \sim \left[\frac{m}{2\pi(m-r)r}\right]^{1/2}\left[\frac{w^{1+z}z}{p}\right]^r, \tag{28}$$

ahol $w=\frac{1+z}{z}\frac{\varrho}{1+\varrho}$. Mármost: $y\gtrless y_0$ ekvivalens azzal, hogy $z\gtrless\frac{\varrho}{y_0}$. Legyen

$$\psi(y_0)=\frac{1}{y_0}\left[\frac{y_0+\varrho}{1+\varrho}\right]^{\frac{y_0+\varrho}{y_0}}.$$

Ekkor

$$\frac{w^{1+z}z}{\varrho}\leqq\psi(y_0). \tag{29}$$

Most $\psi(1)=1$ és $\psi'(y_0)=\frac{-\varrho}{y_0^2}\left(\frac{y_0+\varrho}{1+\varrho}\right)^{\frac{y_0+\varrho}{y_0}}\log\frac{y_0+\varrho}{1+\varrho}<0$. Ezért $\psi(y_0)<1$, ha $y_0>1$. A (28)-ból következik

$$P''_{m-r}\sim\left[\frac{m}{2\pi(m-r)r}\right]^{1/2}\left(\frac{w^{1+z}z}{\varrho}\right)^r\leqq\left[\frac{m}{2\pi(m-r)r}\right]^{1/2}[\psi(y_0)]^r\to 0 \tag{30}$$

ha $r, m\to\infty$. Az is tény, hogy $(m-r)P''_{m-r}\to 0$, ha $r, m\to\infty$. Mivel $P''_n\leqq\left(\frac{1}{y_0}\right)P''_{n+1}$, $n<m-r$ esetén, így

$$\sum_{n=0}^{m-r}P''_n\leqq P''_{m-r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{y_0}\right)^n=P''_{m-r}\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right)\to 0,$$

ha $r, m\to\infty$. Következik, hogy $\sum_{n=m-r+1}^{m}P''_n\to 1$, ha $r, m\to\infty$. Így C'' korlátos. Felhasználva, hogy $n<m-r$ esetén $P'_n\leqq\left(\frac{1}{y_0}\right)P'_{n+1}$, és azt, hogy $C'P'_{m-r}=C''P''_{m-r}$, azt kapjuk, hogy

$$C'\sum_{n=0}^{m-r}P'_n\leqq C'P'_{m-r}\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right)\to 0,$$

ha $r, m\to\infty$. Innen közvetlenül következik, hogy $C''\to 1$, ha $r, m\to\infty$. Így

$$C'\sum_{n=0}^{m-r}nP'_n\leqq(m-r)C'\sum_{n=0}^{m-r}P'_n\leqq(m-r)C'P'_{m-r}\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right)= \tag{31}$$

$$=C''(m-r)P''_{m-r}\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right)\to 0,$$

ha $r, m\to\infty$. Ezért azt kapjuk, hogy

$$x=\sum_{n=0}^{m}nP_n=C'\sum_{n=0}^{m-r}nP'_n+C''\sum_{n=m-r+1}^{m}nP''_n\to\sum_{n=m-r+1}^{m}nP''_n, \tag{32}$$

ha $r, m \to \infty$, de

$$\sum_{n=0}^{m-r} nP_n'' \leqq (m-r) \sum_{n=0}^{m-r} P_n'' \leqq (m-r) P_{m-r}'' \left(\frac{y_0}{y_0-1}\right) \to 0$$

ha $r, m \to \infty$. Ily módon végül

$$x \to \sum_{n=0}^{m} nP_n'', \tag{33}$$

ha $r, m \to \infty$.

Annak bizonyítására, hogy a kibocsátási arány tetszőleges r és m mellett is konvergens, tekintsük például a következő esetet:

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \leqq \frac{r}{m} \leqq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1+\varepsilon').$$

Mivel $x(m, r)$ nem csökkenő, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda(1+\varepsilon')} r, r\right)}{x_0(m, r)} \leqq \frac{x(m, r)}{x_0(m, r)} \leqq \frac{x\left(m, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, (1+\varepsilon')m\right)}{x_0(m, r)}. \tag{34}$$

Az előző eredmény következtében bármely $\varepsilon>0$ és elég nagy r és m esetén: $1-\varepsilon \leqq \frac{x(m, r)}{x_0(m, r)} \leqq 1+\varepsilon$. Ez bizonyítja a tétel általános részét. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a [4] számításai arra engednek következtetni, hogy az abszolút (nem a relatív) konvergencia nem teljesül az $\frac{r}{m} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ kritikus sugár mentén.

Ez az eredmény még világosabb lesz, ha a születés—halálozási folyamatot összehasonlítjuk egy Markov-lánccal, amelynek átmeneti valószínűségei:

$$P_{n,n-1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}, \quad P_{n,n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}.$$

Ebben a láncban az átmenetek feltételes valószínűségei ugyanazok, mint a tárgyalt folyamat átmenetvalószínűségei. Kézenfekvő, hogy a $P_n(t)$ valószínűségek $t \to \infty$ esetén ugyanúgy viselkednek, mint a Markov-lánc megfelelő valószínűségei.

Egyensúlyi pont egy olyan n szám, amelyre $P_{n,n-1}$ és $P_{n,n+1}$ egyenlőek, azaz a folyamat nem hajlik sem felfelé sem lefelé. A λ_n és μ_n helyére az (1)-ből helyettesítve, az „egyensúlyi pont"-nak ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} n\lambda &= r\mu \qquad 0 \leqq n \leqq m-r \\ n\lambda &= (m-n)\mu \quad m-r < n \leqq m-1. \end{aligned} \tag{35}$$

Az első egyenletet n_1 megoldása $n_1 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) r$, és mivel az $n_1 \leqq m-r$ kikötésnek

teljesülnie kell, következik, hogy n_1 akkor érvényes, ha $\frac{r}{m} \leqq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. A második egyenlet n_2 megoldása $n_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) m$, és mivel megköveteljük, hogy $n_2 \geqq m-r$ legyen, az következik, hogy n_2 akkor érvényes, ha

$$\frac{r}{m} > \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Ily módon az n_1 és n_2 egyensúlyi pontok kölcsönösen kizárják egymást. A megfelelő kibocsátást tehát

$$x = n_1 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) r \quad \left(\frac{r}{m} \leqq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \tag{36}$$

$$x = n_2 = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) m \quad \left(\frac{r}{m} > \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

adja meg, ami nem más, mint a (17).

5. GYENGE KONVERGENCIA EGY DIFFÚZIÓS FOLYAMATHOZ

Iglehart [3] megmutatta, hogy egy születés—halálozási folyamatban, azt alkalmasan leírva, létezik $n(t)$-nek nem elfajuló határfolyamata. A határfolyamat az *Ornstein—Uhlenbeck-diffúziós folyamat*.

Iglehart tételét alkalmazva be tudjuk bizonyítani, hogy a kibocsátás markovi értelemben gyengén konvergál az Ornstein—Uhlenbeck diffúziós folyamathoz, ha $r, m \to \infty$.

Az Ornstein—Uhlenbeck diffúziós folyamatra megmutatható, hogy amint $t \to \infty$, az $n(t)$ egy normális eloszláshoz tart, amelynek várható értéke és szórása ismert. Esetünkben e paraméterek attól függnek, hogy $\frac{r}{m}$ nagyobb-e vagy kisebb a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ kritikus értéknél.

IRODALOM

[1] *Barlow, R. E.:* Repairman Problems. Megjelent: *K. J. Arrow—S. Karlin—H. Scarf* (szerk.): Studies in Applied Probability and Management Science c. kötetben. Stanford University Press, Stanford, California, 1962.

[2] *Feller, W.:* An Introduction to Probability Theory and Its Application. John Wiley, New York, 1957.

[3] *Iglehart, D. L.:* Limiting Diffusion Approximations for the Many Server Queue and the Repairman Problem. Journal of Applied Probability, 2. évf. 1965. 429—441. old.

[4] *Levhari, D.—Sheshinski, E.:* A Micro-Economic Production Function, Econometrica, 1970.

[5] *Liviatan, N.:* The Marginalist Principle in Discrete Production Models under Uncertain Demand, Quarterly Journal of Economics, 1971.

[6] *Walters, A. A.:* Marginal Productivity and Probability Distributions of Factor Services. Economic Journal, 1960.

IV.

BIZONYTALANSÁG, INFORMÁCIÓ ÉS ORGANIZÁCIÓ

Döntés kockázat vállalásával: a különböző elméleti irányzatok[*1]

A tanulmány kísérletet tesz a bizonytalan következményű alternatívák közötti választás közgazdasági, filozófiai, matematikai és statisztikai irodalmának áttekintésére. Figyelmünket a bizonytalanság leírási módjaira, valamint azokra az elméletekre összpontosítottuk, amelyek tárgya az ésszerű és a tényleges egyéni magatartás a döntéshozásban.

1. BEVEZETÉS

Nincs szükség arra, hogy nagyon bizonygassuk egy olyan valósághű elmélet fontosságát, amely megmagyarázza, hogyan választanak az egyének az előttük álló lehetőségek közül, amikor hiányos ismereteik vannak cselekedeteik következményeiről. Ha a legvégső következményeket is figyelembe vesszük, nem túlzás azt mondani, hogy az ember minden választása ilyen. A kockázat és annak emberi fogadtatása sok mindenre magyarázattal szolgált, a szerencsejátékoktól kezdve gazdaságunk kapitalista szerkezetéig; Frank Knight szerint, ha nem lenne bizonytalanság a világban, az emberi tudatosság is eltűnne.

Ezt az elméletet jelenlegi állapotában szeretném áttekinteni, különös tekintettel a gazdasági döntésekre, a fogalmat a szokásos értelemben véve. A feldolgozás döntéselméleti szempontú, úgy ahogy ezt általában értjük. Egy ilyen elmélet általános képe a következő: Adott az olyan elképzelhető cselekvések halmaza, amelyeket egy egyén véghezvihet, és amelyek bizonyos meghatározott következményekkel járnak. Az egyén rendezni képes az összes lehetséges következményt, azaz bármely két következmény esetében vagy jobbnak találja az egyiket, vagy azok közömbösek számára. Ez a közömbösségi és preferencia reláció rendelkezik azzal a tranzitivitásként ismert tulajdonsággal, hogy ha *A* következmény jobb *B*-nél és *B* jobb *C*-nél, akkor *A* jobb

* Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations. Econometrica, Vol. 19., No. 4., October 1951. 404—437. old.

[1] Hálámat szeretném kifejezni J. Marshaknak (Cowles Commission for Research in Economics és University of Chicago) és L. J. Savagenek (University of Chicago) sok hasznos megjegyzésükért. Cikkem megjelenik a Cowles Commission Paper sorozatban is. New Series, No. 51.

C-nél, és ugyanúgy áll ez a közömbösségre is. Egy adott helyzetben az egyén számára lehetséges cselekvések tere valamilyen módon korlátozott. Így a tökéletes verseny melletti fogyasztói kereslet elméletében a lehetséges cselekvések olyan jószágkombinációk vásárlásai, amelyek költsége nem haladja meg a rendelkezésre álló jövedelmet. A ténylegesen beszerezhető kombinációk közül azután azt választják ki, amelynek következményei bármely más lehetséges cselekvés következményeinél jobbak.[2] A fogyasztói döntés elméletében nem szokás különbséget tenni a cselekvések és következményeik között, mivel a kettő egy-egy értelmű megfeleltetésben van egymással, de a vállalat statikus elméletében igenis megkülönböztetjük a cselekvéseket — a döntéseket a ráfordítás—kibocsátásról — és a következményeket, a profit pénzösszegének eltérő szintjeit. A kockázatos helyzetben való döntés elméletének egyik legfőbb problémája a következmények leírása, ezek itt bizonytalanságuknál fogva nyilvánvalóan nem egyértelmű módon tartoznak a cselekvésekhez; így a kettő közötti különbséget mindig gondosan fenntartjuk.

A lehetséges cselekvések tartománya, bizonyos értelemben, nem különbözik a bizonyosság melletti döntések elméletében vett megfelelőjétől, különösen ha az utóbbi tartalmazza a jövő megtervezését is, ahogy például a tőkeelméletben van. Mégis, mint A. G. Hart [20] megmutatta, a cselekvések bizonyos típusai, amelyeknek a megkülönböztetése fontos a kockázatos helyzetben való döntés megértéséhez, a bizonyosság esetén érdektelenné válnak, és ezért ott e különbségeket nem is veszik figyelembe. Cikkünk korlátozott terjedelme miatt erre a kérdésre nem fogunk kitérni.

A bizonytalan helyzetben való döntés elméletének formába öntése és kapcsolata az üzleti élet jelenségeivel állandó — bár lassú — fejlődést mutatott. Az utóbbi években azonban megtört a folytonosság, három nagy áttörést látunk, amelyek reményt adnak a kérdéskör sokkal világosabb megértésére: 1. a valószínűségeloszlások közötti választás axiomatikus kezelése Neumann és Morgenstern [37] művében, amely a várható hasznosság maximalizálási szabályának új felfogásához vezet (ezt F. P. Ramsey [42] már előrevetítette); 2. a statisztikai következtetés modern elméletének fejlődése (J. Neyman és E. S. Pearson [38], valamint A. Wald [56], [57], amely elmélet a bizonytalan helyzetben való (racionális) viselkedés kérdéskörének speciális formája; és végül: 3. a bizonytalan várakozások és a reájuk alapozott cselekedetek egész problémakörének az az új megfogalmazása, amely Shackle nevéhez fűződik (lásd Shackle [48], [49]). Különösen kedvezőnek látszó időpont ez tehát a különböző új eredmények feltérképezésére, egymással és a tárgykör egész hátterével való összehasonlítására.

Két metodológiai megjegyzést tehetünk itt meg. 1. A következmények bizonytalanságát, ami a viselkedést irányítja, úgy fogjuk fel, hogy az a döntéshozó tudatában van. Természetesen megengedhető, hogy ez a szubjektív bizonytalanság vagy kockázat a külvilág megfigyeléséből eredjen, így egy biztosító társaság magatartását

[2] Feltételezzük, hogy létezik egyértelmű maximum, a maximum hiányának vagy többértelműségének általánosabb esete egy kézenfekvő átfogalmazással fogható meg.

például a halálozások megfigyelése határozza meg. Nem kívánjuk itt felvetni a kérdést: létezik-e a gazdasági világban valamilyen „objektív" bizonytalanság abban az értelemben, hogy egy szuperintelligens elme az összes elérhető adat birtokában ismerheti-e bizonyosan a jövőt vagy nem. A szabad akarat kérdésének összekuszált fonalát céljainkhoz nem kell kibogozni. Bármiképp legyen is, tudatlanságunk a világról kétségtelenül sokkal nagyobb a lehetséges tudás „igazi" korlátainál, tehát az ilyen metafizikus kérdéseket figyelmen kívül hagyhatjuk.

2. Az itt tágyalt elméletek némelyike az egyének valóságos viselkedésének magyarázatára irányul a bizonytalanság feltételei között, mások a racionális viselkedéshez adnak tanácsokat, megint mások, legalábbis hallgatólagosan, mind a kettőt megcélozzák. Legszélesebb értelmében véve a racionális viselkedés egyszerűen olyan magatartás, amely megfelel az alternatívák valamely, viszonylagos értékük szerinti rendezésének, azaz a döntések egy elméletének, ahogy azt az előbbiekben jellemeztük. Egyes esetekben azonban további feltételek az intuícióra vonatkoztatják a racionalitást. Az általunk tárgyalt elméletek közül majdnem mindegyik racionális az első értelemben, de nem mindegyik az a második értelemben. A közgazdaságtan általános hagyományait tekintve — amelyek hajlamosak a racionális viselkedést a tényleges magatartás első megközelítésének tekinteni — jogosultnak érzem, hogy nem választottam külön a kétfajta elméletet.

A tanulmány vázát a döntéselmélet most körvonalazott szerkezete szabja meg. A bizonytalan következmények különböző *leírási* módjainak kifejtése és összehasonlítása után rendezésük különféle elméletei következnek. Még ezt megelőzően rövid összefoglalást adunk a gazdasági viselkedés bizonyos olyan általános tapasztalati tényeiről, amelyeket kapcsolatba hoznak a kockázat meglétével. Ezzel együtt vázoljuk egyrészt a tudományos és statisztikai következtetés kapcsolatát, másrészt a bizonytalanság melletti viselkedésről is szólunk.

Az itt rendelkezésre álló terjedelem mellett a téma teljes áttekintése nem remélhető. Bár a valószínűség egész matematikai elmélete a bizonytalan helyzetben való viselkedés témájának egyfajta kidolgozása volt, a közelmúlt technikai eredményei nem érintik az ilyen viselkedés elveit. Valóban, a valószínűség — a mértékelmélet egy ágaként vett — axiomatikus tárgyalása, amelynek jelenleg uralkodó szerepe van (lásd Kolmogorov [26]), láthatóan az elmélet technikai fejlődését kívánja felszabadítani az alapokban fellelhető problémák alól. Úgyszintén kevéssé tárgyaljuk a közgazdászok más témákról szóló munkáinak mellékes hivatkozásait a kockázatviselésre, továbbá a század kezdete előtti munkákat is jószerivel elhagyjuk. Végül, természetesen nem fér kétség ahhoz sem, hogy a megjelölt határokon belül is sok olyan tanulmány létezik, különösen idegen nyelveken, amelyeket nem dolgoztam fel.

2. AZ ALAPVETŐ JELENSÉGEK

2.1. Azoknak a gazdasági jelenségeknek, amelyeket a bizonytalanság létével össze szoktak kapcsolni, három osztályát különböztetjük meg: 1. azok, amelyeket definíciójuk köt eleve a bizonytalansághoz; 2. azok, amelyeket nem definíciójuk kapcsol a bizonytalansághoz, mindamellett nincs más elképzelhető magyarázatuk; 3. azok, amelyek viszonya a bizonytalansághoz távolabbi és vitathatóbb.

2.1.1. A szerencsejáték és a biztosítás az első típus világos példái. A cselekvés következményei között mindkét esetben van matematikailag várható veszteség is (a cselekvés nélküli helyzethez képest), mégis vállalnak a valóságban ilyen cselekedeteket. A szerencsejátékot azzal magyarázzák, hogy az azzal járó kicsiny valószínűségű nagy nyeremény és nagy valószínűségű kis veszteség kedveltebb egy, a szerencsejáték matematikai várható értékénél nagyobb összegű biztos bevételnél. A biztosítás egyenlő egy biztos, kis összegű veszteség preferálásával a kis esélyű nagy veszteséggel szemben (lásd Friedman és Savage [16], 289—291. old.). A bizonytalanság elméletének mindkét jelenségre magyarázatot kell adnia.

Számos szerző rámutatott arra, hogy a biztosításnak ez az elemzése nem jellemez kellően. Ahhoz a kárhoz, ami ellen az egyén biztosította magát, rendszerint közvetett veszteségek is adódnak: például egy nem biztosított tűz valószínűleg a hitelképesség romlásával is jár (lásd Hardy [18], 57. old., Hart [19], 68—69. old.). Ezért előfordulhat, hogy a matematikai kilátások értelmében a biztosítás mindkét fél számára nyereséges.

Fontos szerepet játszott a bizonytalanságelmélet történetében egy elképzelt szerencsejáték, a Szent-Pétervár. Egy szabályos érmét dobunk fel addig, amíg fej nem lesz. A játékos 2^n dukátot kap, ahol n a dobások száma. Mennyit ér a játékosnak a részvétel ebben a játékban? Könnyű belátni, hogy a matematikai várható érték

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n)(1/2^n)$$

végtelen, tehát az egyénnek hajlandónak „kell" lennie arra, hogy bármilyen nagy véges összeggel beszálljon. Az introspekció azonban azt súgja, hogy nem lesz erre hajlandó, és ez a „tény" magyarázatra szorul.

2.1.2. A második típusú gazdasági jelenségek között vannak a törvény által garantált jövedelmek, az értékpapírok ingadozó hozadékai és azok a készletek, amelyeket a szállítási költségek által indokolt mértéken felül tartanak. A bizonyosság világában az olyan szerződéses kötelezettségeknek, mint a haszonbérletek, kötvények és hosszú távú munkaszerződések, az esetleges becstelenség kivédésén túl nem lenne jelentőségük.

Nyilvánvaló tény, hogy ugyanazon névértékű részvények és szerződések más-más piaci értékkel bírnak, és ezek az értékek valamilyen módon annak kockázatával vannak összefüggésben, hogy a szerződést nem teljesítik. Kirívó eset az a tény, hogy egyes emberek pénzt tartanak, aminek nincs hozadéka, szemben a részvényekkel,

amelyek némi hozadékot ígérnek. (Ez a jelenség természetesen előfordulhat a szubjektív bizonyosság világában is, ha az egyéneknek az árakra vonatkozó várakozásai különbözőek.)

A készletezés bonyolultabb ügy, hiszen egy adott vállalatnál rendszerint lehetetlen különbséget tenni a beszerzési költség oszthatatlansága, az akaratlanul felgyűlt készletek és a valóban spekulációs célból tartott készletek között. Csak az árupiaci ügyleteknél van viszonylag tiszta elkülönítésre lehetőség.

Összegezve ezeket az észrevételeket, a közös bennük, hogy kockázat hiányában nem lépnének fel, és azt jelzik, hogy egy adott kockázatos helyzetben nem egyforma az egyének viselkedése. Ennél többet aligha lehet mondani róluk kifejezettebben kvantitatív tanulmányozás nélkül.

2.1.3. Sok közgazdász gondolkodásában a kockázattal kapcsolatos rejtélyesebb jelenségek közé tartozik a profit létezése (a szerződéses részesedések és a vállalkozó tőkéje után számított kamat felett mutatkozó maradék „tiszta" értelmében), a vállalatok méreteinek korlátozottsága és a szabad vállalkozási rendszer jellegzetes alakja.

Nem mondható el, hogy ezek a kérdések világosak lennének. Hosszú ideje felszínen van az a homályos állítás, hogy „a profit a kockázatviselés jutalma", abban az értelemben, hogy a profit reménye a kockázat viselésének egy szükséges indítéka. Knight azonban, miután egy vastag könyvet szánt ezen állítás egy változatának bizonyítására, arra engedett következtetni, hogy a profit egészében véve negatív (Knight [25], 362—366. old.). Jóllehet a negatív profit ugyanúgy magyarázatra szorul, mint a pozitív, nem mondhatjuk el, hogy az uralkodó elméletek többsége valóban figyelembe venné ezt a lehetőséget. Bárhogy legyen is, természetesen, a statisztikai tények szerint a tiszta profitok nagysága csak elhanyagolhatónak mondható.

A vállalatnagyság korlátozottságának kérdése azon okoskodás miatt lép fel, hogy ha valamennyi piacon tökéletes verseny van, a vállalatok nagyságának nincs határa. A korlátot az adja, hogy egyrészt a vállalkozó nem szívesen vesz fel olyan nagy kölcsönt, amelynek kockázata már felemésztheti tulajdoni részesedését; másrészt hogy a tőkepiac sem tökéletes, mivel az egyének húzódoznak bizonyos korlátozott összegnél többet kölcsönadni egy-egy vállalatnak, megint csak a kockázat következtében (lásd: Kalecki [23]). Az egész kérdést a tőkeelméletnek, és a vállalkozó koordináló szerepének a rejtelmei hálózzák be, amelyek tárgyalását itt nem érdemes tovább folytatni. Érdekes azonban, hogy már 1896-ban E. A. Ross rámutatott, hogy a vállalatnagyság *növekedésének* egyik fő indítéka a kockázat csökkenése a nagy számok törvénye következtében. (Hardy [18] műve idézi a 20—21. oldalon.) Irving Fisher ([11] 408—409. old.) és Knight ([25] 257. old.) is hasonló nézetet vallott.

A legtöbb szerző egyetért abban, hogy sok jellegzetes intézményünket a kockázat létezése formálta. Knight ([25], IX. fejezet) odáig jut el, hogy a szabad vállalkozási rendszert mint olyat, a bizonytalanság ellenhatásának tartja. Mivel a bizonytalanság jelensége mindenképpen létezett a kapitalista korszak előtt is, meg kellene még mutatnia, hogy a jelen és a múlt különbségei magyarázatot adnak a kockázatot ellensúlyozó társadalmi berendezések különbségeire.

Az ebben a pontban tárgyalt jelenségek közvetlenül tehát nemigen használhatók fel a bizonytalanság egyes elméleteinek megkülönböztetésében.

2.2. Összehasonlítjuk az üzletembert az egyének két másik olyan típusával, akiket alapvetően érint a bizonytalanság melletti viselkedés kérdése — a tudóssal és a statisztikussal. A tudósnak korlátozott ismeretek alapján kell választania a végtelen sok, logikailag elképzelhető természettörvényből véges számút. Nem tudhatja, hogy döntése jó vagy rossz, sőt még az sem túl világos, mit jelentenek ezek a kategóriák. Hosszú története van azoknak a próbálkozásoknak, amelyek megkísérelték rendszerbe foglalni a tudományos módszert, sokan a valószínűségelmélet bevezetésével. Nem állítjuk azonban, hogy e törekvéseket valamilyen átütő formális siker koronázta. Ha összehasonlítanánk az üzletembert a tudóssal, akkor arra a lehangoló következtetésre kellene jutnunk, hogy az előbbinek döntési folyamatairól kevés rendszerességet mondható el.

A statisztikus tipikusan az üzletemberéhez jobban hasonlító helyzetben van. A statisztika problémája nagyjából a következőképpen fogalmazható meg: Tudjuk, hogy az adott helyzetre felállítható számos hipotézis közül az egyik igaz. A statisztikus sok különböző kísérlet közül választhat egyet (a kísérletek egy sorozatát is egyetlen kísérletnek tekinthetjük, így ebbe a sémába akármilyen nagyságú mintaválasztás beilleszthető), amelynek kimenetele valószínűségi változó. Ennek eloszlása attól függ, hogy melyik a helyes hipotézis, ami ismeretlen. A statisztikus erre a kimenetelre alapozza tevékenységét (elfogad vagy elvet egy hipotézist, megbecsli az eloszlás várható értékét, elfogadja vagy elveti a javak egy együttesét, a termelési eljárás megváltoztatását javasolja stb.), amelynek következményei egyrészt magától a tevékenységtől, másrészt a valójában helyes hipotézistől függnek.

Ezzel ekvivalens a statisztikus olyan jellemzése, hogy a kísérlet elvégzése előtt választ: milyen kísérletet fog végrehajtani és mit fog cselekedni a kísérlet különböző lehetséges kimenetelei esetén. Valóságos cselekvése valószínűségi változó lesz, amely a kísérlet kimenetelétől függ. Az eredeti döntés következményei ezért kettős bizonytalanságot tartalmaznak, függnek a kísérlet észlelt kimenetelétől és a helyes hipotézistől. A statisztikus problémája ugyanabba az általános típusba tartozik, mint az üzletemberé, és még információgyűjtő szempontjainak is megvan a gazdasági megfelelőjük. A különféle elméletek, amelyeket a statisztikai következtetés megalapozásaként időről időre felállítottak, ezért szoros rokonságban vannak a bizonytalanság melletti gazdasági viselkedés elméleteivel.

3. A BIZONYTALAN KÖVETKEZMÉNYEK LEÍRÁSA

A bizonytalan következmények jellemzései némi pontatlansággal két nagy osztályba sorolhatók: azok, amelyek kizárólag a valószínűségeloszlások nyelvét használják, és azok, amelyek ennek helyettesítésére vagy kiegészítésére valami más elvet keresnek. E leírások különbözősége összefüggésben van — bár a megfelelés nem tökéletes —

azoknak a vitájával, akik a valószínűséget a hit (szubjektív) mértékeként értelmezik (például I. Fisher vagy Keynes, lásd a 3.1.1. és 3.2.1. alpontokat), illetve akik a valószínűséget a relatív gyakoriság (objektív) mértékének tekintik. Az utóbbi nézet legalaposabb kifejtései R. von Mises munkájában gyökereznek (lásd például Mises [36]). Ez utóbbi fogalom a tudatlanság bizonyos fajtáit nyilvánvalóan nem képes magába foglalni. Például a statisztikus viselkedésének kérdésében (lásd a 2.2. pontot) az ismeretlen hipotézis soha nem tekinthető úgy, mint aminek van gyakorisági értelemben vett valószínűség-eloszlása: pontosan egy hipotézis igaz, és az összes többi hamis. A gyakorisági elmélet hívei ezért kénytelenek elfogadni azt a nézetet, hogy a valószínűségi kijelentések nem képesek leírni mindenfajta tudatlanságot (lásd Keynes [24] 95—99. old.). A statisztikusok körében valóban ez a nézet van túlsúlyban (lásd a 3.2.3. alpontot).

Tudott dolog, hogy a gazdasági helyzetben azok a következmények, amelyekkel kapcsolatban bizonytalanság van, árukombinációk vagy pénzkifizetések jövőbeli időpontokban. Ily módon egy valószínűségi leírásban a cselekvések következményeit a jövő különböző időpontjaiban vásárolt vagy eladott áruk *együttes* valószínűségeloszlásaként kell megadni. Az a tény, hogy a valóságos következmények többdimenziós valószínűségi változót alkotnak, legtöbbször nem érinti az általános elveket.

A leírások két fajtája közötti különbség alapvetően érinti azt a kérdést, hogy mennyire használhatók a szerencsejátékoknak és a biztosításoknak (lásd a 2.1.1. alpontot) az adatai a bizonytalanság elmélete számára. A tisztán valószínűségi leírás elfogadása könnyebben hozzáférhető információkat jelent bizonyos, az üzleti kockázat elmélete számára fontos valószínűségi kérdésekről.

3.1. Számos csoportot különböztethetünk meg azok között, akik a bizonytalanságot a valószínűség eszközével írják le: 1. akik úgy tekintik, hogy a lehetséges cselekvések következményeinek valószínűségeloszlásai az egyén számára szubjektív módon adottak, és nem is próbálkoznak további elemzéssel; 2. akik az összes valószínűségi ítéletet korlátozott számú *a priori* valószínűségből nyerik; 3. akik megpróbálják a szubjektív és a gyakorisági elméleteket a nagy számok törvénye segítségével összekapcsolni.

3.1.1. Irving Fisher elmélete ([11], XVI. fejezet és függelék; [12], IX., XIV. fejezet) jellegzetesen azok közül való, amelyek a bizonytalanságot valószínűségeloszlásokkal kifejezhetőnek tartják. Fisher jellemző példája a kötvény, amely a kamatok sorozatát és a tőke végső visszafizetését helyezi kilátásba. Minden időpontra van bizonyos valószínűsége annak, hogy a fizetés elmarad; az általános elemzésben ezek a valószínűségek nem függetlenek, mivel egy adott kifizetés meghiúsulása rendszerint az összes további kifizetés elmaradását hozza magával.

Fisher nézete szerint ([12], 221. old.) a valószínűség egyszerűen a tudatlanság egy kifejezője: „a kockázat a tudással fordítottan változik". Abban az értelemben, hogy egy esemény valószínűségét mindig a meglevő ismeretekhez viszonyítva mérik, ez a kijelentés tulajdonképpen a gondolkodás valamennyi irányzata számára elfogad-

ható. Fisher akárcsak előzőleg Laplace, tovább lép: elegendő tudás birtokában nem lennének valószínűségeloszlások, csak a bizonyosság. E kijelentés igazsága vagy hamissága a valóságos gazdasági világ szempontjából aligha fontos.

Marshall ,szokásához híven nem volt túl explicit a kockázatos helyzetek megfogalmazásában, mégis nyilvánvalónak látszik, hogy teljesen elfogadta a valószínűségi leírásnak azt a módját, amit Fisher (lásd [34], 135. old., 398—400. old., 843. old.).

A mai szerzők közül Hicks [21], Friedman és Savage [16], valamint Lange [28] használják az egyszerű valószínűségi leírást. Úgy tűnik, nem annyira a filozófiai álláspont vezérli őket abban, hogy a tárgyukhoz tartozó jelenségek csakis a valószínűség nyelvén szóló elméletekkel magyarázhatók meg, ezeket az elméleteket egyszerűségük miatt kedvelik. Lange valamelyest nagyobb általánosságra törekszik. Feltételezi, hogy az egyén a különböző kimenetelek valószínűségének csak a sorrendjét képes megítélni és nem a valószínűségek konkrét értékét (ez a nézet némi összefüggésben van Keynes véleményével, lásd a 3.2.1. alpontot a későbbiekben). Az alkalmazáskor a kardinális valószínűségek azonban újra megjelennek, így Lange próbálkozását sikertelennek kell mondani (lásd a 4.1.2. alpontot).[3]

3.1.2. A valószínűségszámítás egészén végighúzódik egy folyamat, a bonyolult események valószínűségének kiszámítása egyszerűbb események ismert valószínűsége alapján. Ez a folyamat nem lehet vég nélküli, valahol el kell kezdődnie. Így a szerencsejátékok tanulmányozásakor rendszerint *a priori* ítéleteket hoznak bizonyos valószínűségekről. A biztosítás és az üzleti ügyek szokásos eseményeinél azonban nincs természetes mód az ilyen mérlegelésre, ha valamihez, csak a múlt megfigyeléséhez lehet fordulni.

Thomas Bayes méltán híres [2] közleménye volt az első rendszeres munka, amely a valószínűségeknek az empirikus tapasztalatból való kikövetkeztetésével foglalkozott. Legyen a $P(A|B)$ szimbólum annak valószínűsége, hogy A igaz, feltéve, hogy B igaz. Ismertnek tételezzük azt, hogy az egymást kölcsönösen kizáró $B_1, \ldots, B_n$ hipotézisek közül egy igaz, és tegyük fel, hogy egy A esemény bekövetkezett. Ekkor a B_i hipotézis valószínűségét az A tapasztalása alapján a

$$P(B_i|A) = P(A|B_i)P(B_i) \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)\right]$$

képlet adja meg. Az *a posteriori* $P(B_i|A)$ valószínűségek így függenek egyrészt a különböző hipotézisek *a priori* $P(B_i)$ valószínűségétől, másrészt az észlelt A esemény előfordulásának a különböző hipotézisek melletti $P(A|B_i)$ valószínűségeitől. (Az

[3] Valóban, ha feltételezzük a különböző események valószínűségének rendezhetőségét, nem nehéz belátni, hogy ezek megmérhetők egy olyan véletlen gépezettel, amely egy B eseményt bármely valószínűséggel elő tud állítani. Hálával tartozom A. G. Hart professzornak (Columbia Egyetem), akivel néhány éve megvitattuk ezt a kérdést, és J. Marshaknak korábbi bizonyításom egyszerűsítéséért.

utóbbi valószínűségeket néha a különböző hipotézisek A melletti igazszerűségének (likelyhood) nevezik.[4]

Bayes tétele világosan mutatja, hogyan fogja egy új információ — mint amilyenek például egy árfolyam vagy a havi eladási adatok — módosítani egy helyzet bizonytalanságainak addigi megítélését. Egy adott összefüggésben az *a priori* valószínűségek különféle hipotézisek viszonylagos bizonytalanságának megítélését jelentik az összes múltbeli információ alapján: az *a posteriori* valószínűségek az új információ segítségével alkotott ítéletek.

A bizonytalan helyzetben való viselkedés általános kérdése a következőképpen fogalmazható meg ezen a nyelven (lásd Tintner [51], [52], [53], [54]: legyen m számú egymást kölcsönösen kizáró esemény: $C_1, \ldots, C_m$, amelyek közül egy a jövőben bekövetkezik. (Egy esemény lehet például egy egész jövedelemsorozat jövőbeli időpontokban.) Ezen események valószínűsége az ismert módon függ attól, hogy melyik igaz a $B_1, \ldots, B_n$ hipotézisek közül, azaz $P(C_j|B_i)$ valamennyi j esetén i szerint változik. Végül ismeretes a hipotézisek *a priori* valószínűség-eloszlása, $P(B_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Ez Tintner és Hart [20] megfogalmazása.[5]

3.1.3. Hogyan kaphatók meg az elmondottaknak megfelelően az *a priori* valószínűségek? Bármely speciális esetben az *a priori* valószínűségek természetesen az előző időszak *a posteriori* valószínűségei. De ennek a folyamatnak valahol el kell indulnia. E ponton segítségül hívják az elegendő ok hiányának elvét. Ezt először Jacob Bernoulli mondta ki a tizenhetedik században, és azt állítja, hogy ha a teljes eseményrendszer elemeinek egyikéről sincs okunk hinni, hogy bekövetkezése a többinél valószínűbb, akkor az eseményeket egyformán valószínűnek kell ítélni. Így Bayes tételének alkalmazásakor kimondta, hogy további ismeret hiányában a B_i $(i=, \ldots, n)$ hipotéziseket egyformán valószínűnek értékelhetjük, és ezért $P(B_i)= =1/n$ valamennyi i-re.[6] Ebből következik aztán, hogy *a posteriori* valószínűségek arányosak a hipotézisek igazszerűségével (likelyhood).

Keynes szerint ([24] IV. fejezet) az ebből az elvből következő ellentmondásokra először J. von Kries [27] műve mutatott rá 1886-ban. Tételezzük fel, hogy két dobást végzünk egy szabálytalan érmével, amelynek torzulásáról fogalmunk sincs. Feltételezett tudatlanságunkban nincs érvünk azon hipotézis mellett, sem ellene, hogy két fejet kapunk, és ezért ennek valószínűségét 1/2-re kell tennünk, mivel a hipotézis valószínűsége egyenlő komplementerének valószínűségével. Hasonló módon azonban a fej után írás következik, az írás után fej, és a két írás hipotézisek valószínűsége is 1/2 lenne. Ez lehetetlen, hiszen az események egymást kizáróak és valószínűségeik összege nem lehet egynél nagyobb.

[4] Itt is, mint még tárgyalásunk sok részében feltettük, hogy a lehetséges alternatív események vagy hipotézisek száma véges. A legtöbb alapelv anélkül is szemléltethető, hogy tekintettel lennénk a végtelen számú alternatív esemény esetére.

[5] Hart munkájának lényege azonban független ettől a speciális leírástól.

[6] Úgy látszik, Bayesnek magának is kételyei voltak ezzel a feltételezéssel szemben, hiszen tanulmányát csak halála után publikálták.

Keynes az ellentmondások feloldására azt javasolta, hogy korlátozzák az elv alkalmazását azokra az esetekre, amikor a szóban forgó események már nem bonthatók tovább. Pontosabban, egy A eseményről akkor mondjuk, hogy felbontható, ha van két egymást kizáró A_1 és A_2 esemény, ugyanolyan „alakúak" mint A, úgy hogy A akkor és csak akkor következik be, ha A_1 és A_2 közül az egyik bekövetkezik; ezek után az elegendő ok hiányának elvét csak felbonthatatlan események halmazára alkalmazzák. Az „ugyanolyan alakú" kitétel valószínűleg azt jelenti, hogy „leírható ugyanazon nyelven".[7]

Nehéz megítélni, mennyire kielégítő ez az elmélet. A már említett ellentmondásokat elkerüli, de a valószínűségi ítéleteket a nyelv formájától teszi függővé, amit tekinthetünk ellenvetésnek is, meg nem is. Technikai szempontból nagyobb hibája, hogy nem alkalmas a megfelelő ellentmondások elkerülésére, ha a véges számú esemény helyett kontinuum számosságúval állunk szemben.[8] [9]

3.1.4. Rövid utalást lehet itt tenni az *a priori* valószínűségfogalom egy másik felépítésére. Ebben a változatban a bizonytalanság leírását nemcsak valószínűségi állításokra alapozzák (Neyman, Pearson és Wald irányzatához ténylegesen hasonló módon, lásd a 3.2.3. alpontot), hanem bizonyos posztulátumokat állapítanak meg az egyén viselkedésére ezen feltételek mellett, és bebizonyítják, hogy az egyének ekkor úgy viselkednek, mint hogyha létezne egy *a priori* valószínűségeloszlás. E nézet tárgyalása igazából a bizonytalan következmények rendezésének elméletéhez tartozik, így annak vizsgálatát elhalasztjuk (Lásd 4.2.3. alpontot).

3.1.5. Végül meg kell említeni azoknak a körét, akik a valószínűségi ítéleteket a nagy számok törvényével gondolják az empirikus megfigyelésekhez kapcsolni. A törvény Jacob Bernoullitól származó legegyszerűbb alakjában kimondja, hogy *független* kísérletek sorozata esetén, ahol egy adott E esemény valamennyi kísérlet-

[7] Az utóbbi években *Carnap* [4] műve fejtette ki új formában a valószínűségnek mint a hit racionális mértékének az elméletét. Az *a priori* valószínűségek kijelölése, úgy mint Keynesnél, itt is a felbonthatatlan eseményekre vonatkozó meggondolásoktól függ, de a *Carnap* által választott módszer ([4] 562—577. old.) nem tulajdonít azoknak egyenlő valószínűséget. Carnap elméleteiről kiváló áttekintést nyújt *Tintner* [55] műve, statisztikai alkalmazásokkal együtt.

[8] Keynes bizonytalanságelméletének egészét, úgy hiszem, helyesebb azok közé sorolni, amelyek azt tartják, hogy a valószínűségi kijelentések önmagukban nem elegendőek (lásd a 3.2.1. alpontot).

[9] Az elegendő ok hiányát kimondó elv Keynes-féle alakja a Bayes-tétel alkalmazásakor az *a priori* valószínűségek más megítéléséhez vezet, mint az szokásos. Tekintsük például n elem véges sokaságát és rendelkezzék ezekből ismeretlen m számú az A tulajdonsággal (m bármely érték lehet 0-tól n-ig). E kérdés szokásos kezelése a Bayes-tétel szerint az lenne, hogy m minden egyes értékéhez ugyanazt az $\frac{1}{n+1}$ *a priori* valószínűséget rendeljük. Keynes feltevéseiből azonban az következnék, hogy m-nek binomiális valószínűségeloszlása van $p=\frac{1}{2}$ mellett. *Carnap* ([4] 565. old.) rámutat arra, hogy Keynes szabályának van egy nagyon kellemetlen következménye: bármely mintát vesszük is visszatevés nélkül a véges sokaságból (ha az nem maga az egész sokaság), 1/2 lesz annak *a posteriori* valószínűsége, hogy a következő megfigyelés A tulajdonságú lesz, függetlenül a megfigyelt mintától. Carnap szabálya elkerüli ezt a nehézséget.

ben egy állandó p valószínűséggel következhet be, n-et kellően nagynak választva, tetszőlegesen kicsivé tehető annak valószínűsége, hogy E bekövetkezésének relatív gyakorisága n számú kísérletben p-től egy adott pozitív értéknél jobban eltér. Természetesen az igaz marad, hogy véges számú kísérlet esetén, bármilyen nagy is a kísérletek száma, nem azonosíthatjuk a relatív gyakoriságot magával a valószínűséggel. Mégis Buffon (idézi: Menger [35], 471. old.) és Cournot (lásd Frechet [14] 62. old.) általános elvnek javasolták, hogy az elegendően kicsiny valószínűségű eseményeket tekintsük gyakorlatilag lehetetlennek. Így kísérletek elég nagy sorozatánál egyenlőség tehető a relatív gyakoriságok és a valószínűségek közé. Ez az elmélet ily módon ugyanazon következtetések felé vezet, mint a gyakorisági elmélet.

A kicsiny valószínűségek elhanyagolásának elvét használta fel Buffon a Szent-Pétervár-probléma (lásd a 2.1.1. alpontot) megoldására. Azon esemény valószínűsége, hogy az n-edik dobásig egyszer sem fordul elő a fej, nagyon kicsivé válik, ha n elég nagy, és ha ezt az eseményt egy bizonyos értéknél nagyobb n-ekre lehetetlennek tekintjük, akkor a nyeremény matematikai várható értéke véges lesz, és ezzel a paradoxon megoldódik.

Ha egy ilyen kritikus valószínűséget valóban meg akarunk állapítani, akkor ez az elv igencsak önkényesnek tűnik, és nagyrészt ugyanolyan osztályozási nehézségekhez vezet, mint az elegendő ok hiányának elve. Szélsőséges esetként tételezzük fel, hogy van egy teljes eseményrendszerünk felbonthatatlan eseményekből, amelyek mindegyikének kisebb a valószínűsége a kritikus értéknél. Ellentmondás lenne azt állítani, hogy valamennyi lehetetlen, hisz egyiküknek be kell következnie. Az eset valóban fellép, ha folytonos valószínűségi változókat vizsgálunk.

A kis valószínűségek elhanyagolásának alkalmazása Bernoulli tételére megköveteli, hogy tudjuk azt, hogy az egymást követő kísérletek függetlenek, és ez maga is *a priori* valószínűségi ítélet. Ezért ez az elv nem alapozza meg kielégítően a valószínűségek elméletét.

3.1.6. A kis valószínűségek elhanyagolása összefüggésben van egy másik kérdéssel, amelyet a filozofikusabb elmék vetettek fel. Ha le is írjuk a valószínűségekkel a bizonytalanságot, mi a jelentőségük ezeknek a cselekvésben, ha az esemény csak egyszer következik be? Mind Knight ([25] 234. old.), mind Shackle ([49] 71. old.) amellett érvel, hogy ha az egyén nem képes akárhányszor megismételni a kísérletet, akkor a valószínűségek, mivel alapjában véve nagy sorozatú gyakorisági arányok, cselekvése szempontjából lényegtelenek lesznek.

Ez az érvelés nyilvánvalóan nem érvényes a valószínűség szubjektív elméletében. Még komolyabban áll viszont a gyakorisági elméletben. Néha úgy érvelnek, hogy ha az egyénnek nincs is lehetősége a szóban forgó kísérlet megismétlésére, mégis várhat stabilitást az általánosított Bernoulli-tétel érvényessége folytán, amely szerint az esélyek váltakozását az egyik kísérletben más kísérletek kiegyenlítik. Az utóbbi okoskodás nem teljesen helytálló. Bármely egyén életében véges a kísérletek száma, amelyeket végrehajt, és amíg a kis valószínűségek elhanyagolásának elvét segítségül nem hívjuk, addig véges számú kísérlet hatása elvben ugyanaz, mint egyetlen kísérleté,

az egyetlen, mennyiségi különbség az, hogy a valószínűségeloszlások feltehetően sokkal koncentráltabbak. Továbbmenve, mint Shackle kifejtette, olyan esetben, mint egy nagy beruházás, az összehasonlító események száma egy ember életében alighanem igen kicsi, bárkinek a mércéje szerint is.

Nehéznek tűnhet jogosnak nyilvánítani a valószínűségi ítéletek hasznosítását, ha az esemény csak egyszer következik be, hacsak nem értelmezzük a valószínűséget a meggyőződés fokaként; de úgy látszik, az ellenkező álláspontot sem könnyű megvédeni. Ha egy egyénnek azt mondjuk, igennel vagy nemmel jósolja meg, hogy egy hibátlan érme dobásaiban két fej következik-e, és tudtára adjuk, hogy az életébe kerül, ha rosszul jósol, úgy nehezen hihető, hogy figyelmen kívül hagyná a valószínűségszámítást. Amint a 4.1.3. alpontban látni fogjuk, ennek az okoskodásnak a kiterjesztéséből következik, hogy majdnem minden ésszerű valószínűségelméletben az egyszeri esemény valószínűsége is a cselekvés alapjául kell hogy szolgáljon, ha vannak igazi valószínűségek.

3.2. Számos szerző ragaszkodik ahhoz, hogy nem minden kockázatot tartalmazó helyzet írható le jól valószínűségi ítéletekkel, illetve, hogy ez utóbbiak nem adnak teljes leírást.

3.2.1. Keynes, bár a valószínűség szubjektív elméletének híve (lásd a 3.1.3. alpontot), bizonyos módon különbözik a 3.1. pontban tárgyalt iskoláktól. A valószínűség az ő számára, mint többnyire másoknak is, egy viszony a meggyőződés és a szóban forgó esemény között, de nem szükségképpen mérhető viszony. Még azt sem gondolta, hogy általában lehetséges a különböző események valószínűségeinek rendezése. Igaz, hogy minden valószínűség a valószínűségek valamely rendezett sorozatához tartozik, vélte, de nem tartoznak valamennyien ugyanahhoz a sorozathoz.[10] A nézetnek, hogy a valószínűségek nem szükségképpen mérhetők nyilván van valami köze Knight megkülönböztetéséhez a mérhető kockázat és a nem mérhető bizonytalanság között (lásd 3.2.2. alpontot), és valóban, Keynes igyekszik valamennyi bizonytalanságot valószínűségnek minősíteni. A valószínűségfogalom e kiterjesztésének valódi következményei nem világosak, mivel alkalmazásokat Keynesnél nem találunk.

Mindazonáltal nyilvánvaló, hogy Keynes nem tekintette a valószínűségi leírást teljesnek. Kísérletképpen bár, azt javasolja, hogy meg kell adnunk annak a bizonyosságnak a súlyát is, amihez képest a valószínűséget képeztük. Ez a súly növekszik a megszerzett bizonyosság növekedésével, de nem szükségképpen mérhető. Keynes elméletében így a bizonytalanságnak két dimenziója van, a valószínűség és a súly, és egyiküknek sem kell mérhetőnek lennie. Megjegyezzük, hogy a súly nem kapcsolódik szükségképpen az eloszlás szóródásához, így Bayes tételének alkalmazása-

[10] Keynes ([24] III. fejezet). Mivel a valószínűségek egyes rendezett sorozatai nem szükségképpen folytonosak, a 3. lábjegyzetben kifejtett érvelés itt nem alkalmazható mérhető valószínűségek felállítására.

kor egy (számszerű) változó *a posteriori* eloszlásának nagyobb lehet a szórása, mint az *a priorinak*, de az előbbinek biztosan nagyobb súlya kell legyen. A véletlen mintákból való statisztikai következtetések szokásos problémái esetében azonban rendszerint együtt jár a súly növekedése és a szórás csökkenése (lásd Keynes [24], VI. fejezet).

3.2.2. Knight ([25], VII. fejezet) tagadja, hogy a kockázat valamennyi típusa leírható valószínűségi kijelentésekkel. Nézetei onnan származnak, hogy a bizonytalanságot funkcionálisan, az emberi elme problémamegoldó módszereivel összefüggésben szemléli. A gondolkodás nehézségei miatt az ember az esetek csoportosításával kénytelen egyszerűsíteni a dolgokat. Az ilyen elemzéssel nyert események közti viszonyok rendszerint bizonytalanok, nem állandók. Némelyikük természetesen leírható valószínűségi kijelentésekkel, amelyeket Knight a szokásos módon *a priori* és statisztikai valószínűségekre oszt, amelyek a csoportosítás homogenitási fokában különböznek. Az az osztályozás, amire egy statisztikai valószínűséget alapozunk, részben empirikus. Bár Knight elemzése nélkülözi a formális világosságot, és ezért nem lehetünk bizonyosak ebben, úgy tűnik, hogy a statisztikai valószínűségeket a tapasztalatból nyeri, az *a priori* valószínűségek segítségével a Bayes-tétel módjára.[11]

Az igazi bizonytalanságokat vagy becsléseket élesen megkülönbözteti mind az *a priori*, mind a statisztikai valószínűségektől. Ezek akkor lépnek fel, amikor nincs jó alapunk az osztályozásra, és rendszerint akkor alkalmazzuk őket, amikor valamilyen értelemben egyedi helyzet elé kerülünk. Ilyen esetekben, Knight szerint az emberi észjárás nem csupán a helyzet felmérésére törekszik, hanem ennek megbízhatóságát is értékeli, mindkettőt intuitív alapon végezve.

Knight nem ad formális módszert a bizonytalanságok, illetve a becslések leírására, egyes tulajdonságaikat viszont tárgyalja. Azt állítja, hogy a becsléseket rendszerint valamilyen osztályozásra alapozzák, mégpedig vagy az objektív körülményekére, vagy, gyakrabban, az egyének ítélőképességének vagy saját ítéletükbe vetett szubjektív bizalmuknak az osztályozására. Később utal azon események „valószínű", illetve „nem valószínű" kimeneteleire, amely eseményekről bizonytalansági ítéleteket hoztunk, és kifejti, hogy sok eset egyesítésével a bizonytalanság foka csökkenő irányú, úgy, mint a nagy számok törvénye esetében (lásd Knight ([25] VIII. fejezet). Röviden szólva, Knight bizonytalanságai a szokásos valószínűségek meglepően sok tulajdonságát felveszik, és nem világos, hogy megkülönböztetésükkel mit is nyer a szerző.

Knight, úgy tűnik, aggódik a valószínűségszámítás látszólag mechanikus jellege miatt, és ebből következően amiatt, hogy az ismeretlennel szembeszálló emberi elme

[11] „Hangsúlyozni kell, hogy a múltban megmutatkozott arányok jövőbeli érvényességébe vetett nagyfokú hit még mindig a meghatározatlanságnak egy *a priori* megítélésére támaszkodik." (*Knight* [25] 225. old.)

kísérletező, alkotó természete nem tükröződik benne. Egy alapvető értelemben ez feltehetően helyes, de úgy látszik csak ahhoz a következtetéshez vezet, hogy erre a helyzetre nem lehet elméletet alkotni, legalábbis nem döntéselméletet az itt tárgyalt értelemben (lásd a tudósról szóló kifejtést a 2.2. pontban és a 4.3. pontban). Az a megjegyzés, hogy a becslések abban különböznek a statisztikai valószínűségektől, hogy nincsenek rájuk érvényes osztályozási elvek, egy határozottabb irányba is elvihet. Értelmezhető úgy, hogy a Bayes-tételhez szükséges *a priori* valószínűségek ismeretlenek. Ha ez helytálló, Knight bizonytalanságfogalma a következő fejezetben sorra kerülő statisztikai elméletekhez vezet, és meg kell jegyezni, hogy ezek az elméletek szeretnék az emberi lény tudásra törő hajlamának legalábbis egy részét kifejezésre juttatni.

3.2.3. Hardy ([18] 53—55. old.) úgy vélte, hogy a bizonytalanság Knight-féle esete valójában a statisztikai módszerekhez tartozik, noha a valóságos üzleti értékelések természetesen torzítottak lehetnek. Így ő azt tartotta, hogy Knight megkülönböztetése nem is éles, és hogy létezhet Knighténál határozottabb elmélet is. Hardy idejében a statisztikai következtetés alapjait jórészt az inverz valószínűség fogalmával tárgyalták (Bayes tétele), ezért nem világos, mire gondolt. Hardyval egyidejűleg R. A. Fisher azt bizonygatta [13], hogy a statisztikai következtetés számára új elvek kellenek, olyanok, amelyek nincsenek benne a valószínűség klasszikus elméletében. Időben közelebb hozzánk Neyman és Pearson öntötte formába a statisztikai problémát, ezt aztán Wald módosította (lásd Neyman és Pearson [38]; Wald [56], [57] 1.1. rész). A statisztika kérdésének a 2.2 pontban található leírása szerint adottnak vesszük a lehetséges hipotézisek egy halmazát, de nincsenek valószínűségi jellegű ítéleteink, másképp mondva, nincsenek olyan ítéleteink, amelyek a hipotéziseket valóságértékük szerint különböztetik meg. Így egy gazdasági példa legegyszerűbb esetében két lehetséges hipotézis van, amelyekről tudjuk, hogy egyikük igaz. Ezután valamennyi cselekvéshez kapcsolhatunk egy *jövedelmi függvényt*, amely az egyes hipotézisekhez meghatározza a cselekvés következményeit. A kérdés ezek után a jövedelmi függvények közti választás lesz. Általánosabb esetben egy adott cselekvés adott hipotézis melletti jövedelme maga is valószínűségi változó lehet, amelynek eloszlását a hipotézis határozza meg. A kérdés ekkor ezek között az esetleg véletlen jövedelmi függvények közötti választás lesz.

Ebben a leírásban a bizonytalanság két típusa szerepel: az egyik a hipotézisé, amit úgy fejezünk ki, hogy tudjuk, hogy a hipotézis egy bizonyos osztályhoz vagy *modellhez* tartozik; és a másik adott hipotézis mellett a jövőbeli eseményekhez vagy megfigyelésekhez tartozik, ezt egy valószínűségeloszlás fejezi ki. Ha a modell csak egyetlen hipotézist tartalmazna, a bizonytalanságot egy valószínűségeloszlás teljesen leírná. Ha valamennyi hipotézis biztos esetet jelent, abban az értelemben, hogy adott hipotézis mellett a jövőbeli esemény már nem bizonytalan, akkor a bizonytalanságot további információ nélkül leírhatnánk azzal, hogy a jövőbeli esemény egy bizonyos osztály egyike. Meg kell mondanunk, hogy Neymann és Pearson leírása nem szünteti meg az összes *a priori* elemet, hiszen a modellt még meg kell

választani.[12] Az *a priori* valószínűségeket azonban kiküszöböli. Azt is meg kell jegyezni, hogy Neyman és Pearson, nem úgy mint Knight, nem tekinti valamilyen összesítés révén megszüntethetőnek a nem valószínűségi jellegű bizonytalanságokat. Ha egy modell szerint 0-tól a-ig bármely jövedelem bekövetkezhet, és egy ettől független esetet nézve, mondjuk olyat, amelyben 0-tól b-ig fordulhatnak elő a jövedelmek, akkor a két modell együtt csak annyit mond, lehetséges bármely jövedelem 0-tól $a+b$-ig.[13]

3.2.4. Shackle a bizonytalanság megfogalmazását az összes valószínűségi elem tagadásával indítja, legalábbis, ami a „nagy" döntéseket illeti (lásd Shackle [48] VII. fejezet, 6—7. old.). Tagadja a valószínűség szubjektív elméletét, hiszen itt egy eloszlás még *ex post* sem verifikálható, míg a gyakorisági elmélet azért alkalmatlan, mert végtelen számú ismétlés nem lehetséges (lásd a 3.1.6. alpontot). Saját elmélete Neyman és Pearson megfogalmazásának egy általánosítása, abban az esetben, amikor a hipotézisek nem valószínűségeloszlások útján, hanem egyértelműen határozzák meg a jövőbeli eseményeket. (Lásd Shackle [48] 10—17. old., 43—58. old., 128—133. old.) Neyman és Pearson a lehetségesek és a lehetetlenek két kategóriájába osztották a hipotéziseket, Shackle folytonos átmenetet enged meg a kettő között. Valamennyi lehetséges jövőbeli eseményhez a *potenciális meglepetés* egy fokát rendeli, annak mértékét, amennyire az egyén meglepődne, ha az esemény bekövetkezik. A potenciális meglepetés ordinális fogalom,[14] az alternatív lehetőségeket egy skálán rendezzük el, a potenciális meglepetés fokának minimumától, amit például egy tautológiához kapcsolhatunk, egészen a maximumáig, amit a lehetetlennek tekintett eseményekhez rendelünk.

A valószínűségelmélethez hasonlóan szabályokat állít fel a potenciális meglepetések összekapcsolására, de a szabályok nem additív természetűek. Legyen $\eta(E)$ az E esemény potenciális meglepetése, és jelentse $E_1 \cup E_2$ azt az eseményt, hogy E_1 vagy E_2 bekövetkezik. Ekkor, ha E_1 és E_2 egymást kölcsönösen kizáró események, $\eta(E_1 \cup E_2)$ egyenlő az $\eta(E_1)$ és $\eta(E_2)$ közül a kisebbikkel; ez a kijelentés a valószínűségek összeadási szabályának megfelelője. Továbbá legyen $\eta(E|F)$ E potenciális meglepetése, feltéve, hogy F bekövetkezett, és $E \cap F$ jelentse mind E, mind F bekövetkezését. Ekkor az összetett valószínűségek szorzási szabályának megfelelő feltételezés, hogy $\eta(E \cap F)$ egyenlő $\eta(E|F)$ és $\eta(F)$ közül a nagyobbikkal. Természetes lenne azt mondani, hogy E akkor független F-től, ha $\eta(E|F)=\eta(E)$, az ilyen eseményekre $\eta(E \cap F)$ egyenlő $\eta(E)$ és $\eta(F)$ közül a nagyobbikkal. Innen látszik, hogy Shackle rendszerében, úgy mint a Neyman és Pearson elméletében, nincs nagy számok törvénye, nem létezik a kockázat megszüntetése független események össze-

[12] Modellként lehet használni a logikailag lehetséges *összes* hipotézisek osztályát, de ebben az esetben csak szegényes statisztikai következtetéseket vonhatunk le.

[13] A Neymann—Pearson—Wald-féle leírás fontosságát a gazdasági viselkedésben főként *Marshak* emelte ki ([30] 323—324. old., [31] 108—110. old., [32] 183—184. old. és 192—195. old.).

[14] Néhány helyen *Shackle* arra utal, hogy a potenciális meglepetés fokai mérhetők, sőt az egyének között összehasonlíthatók, de elméletének egésze kifejthető minden ilyen feltételezés nélkül.

tételével, mert a kedvezőtlen kimenetelek sorozatához kapcsolt meglepetés van akkora, mint a sorozat bármelyik tagjához fűzött meglepetés.

Az utóbb mondottak azt mutatják, hogy az összes valószínűségi elem kizárása Shackle elméletéből nem tekinthető megnyugtató dolognak. Mivel Shackle szerint egyetlen eseményhez nem tartozhat valószínűségeloszlás (lásd a 3.1.6. alpontot), a helyzetet a potenciális meglepetés egy függvénye jellemzi. De akkor a független kísérleteknek nincs olyan mennyiségű ismétlése, amely a kockázat csökkentésére vezetne, holott még Shackle is elismeri, hogy nagy sorozatokra alkalmazhatók a valószínűségi szabályok. Más szóval, Shackle elmélete még határértékben sem vezet el a valószínűségelmélethez.[15]

Ez a gondolatmenet egy példa segítségével más formában is kifejthető. Tekintsük azt az eseményt, hogy szabályos érme dobásánál kétszer adódik fej. Ésszerűnek látszik azt állítani, hogy ezen esemény bekövetkezésének potenciális meglepetése nagyobb kell legyen, mint elmaradásáé. Másrészt azonban bármely adott dobás esetén a fej potenciális meglepetése a lehetséges minimum.[16] Az egymást követő dobások függetlenségét feltételezve, annak potenciális meglepetése, hogy két vagy több egymást követő fej adódik, ugyanaz lenne, mint egyé, azaz a lehetséges minimum.

Ésszerűbbnek tűnne, bár ez nem Shackle nézete, az ő potenciális meglepetés fogalmát a Neyman—Pearson elmélet egyenes általánosításának tekinteni; azaz a potenciális meglepetést a hipotézisekhez rendelni, amelyek a jövőbeli események valószínűségeloszlásait meghatározzák. Ebben az esetben a Neyman—Pearson elmélet speciális esetként jelentkezne, amelyben az összes potenciális meglepetés vagy a maximális vagy a minimális értéket veszi fel.

4. A KÖVETKEZMÉNYEK RENDEZÉSE

Miután a bizonytalan következményeket ilyen vagy olyan módszerrel leírtuk, elméletet kell felállítanunk arra is, miként rendezi az egyén ezeket a következményeket. Némely elmélet alig mond többet annál, hogy a következmények valamiképp rendezhetőek, mások határozattabb állításokat tesznek. A lehetséges bizonytalan helyzetek közötti preferenciák elmélete természetesen függ a felhasznált leírási módtól.

4.1. A bizonytalan helyzetben való viselkedésnek — a bizonytalanságot a valószínűségeloszlások nyelvén leírók körében — több, egymást követő elmélete uralkodott: a várható hasznosság maximalizálásának fogalma, általánosabb funkcioná-

[15] Azon észrevételeink közül, amelyeket itt és a 4.2.4. alpontban Shackle nézeteihez fűztünk, néhányat már *Graaf* és *Baumol* is megtettek kitűnő áttekintő cikkükben [17].

[16] Legyen A a fej, $\bar{A}$ az írás, és Shackle nyomán legyen 0 a potenciális meglepetés lehetséges fokainak minimuma. Mivel $A \cup \bar{A}$ tautológia: $\eta(A \cup \bar{A}) = 0$. Mivel A és $\bar{A}$ kölcsönösen kizárják egymást: $\min [\eta(A), \eta(\bar{A})] = 0$. Végül mivel nincs ok egyiket sem előnyben részesíteni: $\eta(A) = \eta(\bar{A}) = 0$.

lok maximalizálása, a várható hasznosság Ramsey—Neumann—Morgenstern-féle újjáélesztése és újraértelmezése, valamint egy új, ugyancsak Ramsey kezdeményezte fejlemény, ahol az *a priori* valószínűségeket magatartási feltételekből nyerik. Az utóbbi csoport képviselői kivételével valamennyi szerző olyan helyzetet vizsgál, amelyben a valószínűségek közvetlen módon adottak.

4.1.1. Daniel Bernoulli azt javasolta a Szent-Pétervár-játék (lásd a 2.1.1. alpontot) megoldásaként [3], hogy egy pénzösszeg hasznossága legyen arányos az összeg logaritmusával, vagy legalábbis a pénz határhaszna legyen csökkenő. Innen következik, hogy a játékban a hasznosság (és nem a pénzösszeg) matematikai várható értéke véges, tehát, hogy az egyén csak egy véges összeget hajlandó fizetni érte.

Bernoulli javaslata nagyon jól beleillett az érték hasznossági elméletének az 1870-es években kibontakozó fejlődésébe, különösen, ha a jövedelem csökkenő határhasznának szokásos feltételezését nézzük. Marshall ([34] 398—400. old.) ezzel indokolja megfigyelését arról, hogy az üzleti életben létezik kockázat iránti idegenkedés.

Marshall azonban azt is megjegyzi ([34] 135, 843. old.), hogy e hipotézis mellett a szerencsejátékot gazdasági veszteségnek kell tekinteni. A szerencsejátékok űzése ekkor csak valamilyen egyéb meggondolással indokolható meg, például a játékkal járó izgalommal. Menger ([35] 479—480 old.) szerint ez arra mutat, hogy Bernoulli elmélete nem jelenti a paradoxon kielégítő megoldását.

Menger egy további érvet is ad Bernoulli elmélete ellen. Legyen $U(x)$ az adott x-összegű pénzből nyert hasznosság, és tételezzük fel, hogy $U(x)$ az x növekedésével korlát nélkül nő (ez a helyzet például, ha $U(x)=\log x$, mint Bernoulli elméletében). Ekkor valamennyi n egész számhoz létezik olyan x_n pénzmennyiség, hogy $U(x_n)=2^n$. Tekintsük a módosított Szent-Pétervár-játékot, amelynek x_n a kifizetése, ha az n-edik dobásnál adódik először fej. Világos, hogy ekkor a várható haszon ugyanaz lesz, mint a várható pénzkifizetés a játék eredeti megfogalmazásában, tehát végtelen. Ily módon a játékos bármely véges összeget kifizetne azért a kiváltságért, hogy a játékban részt vehessen.[17] Ezt tagadjuk, mint ami ellentmond az intuiciónak.

4.1.2. Bár az előző érvelés azt sejteti, hogy a korlátos hasznossági függvény kikötése megoldaná a paradoxont, Menger kifejti, hogy a valóságos viselkedés és a matematikailag várható nyereség ellentmondása nem egyedül a nagy nyereségek (a csökkenő határhasznosság okozta) leértékelésének tulajdonítható, belejátszik a kis valószínűségek aláértékelése is (ami a kis valószínűségek 3.1.5. alpontban tárgyalt elhanyagolásának egy általánosítása). Végkövetkeztetése az, hogy a különböző valószínűségeloszlások rendezése (abban az értelemben, hogy egy egyén mekkora összeget lenne hajlandó fizetni az általuk nyújtott lehetőségekért) függ a pénz csökkenő határhasznától, az egyénnek a minimális létfenntartási szinthez viszonyított eredeti gazdagságától, a nyereség esélyével szembeállítva, és a nagyon nagy és nagyon kicsi való-

[17] *Menger* ([35] 464—469. old.). A Szent-Pétervár-ellentmondás megoldását korlátos hasznossági függvénnyel először *Cramer*, XVIII. századi matematikus javasolta egy levélben, amelyet *Bernoulli* eredeti cikkében közreadott (lásd *Bernoulli* [3] 57—58. old.).

színűségek szisztematikus aláértékelésétől (valamint a közepes valószínűségek következetes felértékelésétől).

Menger nézetének egy természetes általánosítása, ha egyszerűen azt tekintjük, hogy a valószínűségeloszlásoknak van valamilyen rendezésük. Ha úgy tetszik, végrehajtjuk ezt azáltal, hogy minden valószínűségeloszláshoz egy számot rendelünk, amely kifejezi annak értékét. A számoknak ezt a hozzárendelését Tintner elnevezésével[18] *kockázati-preferencia-funkcionál*nak mondhatjuk. A helyzet hasonló ahhoz, amikor árukombinációkhoz rendelünk preferencia-sorrendjüknek megfelelő értékeket, amely hozzárendelést hasznossági függvénynek nevezzük.

Valószínűleg Tintner használta először ezt a formális leírást, de általános elgondolása legalábbis Irving Fisherig[19] nyúlik vissza. Fisher kifejti, hogy egy részvény értéke a visszafizetés valószínűségeitől fog függeni. Egy bizonytalan jövedelmet általában, bár nem mindig, kevesebbre értékelnek, mint amennyi annak matematikai várható értéke. A kockázattól való idegenkedés következtében keresik a terhek csökkentésének eszközeit. Az állam által szavatolt kötvények, a részvényekkel szemben, arra szolgálnak, hogy csökkentsék vásárlóik kockázatát. Az ilyen eszközök a teljes kockázatot nem csökkentik, csak újraelosztják. Létezésüket annak köszönhetik, hogy az egyes egyének különböző mértékben idegenkednek a kockázattól. A teljes kockázatot csökkentő eszközök: a készletezés, az ismeretek növelése, a biztosítás és a spekuláció. A biztosítás olyankor alkalmazható, amikor a kockázat statisztikai alapon csökkenthető, más esetben a spekulációval foglalkozók „vállalják fel" a kockázatot. Ez a specializáció társadalmi nyereséggel jár, egyrészt, mert a spekulánsok többet tudnak a bizonytalanságról, mint az átlagos egyén, másrészt a nagy számok törvénye miatt. Mindamellett, ha a spekulánsok előrejelzései egymással összefüggőek, akkor az a törvény, amely az együvé vett véletlen események függetlenségén alapszik, érvénytelenné válhat, és így a helyzet valójában rosszabb is lehet, mint spekuláció nélkül.

Az olyan jövedelmekkel kapcsolatban, amelyek értékei széles tartományban helyezkednek el — mint például az osztalékok — Fisher úgy vélte, hogy a vásárló a lehetséges jövedelmeknek a szubjektív valószínűségeloszlásból nyert várható értékét és szórását veszi figyelembe. Fisher bizonyára azokra az esetekre gondolt, amelyekben a valószínűségeloszlás normális, ahol a várható érték és a szórás ismeretében ismerjük az egész eloszlást. Mégis, az az elképzelés, hogy egy valószínűségeloszlás értékelése csupán korlátozott számú paramétertől függ, és nem az egész eloszlástól, legalábbis mint első megközelítés, széles körben elfogadottá vált (lásd Marshall ([34] 118—199. old.). Így Hicks [2] műve a várható értéket és a szórást használja,

[18] *Tintner* [51]—[54]. A „funkcionál" elnevezést használjuk, mert egész valószínűségeloszlásokhoz rendelünk értékeket, és nem a szokásos értelemben vett változókhoz.

[19] *I. Fisher* ([11]) XVI. fejezet és a XVI. fejezet függeléke). Pigou tárgyalása ([41] I. függelék) hasonló, de ő ezt úgy fejezi ki, hogy a kockázatviselés termelési tényező. Ez a szövegezés, enyhén szólva, értelemzavaró.

bár a bizonytalanság egy korábbi tárgyalásában a valószínűségeloszlások egy általános rendezését alkalmazta (lásd Hicks [1]), ahol egy eloszlás hasznossága várható értékének növekedésével nőtt, és szórásának növekedésével csökkent. A biztosítás elméletével kapcsolatban Cramér javasolta, hogy a rendezés kritériuma annak valószínűsége legyen, hogy a jövedelem valamely kritikus érték alá esik (lásd Cramér [7] III. rész), ahogy Marschak idézi (lásd [33] 120. old.): minél nagyobb ez a valószínűség, annál értéktelenebb az eloszlás az egyén számára. Domar és Musgrave [8] azt indítványozták, hogy egy eloszlás hasznossága függjön *kockázat*ától és *hozam*ától, amelyek definíciója a következő: ha $x_1, \ldots, x_n$ a lehetséges jövedelmek és ezek valószínűsége $p_1, \ldots, p_n$, ahol $x_1, \ldots, x_m$ negatívak, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ pedig pozitívak, akkor a kockázat $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, míg a hozam $\sum_{i=m+1}^{n} p_i x_i$. Lange ([28], VI. fejezet) ahhoz az általános elvhez tartotta magát, hogy a mérhető valószínűségeket el kell kerülni (lásd a 3.1.1. alpontot). Ennek megfelelően a móduszt és a terjedelmet javasolta oly módon, hogy a hasznosság az előbbi növekedésével nőjön, az utóbbi növekedésével csökkenjen. Mindamellett megállapítja, hogy a „gyakorlati" terjedelem az, ami igazán számít, és azt úgy definiálhatjuk, mint az eloszlás öt és kilencvenöt százaléka (vagy valamely hasonló pár) közötti intervallumot. Egy ilyen definíció természetesen mérhető valószínűséget feltételez. Marschak ([30] 320—325. old.) szintén a várható értéket és a szórást veszi első közelítésnek, de más paramétereket, mint például az aszimmetria jellemzőit, is lényegesnek tekint. Végezetül Keynes szintén úgy gondolta ([24], XXV. fejezet), hogy az egyén magatartását nemcsak a várható hasznosság vezérli, hanem a kockázat valamely mérőszáma is; a bizonytalanság leírásáról vallott nézeteinek megfelelően (lásd a 3.2.1. alpontot) a valószínűségeloszlás bizonyosságának súlyát is olyan változónak tekintette, amely számít egy adott bizonytalan helyzet hasznosságának megítélésében.

4.1.3. A várható hasznosságot maximalizáló Bernoulli-féle elmélet elvetése abban a szemléletben gyökeredzik, amely a hasznosságot a javak objektív módon mérhető tulajdonságának tekinti. Emiatt tűnt ésszerűnek azt mondani, hogy a lehetséges hasznosságoknak nemcsak az átlaga, hanem a szóródása is számít. A hasznosság Paretónak köszönhető közömbösségi görbe szemlélete azonban aláásta ezt az érvelést, mert itt a hasznosság elvesztette minden objektív jelentőségét, és a csökkenő határhaszon is értelmetlenné vált (lásd Friedman és Savage ([16] 280—281. old.). E változásnak azonnali hatása volt a kockázat elméletére, mégpedig, mint az természetes, ténylegesen sietette a haladást a kockázatviselés egy általános ordinális elmélete felé. Ezzel szemben Ramsey [42] munkája[20] mutatott rá először, hogy a kockázatviselés egy ordinális elméletéből kiindulva, és hozzátéve ahhoz néhány ésszerű feltevést, levezethető egy olyan hasznossági függvény, hogy elmondható: az egyén úgy viselkedik, mintha a hasznosság várható értékét maximalizálná.

[20] Köszönettel tartozom N. C. Dalkeynek (RAND Corporation) ezért a hivatkozásért.

Ramsey munkája nem volt túl világos, és kevés figyelmet keltett. Neumannra és Morgensternre maradt ([37] függelék), hogy kimondjanak egy világos axiómarendszert a valószínűségeloszlások közötti választásról, amely a várható hasznosság maximalizálásának feltételezéséhez vezetett, és ami egyben meggyőző is volt. Marschak [33] egy egyszerűsített tárgyalásrendet adott meg, amelyet itt is követünk.

A kulcspont az, hogy bármennyire bonyolult is egy szerencsejáték, mindig leírhatjuk egyetlen valószínűségeloszlással, amely a végső kimenetelére vonatkozik. Így tételezzük fel azt, hogy van két játékautomatánk, az egyik kimenetelei x_1 és x_2, p és $1-p$ valószínűséggel, a másiké x_3 és x_4, q és $1-q$ valószínűséggel. Tegyük fel most, hogy egy előzetes játék dönti el, melyik automatával játszunk, és ez az 1. automatát r valószínűséggel a 2. automatát $1-r$ valószínűséggel választja. Természetesen ekkor egy bonyolult játékunk van négy lehetséges kimenetellel, ezek x_1, x_2, x_3, x_4, amelyek valószínűségei rendre rp, $r(1-p)$, $(1-r)q$, $(1-r)(1-q)$. Az egyén, legalábbis a racionális egyén, viselkedésében nyilvánvalóan nem okoz különbséget, hogy a kétszakaszos játékra kérjük-e fel vagy a fent megadott valószínűségeloszlású játékra.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a lehetséges kimenetelek száma véges, mondjuk n. Jelölje ekkor a $p(p_1, \ldots, p_n)$ azt a valószínűségeloszlást, ahol p_i az i indexű lehetséges kimenetel valószínűsége, $p_i \geqq 0$ valamennyi i esetén, és $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ha p és q két valószínűségeloszlás és a valós szám, $0 \leqq a \leqq 1$, akkor az $ap+(1-a)q$ azt a valószínűségeloszlást fogja jelenteni, amelyben az i indexű kimenetel valószínűsége $ap_i+(1-a)q_i$. Az előző bekezdésből könnyen látható, hogy a viselkedés szempontjából az $ap+(1-a)q$ eloszlással leírt kockázat ugyanaz, mint az a kétszakaszos játék, amelyben egy véletlen eszközzel kell választani a p és a q eloszlások között, és amely eszköz az elsőt a a másodikat $(1-a)$ valószínűséggel választja. Az ilyen eloszlást p és q egy *keverék*ének fogjuk nevezni.

Neumann és Morgenstern abból az általános elvből indulnak ki, hogy a valószínűségeloszlások rendezettek. Azt is megmutatják azonban, hogy a már említett meggondolások a valószínűségeloszlások szerkezetéről a valószínűségeloszlások közötti választás további ésszerű posztulátumait hozzák magukkal. Például, mivel p és q egy keveréke úgy tekinthető mint egy játék, amelyben véletlenszerűen kiválasztjuk a két eloszlás valamelyikét, egy ilyen keveréket az egyén értékelése p és q közé kell hogy helyezzen. Természetes dolog ezért azt feltenni, mint Marschak teszi, hogy ha p értékesebb q-nál és q r-nél, akkor p-nek és r-nek van olyan keveréke, amely q-hoz képest éppen közömbös. Továbbmenve, tegyük fel, hogy p közömbös q-hoz képest. Ekkor ésszerű dolog azt feltételezni, hogy az $ap+(1-a)r$ keverék, bármilyen r eloszlás mellett közömbös q és r ugyanazon $aq+(1-a)r$ keverékéhez képest. Hiszen a kétszakaszos játékban először a valószínűsége van p-nek és $(1-a)$ az r-nek, másodszor a valószínűsége van q-nak és $(1-a)$ az r-nek. Mivel az egyénnek feltevés szerint mindegy, hogy p-t vagy q-t kap, ésszerű azt állítani, hogy a két játék közömbös számára.

Ezekből az igen ésszerű feltételezésekből,[21] a következő figyelemreméltó tétel következik: Található olyan módszer, amellyel az egyes kimenetelekhez hasznosságot rendelhetünk, mégpedig úgy, hogy bármely valószínűségeloszlást véve, az ahhoz fűzött hasznosság egyenlő a kimenetelek hasznosságának várható értékével ezen eloszlás mellett. A hozzárendelésben szereplő számokat hasznosságoknak nevezzük, mert ugyanazt a rendezést adják, mint az eloszlások és kimenetelek ordinális értékelése. A hasznosságok hozzárendelésének módszere ezenkívül egy lineáris transzformáció erejéig egyértelmű.

A következő megjegyzések tehetők erről az eredményről. Először, a hozzárendelésben szereplő hasznosságok semmiképp sem jelentik az eredmények valamely belső jó tulajdonságának értékelését (ami végül is egy értelmetlen fogalom). Ezért a csökkenő határhaszon feltételezéséhez vezető intuitív érzéseket félretehetjük, és szabadon feltehetjük, hogy a határhaszon növekvő, így a szerencsejáték létezése megmagyarázható az elméleten belül. Másodszor, a viselkedés posztulátumai ésszerűnek tűnnek a valószínűségnek még a gyakorisági vagy más egyéb definíciója mellett is. A Neumann—Morgenstern-tétel így ahhoz a következtetéshez vezet, hogy a valószínűségeloszlás akkor is érvényes, ha csak egyetlen eseményt észlelünk, vagyis a valószínűség bármelyik definíciója elvisz a szubjektív értelmezéshez. Ily módon a kifogások az ellen, hogy a valószínűség fogalmát a végtelen ismétlés nélküli esetben is használjuk, úgy látszik, semmissé válnak (lásd a 3.1.6. alpontot).

A kockázatviselés ordinális elméletének irodalmából néhány dolog értelmezhető a vázolt keretben. Menger kifogása a Bernoulli-elmélet ellen a nem korlátos hasznossági függvények esetében (lásd a 4.1.1. alpontot) a következőképpen alakítható át. Ha a hasznossági függvény nem korlátos, akkor található végtelen hasznosságú valószínűségeloszlás. Ha, amint az természetesnek látszik, megköveteljük, hogy az összes hasznosság véges legyen,[22] akkor Menger érvelése ahhoz a következtetéshez vezet, hogy egyetlen hasznosság sem lehet nagyobb valamely rögzített felső korlátnál.

A valószínűségeloszlások jellemzése a várható értékkel és a szórással, legalábbis egy speciális esetben, érvényes lehet a most kifejtett elmélet mellett, éspedig akkor, ha a jövedelem hasznossági függvénye kvadratikus. Ebben az esetben egy valószínűségeloszlás hasznossága a várható érték ugyanazon kvadratikus függvénye lesz, hozzávéve még egy, a szórással arányos tagot. Végül azon valószínűség minimalizálási szabálya, hogy a jövedelem egy kritikus érték alá esik, a Neumann—Morgenstern elméletben speciális eset lenne, ahol a kritikus értéket el nem érő jövedelmek valószínűsége 0, az azt meghaladóké pedig 1.

[21] Valójában ezek a feltevések nem teljesen elegendőek. Egy további feltevés, ami lehetővé tenné a tétel bizonyítását, például az, hogy legyen legalább négy olyan valószínűségeloszlás, amelyek között nincsenek közömbös párok (vagy valamennyien közömbösek).

[22] Pascal persze a mennyország reményét bármely földi jutalomhoz képest végtelen értékűnek tekintette. Az viszont kétséges, hogy a Szent-Pétervár-játék akármely változatát is ilyen különleges helyre léptette volna elő.

Friedman és Savage felhasználták a Neumann—Morgenstern rendszert, hogy ismeretekhez jussanak a jövedelem hasznossági függvényéről. Az alacsonyabb jövedelmi csoportok tagjai biztosítanak is, és szerencsejátékokat is űznek. A biztosítás akkor ésszerű, ha a két lehetséges jövedelem közötti intervallumban a hasznossági függvény deriváltja csökkenő (általában csökkenő, de nem feltétlenül mindenütt), míg a szerencsejáték úgy racionális, ha a hasznosság deriváltja a két lehetséges jövedelem között jelentősen növekszik. Tekintetbe véve a szerencsejáték és a biztosítás szerkezetét (lásd a 2.1.1. alpontot), ez megköveteli, hogy a hasznossági függvénynek legyen egy kezdeti szakasza, ahol a határhaszon csökkenő, és azt olyan szakasz kövesse, ahol növekvő. Az a tény, hogy a lottójátékoknak általában több nyereményük van egyetlen összegző nagydíj helyett, azt mutatja, hogy a játékkedv nem nő határtalanul, ezért kell lennie a magas jövedelmek egy végső szakaszának, amelyben a határhaszon ismét csökken.

L. Törnqvist [50] részben előrelátta ezeket az eredményeket. Abból a tényből kiindulva, hogy a lottószelvények egy része eladatlan marad, és ezért a lottókibocsátásnak is van kockázata, következik, hogy a hasznossági függvénynek a lottóvásárlók és a lottókibocsátók viselkedését egyaránt meg kell magyaráznia. Ezen az alapon javasolja a jövedelem hasznossági függvényének a következőt:

$$U(x) = x\{1+k[x/(K+x)]^2\},$$

ahol k és K állandók, és ahol x kis értékeire a határhaszon csökkenő, más értékekre pedig növekvő.

4.2. Most már áttérhetünk a bizonytalanság melletti viselkedés azon elméleteire, amelyek leírásmódja nem valószínűségi ítéleteket használ. A kényelem kedvéért ebbe a csoportba foglaljuk azokat is, akik az *a priori* valószínűségeket nem alapvető feltevésként veszik fel, hanem viselkedési posztulátumokból vezetik le őket (lásd a 3.1.4. és 4.2.3. alpontokat).

4.2.1. Mint már rámutattunk (lásd a 3.2.2. alpontot) Knight nem adott formális leírást a felfogása szerint bizonytalan helyzetekről (szemben a kockázatokkal vagy a valószínűségeloszlásokkal), és ennek megfelelően rendezésükre sem adott pontosan körülírt feltevéseket. Valójában az ő bizonytalan helyzetei körülbelül ugyanazokat a hatásokat váltják ki az egyénekből, amit más szerzők a kockázatnak tulajdonítanak. Például a bizonytalanság csökkentésére alkalmazott eszközök sora nagyjából ugyanaz, mint amit Irving Fisher ad meg, egy szigorúan valószínűségi szemléletből kiindulva (lásd Knight [25], VIII. fejezet).

Knight elméletének azonban van egy figyelemre méltó analitikus oldala. Alaptételként állítja, hogy ha valamennyi kockázat mérhető lenne, akkor a kockázattól való idegenkedés semmi profitot nem engedne meg (lásd Knight [25] 46—47. old.). Érvelése az, hogy ebben az esetben a nagy számok törvénye lehetővé tenné az összes kockázat megszüntetését, a biztosítás vagy az események valamely másfajta összekötése révén. Ez az állítás, ha igaz, akkor átütő jelentőségű, mégis eléggé meglepő

módon, amennyire én tudom, egyetlen szerző sem foglalkozik vele, Hicks [21] kivételével, aki tagadja a tétel érvényességét.

Bármennyire nagylelkűek legyünk is, Knight kifejtése nem mondható szigorú bizonyításnak. Állítása természetesen nemcsak az egyének kockázatos helyzetekben való viselkedésétől függ, hanem a gazdasági rendszernek mint egésznek a működési mechanizmusától is, és annak módjától, ahogy a véletlen események, mint amilyen a technológiai bizonytalanság, fellépnek. Knight nem mutatja meg, hogy a bizonytalanság mellett hogyan jelenne meg egy olyan alapvető fogalom, mint az állandó hozadék, pedig nála az ennek megfelelő biztos helyzet tárgyalása kínosan pontos.

C. Palm [40] tanulmányában van némi útmutatás arra, mi történhetne ilyenkor (Fellner [9] a 370—383. oldalon tárgyalja). Palm az automata gépek esetét vizsgálja, amelyek csak működésük leállása esetén igényelnek emberi beavatkozást. A leállás véletlen módon lép fel, és a javítási idő véletlen változó. Palm ezután kiszámítja a gépek működési idejének valószínűségeloszlását adott számú gép és adott számú szerelő esetére. (A feladat feltételei között szerepel: ha valamennyi szerelő elfoglalt, akkor egy időközben meghibásodó gép tétlenül vár addig, míg valamelyik szerelő be nem fejezi elkezdett munkáját.) Bebizonyított, hogy ha mind a gépeket, mind a szerelőket megkétszerezzük, a várható működési idő több mint kétszeresére nő. Ez arra enged következtetni, hogy a Knight állításához legjobban illő körülmények között, ti. független technológiai kockázatok esetén, általános tendencia lenne a növekvő hozadékra, ami viszont összeegyeztethetetlen lenne Knight alapvető feltevésével a tökéletes versenyről.

Knight eredményének valamivel kézenfekvőbb kritikája az az érv, hogy a tények szerint a kockázatok kölcsönösen korreláltak, ezért a nagy számok törvénye itt nem működhet. Már Irving Fisher kifejtette ezt az érvet (lásd a 4.1.2. alpontot), és Hicks is így bírálta ([21], 175, 188. old.). Knight állítását. Hicks megjegyzi azt is, hogy a szerződéses garanciák sohasem szüntetik meg teljesen a kockázatot, hiszen a fizetésképtelenségnek mindig van valamekkora kockázata (lásd: Hicks [21], 178. old.).

Végül meg lehet jegyezni, hogy ha igaz is lenne Knight állítása, az abból levont következtetés akkor sem lenne jogosult. Knight úgy érvel, hogy ez az állítás, összevetve a profitok létezésével, arra mutat, hogy létezniük kell másfajta bizonytalanságoknak. Természetes viszont, hogy a kockázatok összevonása nem érné el a határát, ha túlsúlyban lenne a kockázatkedvelő magatartás[23], és aggregált szinten negatív profitot kapnánk (bár egyes vállalatoknak esetleg pozitív profitjuk lesz).

[23] Tekintsük a következő példát: A és B egyének egymástól független kockázatos helyzettel állnak szemben, úgy hogy mindkettőjük számára a 0 eredmény p valószínűségű, az 1 eredmény $1-p$ valószínűségű. Ha egyesülnek, és az eredményt egyenlően osztják el, mindketten p^2 valószínűséggel fognak 0-át kapni, $2p(1-p)$ valószínűséggel 1/2-et és $(1-p)$ valószínűséggel egyet. Tegyük fel, hogy a várható hasznosság maximalizálásának megfelelő magatartásúak, ebben az esetben az összevonást akkor és *csak akkor* fogják előnyben részesíteni, ha $U\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}[U(0)+U(1)]$, azaz a jövedelem csökkenő határhasznának vagy a kockázattól való idegenkedésnek az esetében.

Mivel Knight befejezésképp ténylegesen negatív aggregált profitról beszél (lásd a 2.1.3. alpontot), azért amellett érvel, hogy kell lennie némi vonzódásnak — az ő fogalmaival — a bizonytalanság vállalására. Nincs magyarázat viszont arra, hogy miért ne használhatta volna Knight a valószínűségeloszlásokhoz fűzött kockázatpreferencia egyszerűbb elméletét, és miért ne nélkülözhette volna a különbségtételt a kétfajta bizonytalanság között.

4.2.2. Neyman és Pearson nem rendelkeztek egyértelmű döntési elvvel, amely a bizonytalanság általuk megadott leírása mellett választana a cselekvések között (lásd a 3.2.3. alpontot). A döntési magatartás Neyman—Pearson-féle tárgyalása tipikus szemléltetéseként tekinthetjük, amikor modelljükben csak két lehetséges hipotézis van, H_1 és H_2, és cselekvésnek tekintünk egy választási szabályt, amelyik minden lehetséges megfigyelésre dönt a két hipotézis között. Egy adott megfigyelés mellett a cselekvés jónak vagy rossznak mondható. Ha H_1 igaz, akkor adott cselekvési szabály mellett van bizonyos valószínűsége annak, hogy a megfigyelés rossz cselekvésre szólít fel. Ugyanígy áll ez H_2 esetére. Neyman és Pearson a következő szabályt javasolják: Rögzítsünk valamely α valószínűséget, és azután azon cselekvések közül, amelyek hibája igaz H_1 esetén α-nál nem nagyobb valószínűségű, válasszunk olyan cselekvést, amely minimalizálja a hibát igaz H_2 mellett.

Ez a szabály abban az értelemben önkényes, hogy általában nincs kritérium α megválasztására, és minden egyes α-ra már lesz a legjobb cselekvés. A közgazdász azonnal észreveszi az analógiát az optimális gazdasági helyzet Perato-féle gyenge definíciójával. Lehmann [29] műve általánosította az említett kritériumot egy a Pareto-féle definícióhoz még közelebb álló formába. Azt mondjuk, hogy egy cselekvés egy másikat dominál, ha az első cselekvés (várható) hozadéka[24] valamennyi lehetséges hipotézis mellett legalább akkora, mint a másodiké, de van legalább egy hipotézis, amely mellett határozottan nagyobb. Ekkor egy A cselekvést *elfogadható*nak nevezünk, ha nincsenek őt dominálo lehetséges cselekvések.

A szabály, hogy a döntéshozónak az elfogadható cselekvésekre kell korlátoznia magát, módfelett ésszerű, de a jóléti közgazdaságtan megfelelő szabályához hasonlóan ritkán vezet határozott döntésekhez a cselekvésekről. Wald ([56], [57] 18., 26—27. old.) a következő szabályt javasolta: tekintsük valamennyi cselekvésre az alternatív hipotézisek mellett lehetséges várható hozadék minimumát, és válasszuk azt a cselekvést, amely maximalizálja a minimális hozadékot.[25] Ez végeredményben azt jelenti, hogy azt a cselekvést kell választani, amelyről a legjobb biztos kijelentés tehető. E szabály értelmezhető úgy, mint ami a bizonytalan helyzetben való viselkedést egy nullaösszegű kétszemélyes játékhoz teszi hasonlóvá, ahol a játékosok az egyén és a természet, az egyén megválasztja a cselekvést, a természet a hipotézist (egyikük

[24] Adott cselekvésre és hipotézisre a hozadék (a következmény) egy ismert eloszlású valószínűségi változó. A Neumann—Morgenstern-tétellel valamennyi ilyen eloszláshoz rendelhető egy számszerű hasznosság (lásd a 4.1.3. alpontot).

[25] Maga Wald inkább a veszteségekről beszél a nyereségek helyett, és így a szabályt a maximális veszteség minimalizálásaként állítja fel. Ezért a kritériumra gyakran *minimax elv*ként hivatkoznak.

sem ismeri az ellenfél „mozgását"), és ezek után az egyén megkapja az e két döntéssel meghatározott várható hozadékot.

Wald elmélete tökéletesen tükrözi azt az elképzelést, kogy a hipotézisekkel kapcsolatban teljes tudatlanság van, és ez igen rokonszenves. Mindamellett a nulla-összegű kétszemélyes játék elméletét arra alapozták, hogy az ellenfélnek érdeke a másik fél nyereségének csökkentése (lásd: Neumann és Morgenstern [37] 98—100., 220. old.). A természetnek nem tulajdoníthatunk ilyen indítékot. Wald elvével kapcsolatban L. J. Savage vetett fel először egy nehézséget és megadta annak egy lehetséges megoldását is.[26] Tegyük fel, hogy két lehetséges cselekvés van, A_1 és A_2, és két lehetséges hipotézis H_1 és H_2. Tételezzük fel továbbá, hogy ha az A_1 cselekvést választanánk, akkor H_1 hipotézis mellett 100, H_2 hipotézis mellett 0 lenne a hasznosság, míg ha az A_2 cselekvést választanánk, mindkét hipotézis mellett 1 lenne a hasznosság. Wald kritériuma az A_2 választása mellett szólna, mégis, mivel nemigen mondható, hogy a természet akarattal a H_2 hipotézist választaná, hogy megfossza az egyént az A_1 — H_1 melletti — nyereségétől, ezért nem fogadható el, hogy a H_2 melletti csekély nyereség kilátása feltétlenül nagyobb súlyú, mint egy nagy nyereség lehetősége H_1 mellett. Különösen azért nem, mert bebizonyítható, hogy a döntést a megfigyelések felhalmozódása nem módosítaná. Savage és tőle függetlenül J. Niehans ([39] 445. old.) úgy érveltek, hogy a statisztikus vagy az üzletember csak azért visel felelősséget, amit a ténylegesen fennálló hipotézis mellett cselekszik. Ezért valamennyi lehetséges hipotézisre a legjobbat kell megtalálnia, amit csak a hipotézis fennállása mellett remélhet, azaz az e hipotézis melletti lehetséges cselekvések maximális hozadékát. Ha az A cselekvést hajtja végre, és kiderül, hogy a H hipotézis igaz, a statisztikust büntetés sújtja (amelynek a nem teljesen szerencsés *megbánás* nevet adták), akkora, amennyi a különbség a H melletti A eset jutalma és a H melletti maximális jövedelem között. Valamennyi lehetséges cselekvésre és hipotézisre ilyen módon számítanak „megbánást", és azután azt feltételezik, hogy az egyén cselekvésével a maximális megbánását minimalizálja.

Waldéhoz hasonlóan Savage elve is azt az elképzelést fejezi ki, hogy az igaz hipotézist illetően teljes tudatlanságban vagyunk, de ugyanakkor úgy látszik, megkerüli a rosszindulatú világegyetem feltevését. Felmerül azonban egy másik nehézség, amelyre Chernoff [5] mutatott rá. Három cselekvés és két hipotézis esetén tételezzük fel a következő táblázatban foglalt jövedelmeket:

Cselekvés	Hipotézis	
	1.	2.
1.	0	10
2.	3	6
3.	6	0

[26] Szóbeli matematikai statisztika előadásain 1948 telén; lásd még *Marschak* [32] 192—195. old., *Savage* [47] 58—62. old.

Az 1. hipotézis mellett a legjobb cselekvés eredménye 6, ezért az 1. hipotézis mellett a különböző cselekvések megbánásai az első oszlop és 6 különbségei, és hasonló a helyzet a 2. hipotézis melletti megbánásokkal. A megbánási mátrix ekkor:

Cselekvés	Hipotézis	
	1.	2.
1.	6	0
2.	3	4
3.	0	10

A maximális megbánások minimalizálásának elvével a 2. cselekvést kellene választani.[27] Tételezzük fel most, hogy a 3. cselekvés többé nem lehetséges. Ekkor egy új megbánási mátrixot kellene kialakítani, mert például az 1. hipotézis melletti legjobb lehetséges cselekvés eredménye most csak 3 lenne.

Cselekvés	Hipotézis	
	1.	2.
1.	3	0
2.	0	4

Most tehát az 1. cselekvést választanák. Másszóval, addig, amíg 1. és 3. egyaránt lehetséges, a 2. cselekvés lenne a legjobb, de ha 3. már nem lehetséges, akkor az 1. cselekvés a 2. fölé kerülne. Ez az eredmény nem egyeztethető össze a racionális magatartással. A nehézség az, hogy Savage minimax-elve nem ad igazi rendezést, annak szokásos közgazdasági értelmében (lásd még: Savage [47] 64. old.), és nem is törekszik arra.

4.2.3. Az elmondottak előtérbe hozzák annak lehetőségét, hogy a Neumann—Pearson-féle leírásból kiindulva axiómákat állítsunk fel a bizonytalanság melletti racionális viselkedésre, azaz axiómákat adjunk meg a jövedelmi függvények rendezésére (lásd a 3.2.2. alpontot). Ramsey [4], Finetti [10] és Savage [46] a cselekvések egy bizonyos osztályából indulnak ki, nevezetesen a fogadásból az események kimeneteleire (lásd például Ramsey [42] 179., 184. old., Finetti [10] 4—11. old.). Így Finetti szerint, ha egy egyén pS pénzösszeget, és nem többet hajlandó fizetni annak jogáért, hogy az E esemény bekövetkezésekor S összeget kapjon, akkor p az E „szubjektív" valószínűsége. Hasonló definíció adható a feltételes valószínűségre. Ez esetben, ha egyszerűen annyit posztulálunk, hogy a felsorolt típusú fogadásoknak nincs olyan rendszere, amely mellett az egyén a ténylegesen észlelt eseménytől füg-

[27] Ez nem áll fenn, ha véletlen cselekvéseket engedünk meg, de egy hasonló ellentmondás akkor is fellép.

getlenül bizonyos a nyerésben, levezethető lesz a valószínűség összes szokásos tétele. E sajátos megfogalmazás azért nem fogadható el, mivel implicit módon feltételezi, hogy p független az S összegtől, amely feltevés ellentmond annak a mindennapi tapasztalatnak, hogy az egyének nem tesznek korlátlanul nagy fogadásokat ugyanazon esély mellett. Ramsey rendszere hasonló, azzal a különbséggel, hogy őnála a pénz helyett a hasznosság a fogadás közvetítő eszköze (lásd a 4.1.3. alpontot). Magának a hasznosságnak a definiálása is bizonyos valószínűségi elemeket igényel, előfeltételezik, hogy létezik egy esemény, amelyre az egyén ugyanúgy fogadna, mint ellene, vagyis egy 1/2 valószínűségű esemény.

Időben közelebb hozzánk Rubin ([43], [44]) és Chernoff ([5], [6]) tett más javaslatot.[28] Kiindulópontjuk a jövedelmi függvények keverékének fogalma, amely hasonló a valószínűségeloszlások keverékéhez a Neumann—Morgenstern elméletben (lásd a 4.1.3. alpontot). Ha x és y két jövedelmi függvény, akkor az $ax+(1-a)y$, $0 \leqq a \leqq 1$, keverék az a jövedelmi függvény, amelyet x-nek a valószínűségű és y-nak $1-a$ valószínűségű választásával kapunk. Ehhez az x-hez és y-hoz tartozó összes lehetséges hipotézis hozadékának keverésével is eljuthatunk, valamennyi adott hipotézisre ez a keverés a már leírt típusú. Ezek után kifejtik, hogy a valószínűségeloszlásokra már megadott Neumann—Morgenstern axiómák ugyanúgy ésszerűek, ha jövedelmi függvényekre alkalmazzuk őket. Azaz feltételezik, hogy 1. a jövedelmi függvények rendezhetők[29]; 2. ha x jobbnak minősül, mint y, és y jobbnak, mint z, akkor létezik x-nek és z-nek y-hoz képest közömbös keveréke; 3. ha x közömbös y-hoz képest, akkor x és egy harmadik alternatíva, z bármely keveréke közömbös y és z ugyanazon keverékéhez képest.[30] Ha hozzátesszük még azt a feltételt, hogy kizárjuk a nem elfogadható jövedelmi függvényeket (lásd a 4.2.2. alpontot), akkor bebizonyítható, hogy a $H_1, \ldots, H_n$ hipotézisekhez hozzárendelhetők a $p_1, \ldots, p_n$ nemnegatív számok, a cselekvések és hipotézisek által meghatározott valószínűségeloszlásokhoz pedig hasznosságok oly módon, hogy az x jövedelmi függvény értékét a $\sum_{i=1}^{n} p_i U(x, H_i)$ hasznossági függvény méri, ahol az $U(x, H_i)$ azon kimenetel Neumann—Morgenstern hasznossága, amelyet az x jövedelmi függvény a H_i hipotézis mellett eredményez. A p_i értékeket megválaszthatjuk úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ legyen, és ekkor természetes dolog ezen értékeket *a priori* valószínűségekként értelmezni. A tétel végeredményben azt mondja ki, hogy ha az egyén racionálisan akar cselekedni, úgy kell eljárnia, mintha ezeknek a valószínűségeknek egy rendszerét tartaná szem előtt.

J. Chernoff Bernoullihoz hasonlóan, kifejtette, hogy a teljes tudatlanság esetében az alternatív hipotéziseket egyenjogúaknak kell tekinteni oly módon, hogy az *a*

[28] Fontos szerepet játszik ebben a fejleményben Savage szóbeli közreműködése.

[29] Rubin megmutatta, hogy ez a feltétel jelentősen gyengíthető.

[30] A harmadik feltevésről bemutatható, hogy megszünteti azt a nehézséget, amelyet Savage tárt fel a Wald-féle minimax-elvben.

priori valószínűségek mindegyike $1/n$ legyen. Ez az érvelés igazolást ad az elegendő ok hiányának elvére (lásd a 3.1.3. alpontot).

Mellékesen meg kell jegyezni, hogy mind a Neumann—Morgenstern-féle hasznossági elmélet, mind az *a priori* valószínűségekre való most tárgyalt kiterjesztése ideális terepe a cáfolatoknak. A hasznosságok és a valószínűségek egyaránt az egyszerű esetekben való döntések alkalmas formalizálásával tárhatók fel, és ezután a bonyolultabb helyzetekben való viselkedés összevethető azzal, amit az elmélet az egyszerű esetekből származó numerikus adatok alapján mond. Hasonló meggondolások érvényesek a minimax-elméletekre.

4.2.4. Shackle elmélete a bizonytalanság viseléséről ([48] II. fejezet) a potenciális meglepetés fogalmára épített leírásából ered (lásd a 3.2.4. alpontot). A kifejtést nagymértékben bonyolítja a szerző ragaszkodása a nyereségek és a veszteségek szigorú megkülönböztetéséhez. Számomra teljesen homályos, milyen jelentése lenne egy általános elméletben a nulla pontnak, hiszen a költségeket rendszerint amúgy is az elszalasztott lehetőségek alapján definiáljuk (opportunity cost). Egy adott cselekvés esetén minden egyes lehetséges nyereséghez egy potenciális meglepetést rendelünk. Az így kialakított lehetséges párokat aszerint rendezzük, hogy mennyire ösztönzik az emberi szándékot, és feltételezzük, hogy a legösztönzőbb összegzi a lehetséges nyereségek teljes hatását a döntésre. Egy kimenetel ösztönző hatásáról feltesszük, hogy a nyereség nagyságának növekedésével nő, a potenciális meglepetés növekedésével csökken. Hasonlóan megkapható a veszteséghez kapcsolt legnagyobb ösztönző hatás is. Ez az ösztönzéspár teljesen meghatározza az adott cselekvés következményeit, az ösztönzéspárok között rendezés áll fenn (ezt nevezik a *szerencsejátékos közömbösségi térképének*), amely meghatározza a cselekvés kiválasztását.[31] Ez az elmélet nem támaszkodik a racionális viselkedésről szóló meggondolásokra, ezeket Shackle kifejezetten tagadja ([49], 74. old.), hanem arra, hogy az emberi elme, állítólag, képtelen együtt tekinteni egymást kölcsönösen kizáró eseményeket.

Ugyanúgy, ahogy a potenciális meglepetés fogalma a statisztikai probléma Neyman—Pearson-féle megfogalmazásának egy általánosítása, a bizonytalanság melletti viselkedés Shackle-féle elmélete Wald minimax-elvét általánosítja. Tegyük fel, hogy 1. csak veszteségek jelentkeznek, vagy másképp, hogy a játékos közömbösségi térképe csak a standardizált középponti veszteségtől függ, és 2. bármely kimenetel potenciális meglepetése vagy 0, vagy a lehetséges maximum. Ekkor Shackle elmélete a maximális veszteség minimalizálásának szabályához vezet.

Shackle józan indítéka szerint a bizonytalanság viselésének elméletét az emberi elme azon szükségletére kell építeni, hogy a kérdést felfoghatóvá egyszerűsítse.

[31] Shackle úgy definiálja a *standardizált középponti nyereség*et, mint azt az eredményt, amely, ha 0 potenciális meglepetés volna hozzárendelve, olyan ösztönző lenne, mint a legösztönzőbb nyereség, és hasonló módon definiálja a *standardizált középponti veszteség*et. E két standardizált középponti eredmény szolgál a szerencsejátékos közömbösségi térképének két koordinátájául. Mindez nyilvánvalóan csak egy módszer arra, hogy a legnagyobb ösztönzéshez számokat rendeljünk, és nincs különösebb jelentősége.

Mindazonáltal az ő sajátos egyszerűsítése teljesen önkényesnek tűnik. Láttuk, hogy a valószínűségi elemek teljes tagadása nem tekinthető sikeresnek (lásd a 3.2.4. alpontot). Ami azt illeti, az a leírás, amelyik *egyedül* a valószínűségeloszlás fogalmaira támaszkodik, legalább olyan valószerűnek tűnik nekünk, mint Shackle hipotézise, amely egyébként nem rendelkezik az egyszerűség erényével sem. (Miért szükséges ösztönzési függvény is meg közömbösségi térkép is ahhoz, hogy leírjuk a bizonytalanság hatását az emberre?)

Valóban, bebizonyítható, hogy az elmélet egy furcsa eredményre vezet. Tegyük fel, hogy egy eseménynek két lehetséges kimenetele van, A és B. Ekkor a potenciális meglepetésre tett feltételekből következik (lásd a 3.2.4. alpontot), hogy egyiküknek, mondjuk A-nak 0 lesz a potenciális meglepetése. Tegyük fel, hogy az 1. cselekvést végrehajtva az egyén mindentől függetlenül egy dollárt kap, míg a 2. cselekvés mellett egy dollárt kap, ha az A következik be, és semmit, ha B. Ekkor mindkét esetben igaz, hogy az egy dollár nyereség potenciális meglepetése 0, valamint, hogy a nulla veszteségnek lesz a legnagyobb potenciális meglepetése, úgyhogy a két cselekvés standardizált középponti eredményei azonosak (ti. a középponti nyereség 1 és a középponti veszteség 0), a két cselekvés egymáshoz képest közömbös. Ugyanakkor a második cselekvés nyilvánvalóan nem elfogadható (lásd a 4.2.2. alpontot).

Ez az eredmény azt is megmutatja, hogy az elmélet valódi, legalább abban az értelemben, hogy cáfolható következményei vannak. Valóban fel lehet állítani egyszerű kísérletek egy sorát, amelyek lehetővé teszik számunkra, hogy tényleges potenciális meglepetésfüggvényt, ösztönzési függvényt, és közömbösségi térképet kapjunk. Röviden felvázolom az eljárást. Bármely két H_1 és H_2 hipotézis mellett legyen A_1 egy cselekvés, amely egy dollárt eredményez, ha H_1 igaz, és nulla dollárt a többi esetben, valamint legyen A_2 egy cselekvés, amely egy dollárt eredményez, ha H_2 igaz, és nullát különben. Ekkor H_1 potenciális meglepetése akkor, és csak akkor kisebb H_2 potenciális meglepetésénél, ha A_1 értékesebb, mint A_2. Mivel a potenciális meglepetés ordinális fogalom, ez a függvény teljesen meghatározott. Nevezetesen, találhatunk egy H hipotézist, amelynek potenciális meglepetése ugyanakkora, mint ellentétéé, ekkor mindkettő potenciális meglepetése 0 lesz. Tekintsünk egy cselekvést, amelynél az egyén a összeget kap, ha H fellép, és b összeget különben. Ekkor a standardizált középponti eredmények a és b, az a és b kombinálásával kapott cselekvéseket rendezve kitölthetjük a játékos közömbösségi térképét. Végül, a potenciális meglepetés bármely adott y fokára és bármely c nyereségre válasszunk egy H_1 hipotézist, amelynek potenciális meglepetése y. Eredményezzen az A_1 cselekvés c összeget, ha H_1 igaz, és nullát más esetben; eredményezzen az A_2 cselekvés d összeget, ha H igaz és nullát különben. Változtassuk a d összeget, míg A_1 és A_2 közömbös nem lesz egymáshoz képest. Ez esetben, mivel a H potenciális meglepetése 0, ezért d az (y, c) párhoz tartozó standardizált középponti eredmény. Így a nyereségekre már definiáltuk az ösztönzési függvényt, a veszteségekre egy hasonló eljárás alkalmazható.

Bár az elmélet ily módon nem üres, valójában nem sok hasznos következtetést hozott magával. A bizonytalanság melletti vagyontartás tárgyalását (lásd Shackle [48]

IV. fejezet) az érvelés elején elkövetett logikai hiba érvénytelenné teszi. Alapjában véve, mivel a potenciális meglepetés elméletében nincs nagy számok törvénye, a befektetések szétterítése nem magyarázható. Az alku folyamatának Shackle-féle tárgyalása (lásd [48] VI. fejezet) abban a jól ismert tételben összegződik, hogy a folyamat akkor meghatározott, ha ismerjük a résztvevők reakciógörbéit, az egyetlen különbség az, hogy a Shackle szerkesztette reakciógörbék tartalmazzák a bizonytalan viselkedést.[32]

4.3. Van egy nézetrendszer, amely szerint a bizonytalan helyzetben való racionális viselkedésről a kérdés természeténél fogva nem lehet elméletet felállítani. Már korán, 1879-ben, Cliffe-Leslie kifejtette, hogy a valóságban nem mehet végbe a profitok kiegyenlítődése a versenyben, mert a vállalatok nem ismerik mások profitját (Hardy idézi [18] 35—37. old.). Irving Fisher szintén kételkedett benne, hogy a bizonytalanság melletti viselkedésre valóban lehetséges lenne kielégítő elmélet (lásd I. Fisher [12], IX., XIV. fejezet], de végeredményben azt tartotta, hogy a biztos helyzetben való gazdasági viselkedés elmélete a valóság jó közelítését nyújtja. Knight és Shackle (lásd a 4.2.1. és 4.2.4. alpontokat) valamelyest hasonló állásponton voltak. Legutóbb Alchian [1] mondta ki, hogy az olyan jól definiált cselekvési kritériumok hiánya, mint ami a biztos helyzetben a profitmaximalizálás, azt jelenti, hogy a bizonytalanság melletti viselkedést természeténél fogva véletlennek kell tekintenünk. Lehetetlenség a kísérlet és tévedés útján optimális viselkedéshez konvergáló folyamat akkor, amikor az alapfeltételek változnak is, meg ismeretlenek is. Mindamellett, mivel a létezésért folyó gazdasági küzdelemben végbemegy egy szelekciós folyamat, lesz valamilyen tendencia az optimális viselkedés irányába.

IRODALOM

[1] *Alchian, A. A.:* Uncertainty, Evolution, and Economic Theory. Journal of Political Economy, 58. évf. 1950. 211—221. old.

[2] *Bayes, T.:* An Essay toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53. évf. 1963. 370—418. old. újabb kiadása megjelent a Facsimiles of Two Papers by Bayes c. kötetben. *W. D. Demig* (Szerk.): Washington D. C.: The Graduate School), Department of Agriculture, 1940.

[3] *Bernoulli, D.:* Specimen theoriae novae de mensura sortis, Commentarii academiae scientiarum imperiales Petropolitanae, 5. köt. 1738. 175—192. old. Németül A. Pringsheim fordításában: Die Grundlage der modernen Werlehre: Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfallen, Leipzig: Duncker and Humblot, 1896.

[4] *Carnap, R.:* Logical Foundations of Probability. Chicago, University of Chicago Press, 1950.

[5] *Chernoff, H.:* Remarks on a Rational Selection of a Decision Function. (soksz.), Cowles Commission Discussion Papers: 326. és 326A szám, 1949. január és 1950. április.

[32] Shackle érdekes elképzelése, hogy ha bekövetkezik egy magas potenciális meglepetésű esemény, akkor ez a bizonytalansági helyzet újraértékelésével jár, de a hatás nem következik be azonnal, hanem csak egy idő elteltével, amely alatt majdnem minden lehetőség alacsony potenciális meglepetési fokot fog kapni (Shackle [48] 73—75. old.). Ez az állítás a többi elmélet nyelvén is megfogalmazható.

[6] *Chernoff:* Remarks on a Rational Selection of a Decision Function. (kivonat), Econometrica, 18. évf. 1950. 183. old.

[7] *Cramér, H:* On the Mathematical Theory of Risk, Försäkringsaktiebolaget Skandias Festskrift, Stockholm, Centralryckeriet, 1930. 7—84. old.

[8] *Domar, E.—Musgrave, R. A.:* Proportional Income Taxation and Risk-Taking, Quarterly Journal of Economics, 58. évf. 1944. 388—422. old.

[9] *Feller, W.:* An Introduction to Probability Theory and its Applications. I. köt., New York, John Wiley and Sons, 1950.

[10] *De. Finetti, B.:* La Prévision: Ses Lis Logiques. Ses Sources Subjectives, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 7. évf. 1937. 1—68. old.

[11] *Fisher, I.:* The Nature of Capital and Income. New York—London, The Macmillan Co., 1906.

[12] *Fisher, I.:* The Theory of Interest. New York, The Macmillan Co., 1930.

[13] *Fisher, R. A.:* On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 222. köt. A rész, 1922. 309—368. old.

[14] *Fréchet, M.:* L'Estimation Statistique des Paramétres. (kivonat), Econometrica, 16. évf. 1948. 60—62. old.

[15] *Friedman, M.:* Lange on Price Flexibility and Employment: A Methodological Critiasm, American Economic Rewiew, 36. évf. 1946. 613—631. old.

[16] *Friedman, M.—Savage, L. J.:* The Utility Analysis of Choices Involving Risk. Journal of Political Economy, 56. évf. 1948. 279—304. old.

[17] *Graaf, J. de V.—Baumol, W. J.:* Three Notes on Expectations in Economics' II., Economica, New Series, 16. évf. 1949. 338—342. old.

[18] *Hardy, C. O.:* Risk and Risk-Bearing. Chicago, University of Chicago Press, 1923.

[19] *Hart, A. G.:* Anticipations, Uncertainty, and Dynamic Planning. New York, Augustus M. Kelley, 1951.

[20] *Hart, A. G.:* Risk, Uncertainty, and the Unprofitability of Compouding Probabilities. Megjelent: Studies in Mathematical Economics and Econometrics c. kötetben. (Szerk.: O. Lange, F. McIntyre és T. O. Yntema), Chicago: University of Chicago Press, 1942. 110—118. old.

[21] *Hicks, J. R.:* The Theory of Uncertainty and Profit. Economica, 11. évf. 1931. 170—189. old.

[22] *Hicks, J. R.:* Application of Mathematical Methods to the Theory of Risk, Econometrica, 2. évf. 1934. 194—195. old.

[23] *Kalecki, M.:* The Principle of Increasing Risk. Economica, New Series, 4. évf. 1937. 440—447. old.

[24] *Keynes, J. M.:* A Treatise on Probability, London, Macmillan and Co., 1921.

[25] *Knight, F. H.:* Risk, Uncertainty, and Profit, New York, Houghton Mifflin and Co., 1921. (újabb kiadása: London, London School of Economics and Political Science, 1946).

[26] *Kolmogorov, A. N.:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik und Ihre Grenzgebiete, 2. köt., 1933, angol fordítása: Foundations of the Theory of Probability, New York, Chelsea Publishing Co., 1950.

[27] *Kries, J.:* Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg, 1886.

[28] *Lange, O.:* Price Flexibility and Employment. Cowles Commission Monograph 8., Bloomington, Ind.: Principia Press, 1944.

[29] *Lehmann, E. L.:* On Families of Admissible Sets, Annals of Mathematical Statistics, 18. évf. 1947. 97—104. old.

[30] *Marschak, J.:* Money and the Theory of Assets. Econometrica, 6. évf. 1938. 311—325. old.

[31] *Marschak, J.:* Von Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics. Journal of Political Economy, 54. évf. 1946. 97—115. old.

[32] *Marschak, J.:* Role of Liquidity under Complete and Incomplete Information. American Economic Review, Papers and Proceedings, 39. évf. 1949. 182—195. old.

[33] *Marschak, J.:* Rational Behavior, Uncertainty Prospects, and Measurable Utility. Econometrica, 18. évf. 1950 111—141. old.

[34] *Marshall, A.:* Principles of Economics, 8. kiadás, New York, The Macmillan Co., 1948.

[35] *Menger, K.:* Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. Zeitschrift für Nationalökonomie, 4. évf., 4. szám, 459—485. old.

[36] *Mises, R.:* On the Foundation of Probability and Statistics. Annals of Mathematical Statistics, 12. évf. 1941. 191—205. old.

[37] *Neumann, J.—Morgenstern, O.:* Theory of Games and Economic Behavior, 2. kiadás, Princeton, Princeton University Press, 1947.

[38] *Neyman, J.—Pearson, E. S.:* The Testing of Statistical Hypotheses in Relation to Probabilities Priori. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 29. évf. 1933. 492—510. old.

[39] *Niehans, J.:* Zur Peisbildung bei ungewissen Erwartungen. Schweizerische Leitschrift für Volkwirtschaft und Statistik, 84. évf. 1948. 433—456. old.

[40] *Palm, C.:* The Distribution of Repairmen in Servicing Automatic Machines, svéd nyelven, Industrietidningen Norden, 75. évf. 1947. 75—80, 90—94, 119—123. old.

[41] *Pigou, A. C.:* The Economics of Welfare, 2. kiadás, London, Macmillan and Co., 1924.

[42] *Ramsey, F. P.:* Truth and Probability. Megjelent a The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays c. kötetben, London, K. Paul, Trench, Troubner and Co., 1931.

[43] *Rubin, H.:* The Existence of Measurable Utility and Psychological Probability. (soksz.), Cowles Commission Discussion Paper: Statistics 331. szám, 1949. július.

[44] *Rubin, H.:* Postulates for the Existence of Measurable Utility and Psychological Probability. (kivonat), Bulletin of the American Mathematical Society, 55. évf. 1949. 1050—1051. old.

[45] *Samuelson, P. A.:* Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1947.

[46] *Savage, L. J.:* The Role of Personal Probability in Statistics, (kivonat), Econometrica, 18. évf. 1950. 183—184. old.

[47] *Savage, L. J.:* The Theory of Statistical Decision. Journal of the American Statistical Association, 46. évf. 1951. 55—67. old.

[48] *Shackle, G. L. S.:* Expectation in Economics. Cambridge, England, Cambridge University Press, 1949.

[49] *Shackle, G. L. S.:* A Non-Additive Measure of Uncertainty. Review of Economic Studies, 17. évf. 1949—50. 70—74. old.

[50] *Törnqvist, L.:* On the Economic Theory of Lottery Gambles. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 28. évf. 1945. 228—246. old.

[51] *Tintner, G.:* The Theory of Choice under Subjective Risk and Uncertainty. Econometrica, 9. évf. 1941. 298—304. old.

[52] *Tintner, G.:* The Pure Theory of Production under Technological Risk and Uncertainty. Econometrica, 9. évf. 1941. 305—312. old.

[53] *Tintner, G.:* A Contribution to the Non-Static Theory of Choice. Quarterly Journal of Economics, 56. évf. 1942. 274—306. old.

[54] *Tintner, G.:* A Contribution to the Non-Static Theory of Production. Megjelent: Studies in Mathematical Economics and Econometrics című kötetben. (Szerk.: O. Lange—F. McIntyre—T. O. Yntema) Chicago, University of Chicago Press, 1942, 92—109. old.

[55] *Tintner, G.:* Foundations of Probability and Statistical Inference. Journal of the Royal Statistical Society. A sorozat, 112. köt., 3. rész, 251—279. old.

[56] *Wald, A.:* Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses. Annals of Mathematical Statistics, 10. évf. 1939. 229—326. old.

[57] *Wald, A.:* Statistical Decision Functions. New York, John Wiley and Sons, 1950.

Információ és gazdasági viselkedés[*1]

A gazdaság tagjai — a vállalatok, a fogyasztók, a beruházók és a kormányzat — választanak. Közös elnevezést használva, úgy fogok hivatkozni rájuk, mint a gazdaság szereplőire (agent), mert legfeltűnőbb jellemzőjük valóban az, hogy cselekszenek. Választanak, és ez azt jelenti, hogy vannak alternatíváik, s amit választottak, az nem volt elkerülhetetlen, hanem valóban csak egy volt a lehetőségek sorából. A fogyasztók rendelkezésére álló lehetőségeket a jövedelmük és a különböző használati értékű termékekért fizetendő árak határozzák meg. A vállalatok rendelkezésére állhat a ráfordítások és a kibocsátások minden — jelenben és jövőben — technológiailag megvalósítható kombinációja. Ez a megközelítés megengedi a ráfordítások és kibocsátások közti időbeli késések figyelembevételét, valamint olyan tartós termelőeszközök létezését, amelyek terméke hosszabb időszak alatt jön létre. A beruházók rendelkezésére álló lehetőségek lényegében a különböző jelenlegi értékpapírok jövőbeli hozadékai. Ha a beruházó azt tervezi, hogy beruházásainak hozamát a jövőben fogyasztásra vagy újraberuházásra használja fel, akkor lehetőségei valójában csak a jövőbeli fogyasztási cikkeknek, illetve beruházási lehetőségeknek és azoknak az áraknak a kategóriáiban értelmezhető, amelyeken a szabad piacon e javak elkelnek.

A gazdaság egyes szereplői számára nyitva álló lehetőségek leírása során ismételten hivatkoztam a jövőre. A jövőnek minden bizonnyal a legszembetűnőbb jellegzetessége az, hogy nem ismerjük tökéletesen. Kétségtelen, hogy prognózisaink — akár a jövőbeli árakra, eladásokra, akár a termelési vagy fogyasztási célra rendelkezésünkre álló termékek minőségére vonatkoznak — nem bizonyossággal ismertek, és megbízhatóságuk a jövő időhorizontjának kiterjesztésével csökken. Ezért a döntési folyamat lényegéhez tartozik — akár a gazdasági, akár bármely más szférában végbe-

* Information and Economic Behavior. Federation of Swedish Industries, Stockholm 1973.

[1] Ez a tanulmány akkor készült, amikor a szerző John Simon Guggenheim Memorial Fellow ösztöndíjasa volt, a Harvard Project on Efficiency in Decision Making támogatásával, együtt a United States Office of Naval Research-sel, az NR 047—004 számú kutatási terv keretében kötött N 00014—67—A—0298—0019 számú szerződés alapján. Ez az előadás a Federation of Swedish Industries-nál hangzott el, 1973. május 30-án.

menő döntésről van szó —, hogy a rendelkezésre álló lehetőségek és döntéseinek következményei nem teljesen ismertek számunkra.

Fontos azonban megjegyezni, hogy a bizonytalanság sok olyan döntésnek is sajátja, amelyek nem nyúlnak a jövőbe, vagy legfeljebb csak a közvetlen közeli jövőbe. Például, ha vásárolni szeretnénk egy árut — különösen ha olyat, amelyet mostanában nem vettünk —, lehetséges, hogy nem tudjuk az árát. Természetesen megtudhatjuk, de csak idő és más szűkös források felhasználása árán. Általában befejezzük a vásárlást anélkül, hogy az összes lehetséges helyettesítő árát ismernénk mivel túlságosan költséges lenne mindent megtudakolni.

Az árak bizonytalanságánál is jelentősebb talán a megvásárlandó áru természetének, minőségének bizonytalansága. Ez a legkézenfekvőbb és legszembetűnőbb a munka szerződtetésénél, minden szinten általában, de leginkább talán a legmagasabb hivatali, vállalatvezetői és tudományos szinten. Bármelyik egyetemi professzor, aki részt vett kinevezési vitákban tudja, hogy milyen nehéz a fiatal oktatók kutatási és tanítási képességeit értékelni, és ugyanígy van ez a munka legtöbb formájának szerződtetésekor is. Valóban ugyanez a bizonytalanság merül fel minden előléptetési lehetőség esetében, mert a régebbi tapasztalatok csaknem soha nem igazítanak el biztosan az új körülmények közti, jövőbeli teljesítményt illetően. Vagy tekintsünk bonyolult szerkezetű tartós fogyasztási cikkeket, például autókat. A vevő — ha egyáltalán képes — csak számottevő tapasztalat birtokában képes igazi értékelésre. Egy autó vagy egy termelési eszköz teljesítménye, tartóssága, javítási szükséglete kétségtelenül bizonytalan. Az egyes darabok közti véletlen jellegű eltérés miatt még a múltbeli tapasztalatok alapján sem lehet megbízhatóan általánosítani az új esetekre; annak ellenére, hogy ezek a tapasztalatok csökkentik a bizonytalanságot.

Talán elég megemlíteni a részvények piacát, hogy lássunk egy olyan területet, ahol döntő a bizonytalansággal kapcsolatos megfontolások szerepe.

Itt azonban egy megjegyzést kell tennünk. A minőségi bizonytalanság gazdasági hatása sok esetben csak az érintett folyamatok bizonyos fokú visszafordíthatatlansága vagy időbeli késése miatt jelentős. Ha egy újonnan alkalmazott dolgozó kvalifikáltsága szerződtetése után azonnal, jelentős költségek nélkül is megmutatkozna, és ha maga a szerződtetés nem járna költségekkel, akkor a munka minőségének bizonytalansága csak csekély gazdasági jelentőséggel bírna; a dolgozót — ha teljesítménye nem kielégítő — a munkaadó csekély vesztesége mellett el lehetne bocsátani. Hasonlóan, egy komplex gép vásárlása azért kockázatos, mert a használt gépek árai számottevően alacsonyabbak, mint az új gépeké, s ezért, ha az újonnan vásárolt gép nem bizonyul kielégítőnek, csak veszteséggel lehet újra eladni. Itt kellene tisztázni, hogy ezek a visszafordíthatatlan folyamatok sok esetben maguk is a bizonytalanság hatásának közvetett eredményei; de ennek magyarázatát egy kicsit későbbre kell hagynom.

A bizonytalanság általános hatása a gazdasági döntéshozásra egy ideje intenzív kutatás tárgya; a gazdaság átlagos szereplőjének idegenkedését a kockázatvállalástól és ennek következményeit az értékpapír-választás, a különböző fajta tartós termelői

javak közti választás, a fogyasztás és megtakarítás közti választás esetében és a vállalatok tőkeszerkezetét elméletileg igen terjedelmesen elemezték, és van néhány jelentős empirikus alkalmazás is.

Nem a bizonytalanság melletti viselkedés általános elméletéről akarok most beszélni, hanem a kérdés egy sajátos oldaláról, amit csak az utóbbi időben kezdtek el elemezni. Ha bizonytalanság van, akkor — *információ* szerzés révén — általában van lehetőség ennek csökkentésére. Az információ valójában a bizonytalanságnak, úgymond csupán a negatív mértéke. Hadd mondjam meg azonnal: nem fogom az információ kvantitatív mértékét javasolni. Nevezetesen azért, mert az információ jól ismert Shannon-féle mértéke — amely igazán hasznos volt a távközlési technikában — általában nem felel meg gazdasági elemzés céljára, mert nem ad súlyt az információ értékének. Ha egy nagy termelő előzetesen egyenlően valószínűnek tekinti azt, hogy az árak fel- vagy lemennek, akkor annak megismerése, hogy melyik tendencia igaz, a shannoni értelemben nem hordoz több információt, mint egy pénzdarab feldobásának megfigyelése. A Shannon-féle mérték azonban hasznos lehet mint az információszerzés költségének mértéke.

Inkább úgy gondolkozom az információról, mint az áruk egy gazdaságilag érdekes osztályának általános leíró fogalmáról, amelyet a közgazdász teoretikusok mind ez ideig nem nagyon méltattak figyelemre. A gazdasági ciklusok hagyományos irodalmában, amit úgy tűnik ma már felváltott a post-keynesiánus elemzés, az információváltozás hatásainak szórványos tárgyalásakor általában „várakozásokról" beszélnek. A gyakorlati gazdasági előrejelzők természetesen mindig tisztában voltak a várakozásokra vonatkozó információk fontosságával, s ahogy az erre vonatkozó adatok minősége javult, egyre inkább megbíztak bennük. Albert Hartnak [12] a tőkejavak választásában létező rugalmasságról és a tőkeszerkezet más vonásairól kb. harminc évvel ezelőtt írott úttörő munkája azon a felismerésen alapult, hogy a vállalat az idők során új információkat szerez. Az elméleti statisztikusok és a távközlési mérnökök mentek legmesszebb az információ értékének hangsúlyozásában. Valóban, a statisztika annak a tudománya, hogyan lehet egy adathalmazból információt nyerni. Pontosabban a kísérletek megtervezésének elméletében R. A. Fisher, Jerzy Neyman, Abraham Wald és követőik hosszú sora küszködött a szűkös források olyan elosztásának problémájával, amely biztosítja a megszerzett információ maximumát.

Úgy tűnik, a statisztikusok információmodellje alkalmas a mi céljainkra. A gazdaság szereplői bármely pillanatban rendelkeznek a számukra érdekes változók (mint például a jelenlegi és jövőbeli árak vagy a termékek minősége) egy valószínűségi eloszlásával. Nevezzük ezeket *gazdasági változóknak*. Néhány más változót is megfigyelnek; ezeket nevezzük *jelzéseknek*. Ha a jelzések adottak, a gazdasági változók eloszlása nem egyezik meg a feltétel nélküli eloszlásukkal. A hozott döntések természetesen a gazdasági változók eloszlásától függnek; de ha ezt az eloszlást a kapott jelzések sorra módosítják, akkor a gazdasági viselkedés nemcsak azoktól a változóktól függ, amelyeket általában lényegesnek tekintünk (elsősorban az áraktól), hanem olyan jelzésektől is, amelyeknek lehet hogy csak kis gazdasági jelentő-

ségük van önmagukban, de amelyek segítségével csökkenthető más — még nem megfigyelt — változók előrebecslésének bizonytalansága.

Vegyünk néhány példát a gazdasági változókat érintő jelzésekre. A jövőbeli árak valószínűségi eloszlásának kialakítása során nemcsak a folyó árakat használhatjuk fel információként, hanem a múltbeli árakat is; az árak időbeli alakulásában is információ rejlik. Ez az érvelés ismert, és régen felhasználják — az osztott késleltetések árak alakulásában játszott szerepének igazolása során — a kínálat vagy a beruházások magyarázatában. (Ennek kitűnő áttekintését lásd Nerlove [23]. Bár a közgazdaságtan egyik sarkalatos pontja, hogy „ami elmúlt, örökre elmúlt", és a múltbeli árak semmiféle hatással nincsenek a jövőbeli akciókra, mégis világos, hogy információt közölhetnek a jövőről, s ezért befolyásolhatják a jelenbeli akciókat.

A jelzések azonban lehetnek még kevésbé közvetlenek. A múltbeli mennyiségi mozgások — sok esetben — jelzéseket adhatnak, az árak jövőbeli eloszlásához. Ha egy termék értékesítése csökkent, akkor ezt könnyen úgy tekinthetjük, mint egy jelzést arról, hogy az ára nem fog emelkedni, vagy pontosabban, hogy az áremelkedés valószínűsége kisebb, mint akkor lett volna, ha az értékesítés növekszik. A vállalati elemzők számára ismerős, de a formális közgazdasági elmélet számára, szokatlan példa a kormány gazdaságpolitikájának jelző szerepe. Egy recesszió idején végrehajtott adócsökkentésnek nemcsak közvetlenül, a felszabadított vásárlóerő szempontjából lehet hatása, de egyben egy olyan jelzés is, amely az értékesítés növekedését valószínűbbé teszi, és ezzel ösztönzi a beruházásokat.

Az információ fogalmának és időben lehetséges változásának felismerése tehát legalábbis az általános egyensúlyelmélet mai formájának jelentős módosítását teszi szükségessé. Az egyensúlyelmélet jelenlegi formája az elmúlt száz évben alakult ki, s az utóbbi harminc év során Hicks, Samuelson, Debreu és mások munkáiban bizonyítóereje és mélysége rendkívüli színvonalat ért el. Az egyének gazdasági viselkedését — ebben az elméletben — elsősorban az árak irányítják. A társadalom mint egész szempontjából, az árak olyan jelzések, amelyek a szűkösségekről szóló információkat közvetítik a társadalom tagjai között. Az árak erőforrás-elosztásban játszott információs szerepét különösen hangsúlyozták a szocializmus elméletével foglalkozó közgazdászok kezdve Barone-tól Langé-ig és Lernerig; e témában a legáltalánosabb és legkifinomultabb elemzés Hurwiczé [14]. A bizonytalanság létezése önmagában nem szünteti meg szükségképpen az árak elsődleges szerepét az erőforrás elosztásban, abban az esetben sem, ha nemcsak árupiacok léteznek, hanem a különböző lehetséges következmények elleni biztosítás piacai is. Az árakhoz kapcsolódó alapszerződés helyébe egyre inkább bizonyos körülmények bekövetkezésétől függő ún. esetleges áruk szállítási szerződése lép.[2] Létezik néhány ilyen piac, például a biztosítási és — módosult formában — a részvénypiac. Az, hogy miért nem létezik több ilyen, rész-

[2] Az esetleges piacok elméletéhez (theory of contingent markets) lásd Arrow ([3], 4. fejezet) és Debreu (1951. VII. fejezet).

ben a gazdasági információk létezéséből és eloszlásából fakad, ahogy ezt a későbbiek során ki fogjuk fejteni.

Az információk és a jelzések létezéséből, valamint a jövőbeli jelzésekre vonatkozó várakozásokból mindenesetre az következik, hogy — amint már láttuk — a jelenbeli gazdasági viselkedést részben nem árjellegű változók irányítják. Ez a megállapítás megnyitja az utat ahhoz, hogy megmagyarázzuk, milyen fontosak a mennyiségi változók a keynesi rendszerben.[3] Ez bizonyos fokig megfelel Kornai János legújabb [16], az általános egyensúlyelmélet ellen irányuló kritikájának, amely szerint ez, bármely — akár kapitalista, akár szocialista — decentralizált gazdaságban a mennyiségekkel összehasonlítva eltúlozza az árak szerepét a vállalatok magatartásában. Hozzá kell tennem, hogy távolról sem tekintem elhanyagolhatónak az árak elosztási funkcióját; a beruházási hitelek bizonyítható hatása, a vámok és közvetett adók befolyása az eszközök áramlására nem engedik meg ezt a következtetést.

Eddig a bizonytalanságot csökkentő információk létezésének egyik következményét, a nem árjellegű jelzések gazdasági jelentőségét emeltem ki. Van azonban még két további olyan következmény, amelyek, úgy gondolom, még alapvetőbb jelentőségűek a gazdasági elmélet átalakításában: 1. az információknak, illetve a jelzéseknek gazdasági értékük van, s ezért még bizonyos költségek árán is érdemes megszerezni és továbbítani őket; 2. a különböző egyének különböző információkkal rendelkeznek. A tanulmány hátralevő részében meg fogom mutatni: lehetséges, hogy e két elég egyszerű megfigyelésnek együttesen, jó néhány — egy gazdasági rendszer működését befolyásoló — következménye van.

Hangsúlyoznom kell a „lehetséges" szót. Ez egy olyan beszámoló, amely többnyire az utóbbi tíz év kutatási irányzatairól szól. Néhány elméleti eredmény is született ez idő alatt; nagyon kevés empirikus elemzésre is tettek kísérletet. A kezdeményező Jacob Marschak [19] és George Stigler [29] volt, őket sok szerző követte, talán érdemes kiemelni Armen Alchian [2], Roy Radner [25], Jack Hirschleifer [13], Michael Rotschild [27], Michael Spence [28] és néhány saját eredményemet ([3], 5—10. és 12. fejezet; [4], [6]). Ezek a munkák nem alkotnak egy összefüggő irányzatot. Különböző szempontok alapján, a kérdés különböző oldalaival foglalkoznak, és különböző terminológiát használnak. Elvileg érdekes megfigyelni, hogy mindnyájan a sokat bírált neoklasszikus hagyományból indulnak ki, bár minden bizonnyal annak már továbbfejlesztett változatát képviselik; azaz valamiféle egyéni előnykeresés fogalmából indulnak ki egy olyan gazdaságban, ahol valamennyi szereplő piaci ereje csekély, és feltételezik, hogy az elért egyensúlyi elosztás olyan, hogy nem hiúsítja meg a várakozásokat. Ebben az összefüggésben az egyensúly általános definícióját Hahn adja ([11], elsősorban a 18—20. old.). A „várakozások" inkább valószínűségi eloszlások, mint diszkrét pontok, azaz az egyének mindent, amit csak lehet meg akarnak tudni, ha van erre lehetőségük.

Az információ gazdasági értéke önmagában nem nagy rejtély. Könnyű bizonyí-

[3] Lásd elsősorban Leijonhufvud interpretációját [17].

tani, hogy valaki — akár termelő, akár fogyasztó — mindig jobb helyzetbe kerülhet, ha döntését egy jelzésre alapozza, feltéve, hogy a jelzés és a gazdasági változók eloszlása nem független. Ennek a megjegyzésnek azonban következményei vannak a gazdasági döntéseket illetően; a gazdaság szereplője kész az információért, a jelzésért fizetni.

Vegyük észre, hogy a gazdaság szereplői számára a hozzáférhető jelzések nem adottak, hanem meg kell szerezniük. Hozzátéve a termeléshez és a fogyasztáshoz az információszerzést, a lehetséges döntések tere kibővül. A kutatómérnököt elképzelhetjük úgy, mint aki a természetből préseli ki a jelzéseket, a bányászhoz hasonlóan, aki a földből nyeri az ásványokat; a kutatás így a termelés egy formája. A gazdaság többi szereplőjének — különösen a dolgozóknak és a fogyasztóknak — a magatartásáról vagy a termékek jövőbeli, illetve jelenlegi áráról és minőségéről szóló információk sokkal nyilvánvalóbb példái az olyan információnak, amelynek megszerzése egyaránt lehetséges és kívánatos.

Világos, hogy az információgyűjtéssel vállalatok kezdenek el foglalkozni. Eszközöket fordítanak technikára és piackutatásra. Másfelől, jelentős és nagymértékű információcsere bonyolódik a piacon. (Újságok, üzleti tanácsadás, és a piac némiképp módosított értelmében az egész oktatás — röviden a tudás termelésének és elosztásának egész világa; mindaz amit Fritz Machlup [18] oly gondosan megmért.) Így tehát az információ nem csupán kívánatos és megszerzendő jószág, de bizonyos fokig ugyanolyan áru, mint a többi, amelyeknek piacát tanulmányozzuk.

Az információ azonban csak korlátozott mértékben lehet áru. Ebben az esetben ugyanis nem érvényes az a feltételezés, hogy a szabad piac az erőforrások hatékony elosztásához vezet. Ha más nem is, de van az információnak legalább két, lényeges jellemzője, amely megakadályozza, hogy teljes mértékben azonosítsuk az elvont, általános egyensúlyi modelljeinkben szereplő termékek valamelyikével: 1. definíció szerint oszthatatlan felhasználása során, és 2. nagyon nehezen kisajátítható. Ami az első pontot illeti, például egy gyártási eljárásról szóló információ nem veszi tekintetbe a termelés méreteit. Minthogy az információ költsége csak magától az információtól és nem annak felhasználásától függ, egy nagytermelőnek kifizetődőbb jobb információt szerezni, mint egy kistermelőnek. Tehát az információ a gazdaságban növekvő hozadékot hoz létre, s ezért a jól ismert elveknek megfelelően a versenygazdaság viszonyaitól való eltérést idéz elő.

Az információ azért kisajátíthatatlan, mert egy egyén sosem vesztheti el azáltal, hogy átadja. A kutatás és fejlesztés gazdaságtanával kapcsolatban gyakran megjegyzik, hogy a kutatás során nagy költséggel szerzett információt sokkal olcsóbban lehet átadni. Ha az információt már egy vevőnek átadták — s ennek következtében ő csak nagyon olcsón adhatja tovább —, a piaci ár jóval a termelési költség alatt lesz. Ha azonban az átadás költségei magasak — s mivel továbbra is igaz, hogy az információ nem kisajátítható —, az eladó nem tudja az információ társadalmi értékét realizálni. Az információ különböző fajtáival kapcsolatban mindkét eset előfordul a gyakorlatban. A jóléti gazdaságtan jól ismert elvei szerint egy termék kisajátítha-

tatlansága azt jelenti, hogy termelése messze nem lesz optimális. A termelés az optimális szint alatt lehet, ami a fennálló tulajdoni rendszeren kívüli, költséges védőintézkedésekhez is vezethet.

Így tehát klasszikussá vált az a tétel, amely szerint egy versenygazdaságban a kutatásba és fejlesztésbe túl keveset fognak beruházni, mivel a megszerzett információ általános tudássá válik, és nem sajátíthatja ki az a vállalat, amelyik a kutatást finanszírozta. (lásd például Nelson [22] és Arrow [3], 6. fejezet); némiképp kritikus álláspontot képvisel Demsetz [10]. Hirschleifer [13] azonban felhívta a figyelmet arra, hogy amennyiben lehetséges a titoktartás, akkor előfordulhat, hogy túlberuházás lesz az információgyűjtésbe; minden vállalat megszerezheti titokban ugyanazt az — akár a természetről, akár az egymásról szóló — információt; igaz ugyan, hogy a társadalom forrásait kevésbé emésztené fel, ha az információkat egyszer összegyűjtenék és mindenkinek terjesztenék.

Hogy kézzelfoghatóbbá tegyem a kérdést, hadd mondjak egy olyan példát, amelyben az információ társadalmilag haszontalan, de az egyének számára értékes. Képzeljünk el egy gazdaságot, amely különböző fajta élelmiszerek termelőiből áll. Az időjárás bizonytalan, és az élelmiszerek bizonyos fajtáinak kínálata bizonyos típusú időjárások esetén nagyobb, mint máskor. Kölcsönösen előnyös biztosítási szerződésekre van lehetőség. Azok, akik éppen viszonylag jobb helyzetben vannak, fizethetnek a többieknek, annak fejében, hogy ezek kötelezettséget vállalnak, hogy viszonozzák ezt, azokban az időjárási helyzetekben, amikor az első csoport viszonylag rosszabb helyzetben van. Tételezzük most fel, hogy — bár némi költség árán — lehetőség adódik az időjárás pontos előrejelzésére. Ha adott a biztosítási piac, világos, hogy bármely egyénnek kifizetődő ezt az információt megvásárolni és titokban tartani. Így nagy nyereségre tehet szert, amennyiben arra az időjárásra tesz, amelyik valóban be fog következni. De az adott feltevések mellett nincs társadalmi haszon. Amit megtermeltek, azt bármely esetben meg fogják termelni. Ha azok, akik megkapják az időjárási információt kevesen vannak a piac méreteihez képest, akkor a kockázatmegosztó szerződések sem társadalmi hasznot, sem társadalmi kárt nem okoznak. De ha elég sok egyén vásárolja meg az információt, akkor a kockázatkereskedelem piaca összeomlik, mert a verseny azok javára változtatja meg az esélyeket, akik információt kaptak. Ha az információ elég pontos, akkor csekély lehetőséget hagy a kedvezőtlen kockázat elleni biztosítás számára. Ebből kettős társadalmi veszteség következik: egyrészt az információszerzésre szükségtelenül felhasznált források következtében, másrészt a kockázatmegosztás piacának összeomlásából adódóan.

Ez a példa szélsőséges, mert kizárja, hogy a termelésben bármilyen haszon elérhető. Általában azt tételezzük fel, hogy a jövőbeli időjárás ismerete megengedi a források újraelosztását azokba a tevékenységekbe, amelyek az előrejelzett időjárás bekövetkezése esetén relatíve termelékenyebbek lennének. Ebben az esetben a jelzésnek pozitív hatása van a jólétre. Ez azonban nem csorbítja azt az alapvető véleményünket, hogy nagyon valószínű, hogy az információszerzésbe túl sokat fognak beruházni,

s ennek az egyén számára az az értéke, hogy mások rovására tesz szert haszonra. Az értékpapírpiacok és a magán információgyűjtés kiterjedt apparátusa jól szemlélteti ezt az álláspontot. Feltételezhető továbbá, hogy maga az információszerzés teszi az értékpapír-piacot a kockázatmegoszlás kevésbé értékes eszközévé.

Ha az információ eloszlása egyenlőtlen, akkor nemcsak az információszerzésre létezik ösztönzés, hanem jelzések kibocsátására is. Ha valami olyat tudok a termékemről, ami azt mások számára vonzóbbá teszi, vagy ha az általam kínált (alacsony) ár nem általánosan ismert, akkor szívesen áldozok arra, hogy közöljem ezt az információt a külvilággal. A hirdetés a jelzések kibocsátásának kézenfekvő, de nem egyetlen példája. Itt el szeretnénk vonatkoztatni a félrevezető jelzések kibocsátásától, a megtévesztéstől, mert hosszú távú statisztikai egyensúly esetén azoknak, akik a jelzéseket kapják, elég tapasztalatuk lesz ahhoz, hogy ismerjék a jelzésektől függő gazdasági változók (árak és minőség) statisztikai eloszlását. Ennek ellenére nehéz meghatározni azt a folyamatot, amelynek során a jelzést mint olyat, felismerik, valamint azt, hogy hogyan tanulja meg a jelzést kapó a jelzések osztályozását. Úgy tűnik, hogy a jelzések értelmezéséhez sok esetben legalábbis közösségi akció szükséges. Tételezzük fel például, hogy egy vállalat egy bizonyos rendszer szerint jelölte meg termékeinek különböző minőségeit. Lehetséges, hogy ennek a jelzésrendszernek csekély lesz a hatása egy olyan piacon, ahol sokan versenyeznek, mert a fogyasztók úgy találják, nem érdemes szellemi erőforrásaikat a jelzőrendszer megtanulására fordítani. Egy egész iparág, közös megegyezés alapján alkalmazott minőségi osztályozó rendszerét esetleg érdemes lenne megtanulni. Könnyebb lenne a jelzéseket megfigyelni és azokat a tényleges helyzethez viszonyítani.

Ezt az érvelést Kaysen ([15] 294—295. old.) használta, az acél- és más iparágakban akkoriban használt „alappont" árképzési rendszernek a (basing-point system) magyarázatához. Nem könnyű e rendszer tradicionális gazdasági magyarázatát megadni, s még nehezebb megmagyarázni az acéltermelőknek azt az egyezségét, amely szerint a különböző minőségű acélfajták árkülönbözetét rögzítették. De ha úgy tekintjük az acélipart, mint egy oligopóliumot, amelynek azonban meg van tiltva a nyílt összejátszás, a kölcsönösen kielégítő egyensúly elérése céljából nagyon fontossá válik, hogy minden vállalat megfigyelhesse a többi árait. Ha nem így történik, minden vállalatnak lehetősége lesz arra, hogy megtorlás nélkül csökkentse árait. Ha minden szállítási pontra és minőségre szabadon változtathatók az árak, akkor a vállalalatok — egymás ármagatartására vonatkozó — megfigyelőképessége nagyon korlátozott a lehetséges mozgástérhez képest. Ha azonban az egyes helyekhez és minőségekhez tartozó relatív árak rögzítettek, akkor minden vállalat magatartása egyetlen mutatóban összegződik, és lehetővé válik a kölcsönös megfigyelés.

Az oktatási rendszer — részben véletlenül — olyan iparággá vált, amely az egyéneknek ad el a világba kibocsátható jelzéseket. Elsődleges célja a tudás megszerzésének biztosítása. E feladat sikerességének belső mérése során azonban automatikusan jelzéseket bocsát ki az oktatásban megmutatkozott tehetségről. Ha valóban az a helyzet, vagy legalábbis azt hiszik, hogy a termelésben mutatott tehetség összefügg

az oktatás befogadásában mutatott tehetséggel, akkor az oktatási rendszer jelzéseket ad a termelőképességről. Már érveltem amellett, hogy a munkaadók számára költséges a munka minőségének megfigyelése. Kifizetődő tehát az olyan jelzések felhasználása, amelyek számukra ingyenesek. Ez viszont arra ösztönzi a diákot, hogy saját szándékainál és társadalmilag kívánatos szintnél tovább folytassa tanulmányait.

Az oktatás jelző szerepének jóléti elemzése hasonló az előző példánkban szereplő, időjárási információk iránt megnyilvánuló magánkereslethez. Lehetséges például, hogy az oktatási rendszer felismeri azokat az egyéneket, akik általában tehetségesebbek. Akár felismerik a tehetséget, akár nem, termelékenységük ugyanaz maradhat. Ekkor — akárcsak abban az egyszerű esetben, amikor az időjárási információnak nincs termelő értéke — a rostálás a jövedelem egyének közti újraelosztását eredményezné, de nem növelné az összes termelést. Azok a források, amelyeket a fogyasztók igényén felül fordítanak az oktatásra, társadalmilag egyszerűen elpazarolt források; továbbá, ha valakiben bármiféle idegenkedés létezik a saját képességeihez kapcsolódó kockázattal szemben, akkor a rostálás összességében csökkenti a jólétet. Ha azonban az egyének eltérő mértékű előnyökhöz jutnak a különböző gazdasági pozíciókban, akkor az oktatási rendszer működhet úgy, mint egy olyan szelekciós rendszer, amely növeli az összterméket. Mellesleg ez a szelekciós folyamat a piac mindkét oldalán működik; nemcsak a munkaadók tudnak többet a potenciális dolgozókról, de ez utóbbiak is többet tudhatnak saját képességeikről. Jegyezzük meg azonban, hogy a rostálás társadalmi hatékonyságának kapcsolatban kell lenni a komparatív — nem az abszolút — előnyök meghatározásával. Minthogy a képzettség megszerzése elkerülhetetlenül jelzi mind az előbbit, mind az utóbbit, csaknem biztos, hogy az oktatás iránt társadalmi túlkereslet lép fel, ha olyan áron kínálják, amely megfelel a jövőbeli keresetébe beruházó diák hitelkedvezményeinek.

Az előzőekben láttuk, hogy az információ egyének közötti differenciálódása és megszerzésének költségei együttesen, jelzések kibocsátásához vezethetnek. De ahogy azt már felvetettük, semmi esetre nem egyszerű feladat a jelzések olyan új típusainak létrehozása, amelyek érthetőek, és amelyekben hinni lehet. Az oktatási rendszer fő funkciója mellett, melléktermékként, tehetségre vonatkozó jelzéseket ad; bár nem erre a célra fejlesztették ki. Általában sokkal nehezebb lenne *újonnan* létrehozni egy megbízható rostálási rendszert.

Hadd térjek át az információk differenciáltságának és az információszerzés költségeinek két másik lehetséges következményére 1. az információfeldolgozás hatékonyságát emelő alkalmazkodás léphet fel; 2. a piacok összeomolhatnak, vagy az általában feltételezettől eltérő módon teljesíthetik feladataikat.

Fordítsuk figyelmünket az első pontra. Hogyan válhat például egy vállalat hatékonyabbá az információszerzés terén? Az információszerzés költségének sok eleme van, de a legalapvetőbb minden bizonnyal az egyén információfeldolgozó képességének korlátozottsága. Nem számít mennyit fejlődött az információfeldolgozás technológiája, az emberi agy és érzékszervek jelzéseket felfogó képessége állandó korlátot jelent. Világos, hogy egy az információráfordítást növelő stratégiának növelnie kell

az egyéni információgyűjtők számát. Egy vállalatnál vagy más szervezetben sok, szorosan egymáshoz kapcsolt egyénnek kell működnie, akik mindnyájan különböző megfigyeléseket végeznek a világról. (Nincs értéke annak, ha ugyanazokat a jelzéseket figyelik meg, feltéve, hogy a megfigyelések hibamentesek.) Valóban, a piaci rendszer egészét gyakran tekintik az erőforrás-elosztás ideális szervezetének; a tipikus érv a központi parancson alapuló elosztási rendszerrel szembeni felsőbbrendűsége mellett az, hogy a sok résztvevő miatt nagyobb az információfelvétel.

A megfigyelők megsokszorzódása azonban a koordináció új problémáját hozza létre. Az egyes információs tételek értékben tipikusan egymást kiegészítőek, és a legjobb felhasználás érdekében valamilyen módon össze kell gyűjteni őket. Hírközlési csatornákra van szükség, s ezek költségesek. Világos, hogy ha minden megkapott jelzést valamennyi megfigyelőnek továbbítania kell, akkor az információforgalom teljes nagysága nagyobb lesz, mintha nem lenne egy ilyen szervezet. Csak akkor keletkezik megtakarítás, ha a szervezeten belül továbbított jelzések, a kapott információk összefoglalásai. A statisztikai elégségesség elmélete felveti a megtakarítás egy példáját; bizonyos összefüggésekben egy sok megfigyelésen alapuló mintából nyerhető valamennyi információt két mutatószámban lehet összesíteni és továbbadni, egy statisztikai mutatószámban, és egy, a megbízhatóságára vonatkozó mutatóban. Így a továbbítás költségei sokkal alacsonyabbak, mint a megszerzésé, és lehetséges, hogy a megfigyelők egyesítése egyetlen szervezetben nettó megtakarítás jelent. (A szervezetek információs szerkezetének tervezéséről néhány vonatkozásában lásd Radner [25]).

A hírközlési csatornákkal összekötött, sok megfigyelőből álló rendszer létrehozása azonban, hosszú távon a megmerevedés veszélyével jár. A hírközlési rendszer kezdeti beruházási költségei visszavonhatatlanok. Nevezetesen, egy hírközlési csatornát, akkor használnak a legnagyobb kapacitással, ha az üzenettovábbításnak optimális kódja van. Ezt a „kódot" nem kell szó szerint értelmezni; a kifejezés a szervezeten belüli hírközlés és interakció minden formájára vonatkozik, olyan formákra, amelyek hagyományos jelzéseket használnak, s olyanokra is, amelyeket újonnan kell megtanulni. Ha azonban egyszer már megtanulták, olcsóbb ugyanazt a rendszert újra használni, mint egy újat megtanulni; a kezdeti tanulási befektetés ugyan kifizetődik, de nincs mód arra, hogy másnak továbbadva pénzzé tegyék.

Ha a külső feltételek megváltozásakor a szervezetnek teljesen elölről kellene kezdenie mindent, akkor lehetséges, hogy nem az eredetileg optimális hírközlési rendszert választanák. A hírközlési rendszer a jelzések kezelésében végül is annyira rossz hatékonyságú lehet, hogy a vállalat megszűnhet vagy nagyobb átszervezésen mehet át.

Másként kifejezve, általában a vállalatok szervezetét úgy tervezik, hogy az a lehetséges jelzések többé-kevésbé széles választékának megfeleljen. Ahogy Hart [12] megállapította, minél nagyobb a felfogható jelzések tervezett tartománya, annál nagyobb a vállalat rugalmassága az előre nem látható változásokkal szemben (ez a rugalmasság jelentése), de annál kevésbé hatékony abban az esetben, ha szűkebb azoknak

a lehetőségeknek a tartománya, amelyekkel valóban találkozik. A hírközlési-gazdasági szempont döntő jelentőségű a vállalatok belső struktúrájának, és általánosabban a gazdasági szervezeteknek a vizsgálatakor. Meg kell változtatni a klasszikus gazdasági elmélet vállalatról alkotott feltevéseit. Ezen elmélet szerint a vállalat egy pont, valójában pedig a vállalat inkább az információáramok egy nem tökéletesen összekapcsolt hálózata. Így például, ha egy termelési tényező ára megváltozik, azt meg lehet figyelni a vállalat néhány egységében, de vannak olyan egységek, ahol nem. Az árváltozásra adott válasz ilyen esetben általában biztosan különbözni fog attól az esettől, ha a vállalat azonnal teljes tervének megváltoztatásával reagált volna.

Valóban nem lehet érintetlenül hagyni azt a koncepciót, hogy egy vállalat pontosan körülírt határokkal rendelkezik. Chester Barnard ([8] 77. old.) például azt a nézetet képviselte, hogy egy vállalat fogyasztói bizonyos fokig a vállalat részei. Az adott ár melletti anonim keresletváltozásokon kívül — ami a neoklasszikus elméletben egy vállalat és piaca között az egyetlen információs kapcsolat — a fogyasztóktól közvetlen információk áramlanak a vállalathoz, például: különféle panaszok, igény a termékstruktúra megváltoztatása, illetve bizonyos speciális szolgáltatások iránt, vagy egy másik vállalathoz való átpártolással való fenyegetés. Ezek eredményeként legalább a vállalat néhány alkalmazottjának közelebbi lesz a kapcsolata a vevőkkel, mint a többi alkalmazottnak.

Hadd jegyezzem meg végül, hogy a szerződő felek közötti informáltsági különbség megakadályozhatja bizonyos fajta hatékony szerződések megkötését. Főleg olyan esetekben, ahol a bizonytalanság kifejezetten hozzátartozik a szerződés természetéhez, a legkézenfekvőbb példák erre a biztosítás különböző típusai. Az információkülönbözetnek tulajdonítható piaci kudarc legkirívóbb fajtáját a biztosítási irodalomban *fordított szelekció*nak nevezik. Tételezzük, fel hogy egy népesség a kockázatot illetően (pl. az életbiztosításban) rétegekre van osztva, amelyekben a kedvezőtlen események különböző valószínűséggel következnek be. Tegyük fel továbbá, hogy valamennyi biztosítást óhajtó egyén tudja, hogy melyik réteghez tartozik, s így ismeri kockázatának valószínűségét, de a biztosítók nem tudnak a kockázat szerint különbséget tenni a biztosítottak között, s ezért arra kényszerülnek, hogy mindenkinek azonos ajánlatot tegyenek. Azok az egyének, akiknek kockázatuk nagy, többet, akiknek kicsi, kevesebbet fognak vásárolni a biztosítás bármely adott ára mellett. Tehát a biztosítási statisztikai kilátások kedvezőtlenebbek lesznek, mint akkor lennének, ha mindenki egyenlő mértékben venne részt a biztosításban, illetve mint egy olyan ideális elosztás esetén lennének, amelyben a különböző rétegek számára a biztosítási díj különböző. Az eredmény a kockázatviselés rossz hatékonyságú egyensúlyi elosztása lesz, legalábbis viszonylagosan, ahhoz az elosztáshoz képest, amelyet akkor lehetne elérni, ha a kockázatokról szóló információ mindkét oldal számára egyenlő mértékben állna rendelkezésre.

Sőt, a fordított szelekció esetén fennálló nem megfelelő hatékonyság ténye önmagában megváltoztathatja a piaci tranzakciók természetét. A biztosítási társaság jövedelemzőnek találhatja, hogy — például orvosi vizsgálatok révén — információ-

gyűjtésbe kezdjen azért, hogy csökkentse a fordított szelekció mértékét. Az ilyen típusú tevékenységek általánossá válhatnak még egy versenypiacon is, mert kölcsönös előnyöket lehet velük elérni. Ekkor azonban a tranzakció résztvevői közelebbi kapcsolatban vannak, mint a „szolgáltatásért pénzt" jellegű egyszerű, személytelen csere esetén voltak; az információt azonosított egyénekről és nem személytelen fogyasztókról kell összegyűjteni.

A biztosításban aránylag világos a fordított szelekció, de ugyanez a jelenség máshol is működik a gazdasági rendszerben. George Akerlof [1] hívta fel erre a kérdésre a figyelmet a használt autók eladásával kapcsolatban, ahol az eladó általában több információval rendelkezik az eladott tárgy tulajdonságairól, mint a vevők; itt ismét komoly kárt okozhat a piac működésében valamiféle, a fordított szelekcióhoz hasonló folyamat.

Egy másik nagyon fontos példa, az egész tőkepiac működése. Gyakorlatilag a hitel mindenfajta növelése magában hordja a fizetésképtelenség bizonyos kockázatát. Ezért az eladósodás sohasem öltheti a személytelen törlesztés és kamatfizetési ígéret formáját. A hiteleszközök vásárlója meghatározott, felelős egyénektől vásárol; és általában információt gyűjt a lehetséges adósokról. Egy bank tevékenységének jó részét éppen ezek a feladatok teszik ki.

A fordított szelekció jelenségéhez szorosan kapcsolódik a „morális kockázat" problémája, azaz a döntések és az exogén bizonytalanság megkülönböztetésével járó nehézség. (A „morális" jelző, sok összefüggésben félrevezető, de a hosszú használat szentesítette.) Egy biztosítási kötvény például, arra késztetheti a biztosítottat, hogy megváltoztassa magatartását, s ezzel a kockázatot is, azzal szemben, ami a biztosítási szerződésben le van írva. Így például a tűz elleni biztosítás — ha a gondosság egyáltalán költséges — arra ösztönzi a racionális egyént, hogy kevésbé legyen gondos. Az „egészségügyi biztosítás" pontosabban az orvosi költségekkel szembeni biztosítás is egy időszerű illusztráció erre; ha egyszer egy ilyen biztosítást megkötöttek, ez hatásában egyenlő az orvosi kezelés árának csökkenésével, ezért egy racionális egyén növelni fogja fogyasztását ezen a téren, ami megnöveli az orvosi biztosítási befizetések összegét, és végső soron a biztosítási prémiumok növekedését idézi elő. Ez társadalmi költségtöbbletet jelent, mert ha valaki növeli az orvosi kezelésre fordított kiadásait, ez mindenkinek a biztosítási díját megemeli, tehát nem megfelelő mértékű sem a kockázatvállalás, sem pedig az orvosi szolgáltatás felhasználásának hatékonysága. (Lásd Pauly [24], Arrow [3], 5. és 9. fejezet.)

Ezeket a negatív hatásokat is ellensúlyozhatják a gazdasági intézmények azzal hogy bevezetnek nem piaci információs eszközöket. Tűzbiztosítás esetén a biztosítótársaság ellenőrizheti az épületeket és a biztosítás feltételeként megkívánhatja bizonyos óvintézkedések megtételét, vagy legalábbis hozzáigazíthatja a díjat a biztonság megfigyelt szintjéhez. Az egészségügy esetében elméletileg lehetséges annak megkövetelése, hogy az orvos fontolja meg, hogy valóban szükség van-e a kezelésre, és a valóságban létezik is a felülvizsgálati rendszer kialakulását mutató tendencia.

Fontos, hogy észrevegyük, a „morális kockázat" problémája azonos az informált-

sági különbségek problémájával. Tekintsük a tűzbiztosítás példáját. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy három, a biztosított kontrolljától független, lehetséges helyzet létezik; tűz keletkezik a biztosított óvintézkedéseitől függetlenül; olyan helyzet, amelyben akkor keletkezik tűz, ha a biztosított gondatlan, egyébként nem; és hogy egyáltalán nem keletkezik tűz. Ha a biztosítótársaság meg tudná figyelni, hogy ezek közül az állapotok közül melyik következett be, akkor lehetséges lenne, hogy a két első esetre külön-külön kössön biztosítást. A racionális vásárló az első esetre kötne biztosítást a kockázattal szembeni idegenkedés egyszerű elveinek megfelelően, a másodikat illetően mérlegelné a biztosítás, illetve a gondosabb eljárás alternatívájának költségeit. Egy ilyen biztosítási piac hatékony elosztást eredményezne. Ilyen állapotok előfordulásának pontos megállapításához kapcsolódó költségek ösztönzik a biztosítótársaságokat arra, hogy általánosan, a tűz mint olyan ellen bocsássanak ki biztosítási kötvényeket, ami az erőforrás-elosztás fogalmaiban kifejezve kevésbé hatékony, de az információ költségeit tekintve olcsóbb. Ehhez hasonlóan, akkor lenne lehetséges egy hatékony egészségügyi biztosítási rendszer, ha a biztosító a betegség súlyosságának valamilyen mértékét meg tudná figyelni, és a biztosított aktuális kiadásaitól függetlenül egyszerűen e mérték alapján meghatározott összeget fizetne.

E néhány utóbbi példa általános elvét Radner [26] fejtette ki. Egy biztosítási szerződést (a legáltalánosabb értelemben, ami minden olyan helyzetet magában foglal, amelyben a résztvevők végső jövedelmének van bizonytalan eleme) csak akkor lehet megkötni, ha mindkét fél megfigyelheti a feltételeket, amelyek közt a szerződést végrehajtják. Ha csak az egyikük figyel meg egy feltételt, s a másik nem, akkor a szerződés nem múlhat azon, hogy e feltétel kielégül-e, még akkor sem, ha mindkét félnek érdekében állna egy olyan feltételes szerződést kötni, amit megbízható módon végre lehetne hajtani. Valahányszor meggátolják egy piac létezését, a nem kielégítő hatékonyság esete lép fel, ami gyakran a többi piac feszültségében tükröződik.

Fontos megjegyezni, hogy amennyiben az információk egyenlőtlenségét eltávolíthatatlan feltételnek tekintjük, akkor általában létezni fognak a versenypiacok helyettesítői, amelyek növelik ugyan a jólétet, de a jólét nem fogja elérni azt a pontot, amit az információk teljes egyenlősége esetén érne el. Ezt enyhíti a nemlineáris árrendszer, amelyben a biztosításért fizetendő díj nem arányos a kötvény értékével. Az alapgondolat durván az, hogy azok az egyének hajlamosabbak a nagyobb kockázatra, akik több biztosítást szándékoznak vásárolni, s ezért magasabb marginális díjat kell fizetniük. E problémák formális szerkezete megegyezik annak a tételnek a szerkezetével, amely szerint a vele született képességek — elméletileg magasabb rendű — megadóztatása helyett inkább a jövedelemre kell kivetni adót, mivel a jövedelem részben az egyén munka—szabadidő választásának eredménye (lásd Mirlees [20], [21]).

Modelljeinkben alig említjük a gazdasági rendszer egyfajta alkalmazkodását az informáltsági különbségekhez, ez pedig az etikai kódex keletkezése és bizonyos értékek belsővé tétele (lásd Arrow [5]). Minden különleges szakértelmet megkövetelő szakma — mint például az orvosi — gazdasági szerepét a szakértő és ügyfele közti

információegyenlőtlenségnek köszönheti; az utóbbi mindenekelőtt az előbbi magasabb rendű tudását vásárolja meg. Az előbbi magyarázat szerint, éppen ez az a helyzet, amelyben a legnehezebb azt várni, hogy működjön a piac. Egy páciensnek csekély a védelme azzal szemben, ha az orvos szükségtelenül költséges kezelést ajánl. Valószínűleg nem véletlen, hogy a különleges szakértelmet igénylő szakmákban a gazdasági viselkedés etikai korlátjai oly erősen fejlettek, hogy azok az egyenlő információ alternatívájául szolgálnak, azáltal, hogy az orvosnak a beteg jólétéért érzett etikai motivációjával helyettesítik azokat a szerződéseket, amelyeket az utóbbiak tudásuk hiánya miatt nem tudnának kikényszeríteni.

Ami azt illeti, bizonyos fokig minden szerződéshez hozzátartoznak az etikai elemek; nélkülük egyetlen piac sem működhetne. Minden tranzakcióban jelen van a bizalom eleme; a cserében tipikus, hogy az egyik értékes tárgy előbb cserél gazdát, mint a másik, és tulajdonosa bízik abban, hogy az ellenértéket valóban megkapja. Nem helyénvaló azzal érvelni, hogy léteznek olyan kényszerítő mechanizmusok, mint például a rendőrség és bíróság; ezek önmagukban vásárolt és eladott szolgáltatások, és velük kapcsolatban is azt a kérdést kell feltenni, hogy tulajdonképpen miért fogják azt tenni, amire szerződtek. Mindenesetre, a kényszerítés költségei csak akkor elviselhetők, ha a tranzakciók többsége csalási, kényszerítési, illetve szélhámossági kísérlet nélkül zajlik le. Továbbá, már egy kicsit bonyolultabb tranzakciók esetén is túl költséges lenne olyan szerződéseket fogalmazni, amelyek minden eshetőséget magukban foglalnak. Ha szükségessé válik nyitva kell hagyni néhány szempontot az értelmezés számára. Általában hallgatólagosan feltételezett, hogy lehetséges megegyezés a szerződés értelmét illetően még akkor is, ha az egyik fél esetleg veszít.

Számítok arra, hogy az etikai szabályok és a nem-árakon alapuló informális szervezetek tovább fognak fejlődni, például a minőségellenőrzés terén, ahol olyan tranzakciókat kell megengedni, amelyek — az információkülönbségek miatt — lehetetlenek lennének egy olyan piacon, ahol minden egyén tisztán önző módon viselkedik. Az etikai szabályok fejlődését megkönnyíti az a tény, hogy a termelőegységek ma általában nem egyének, hanem szervezetek, és hogy az egyének mobilak e szervezetek között. Ezért az egyének által betartott etikai szabályok — amelyek talán részben a gazdasági képzésükből származnak — akkor is fennmaradhatnak, ha ártanak a vállalat profitjának, mert a vállalatvezetés — bár csak részben — el tudja fogadni a profit és az üzleti életet általában segítő etika közti kompromisszumokat.

E megjegyzések csupán bevezetik a gazdasági világ etikai szabályainak fejlődésével foglalkozó tényleges kutatást. Az alapkérdés az, hogyan a legcélszerűbb, a már elfogadott és megértett etikai és hatalmi viszonyokhoz és stabilitásuk feltételeihez kapcsolódó jelzéseket kibocsátani. Ez a jelzések észlelésének és a kölcsönös önérdek valóságának valamiféle kombinációjától függ.

Remélem eleget mondtam ahhoz, hogy megmutassam milyen fontos az információ mint a gazdasági viselkedést befolyásoló változó, továbbá, hogy milyen különböző módokon hat a gazdasági rendszerre az információ szűkössége és sokfélesége.

IRODALOM

[1] *Akerlof, G.:* The Market for "Lemons": Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism. Quarterly Journal of Economics 84. 1970. 488—500. old.

[2] *Alchian, A.:* Information Costs, Pricing, and Resource Uneomployment. Western Economic Journal, 7. 1969. 109—128. old.

[3] *Arrow, K. J.:* Essays in the Theory of Risk-Bearing. Chicago, Marham, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[4] *Arrow, K. J.:* Higher education as a filter. Journal of Public Economics, 2. 1973. 193—216. old. A cikk kötetünkben is megtalálható a 213. oldalon.

[5] *Arrow, K. J.:* Social Responsibility and economic efficiency. Public Policy 21. 1973 (megjelenés alatt).

[6] *Arrow, K. J.:* The Limits of Organization. Norton, New York, 1974.

[7] *Arrow, K. J.:* The Agenda of Organizations. Megjelent: *R. L. Marris* és *A. Vood* (szerk.): The Corporate Economy Growth Competition and Innovative Power című kötetben. London—Basingstoke, Macmillan 1973. 7. fejezet, 214—234. old. A cikk kötetünkben is megtalálható a 383. oldalon.

[8] *Barnard, C.:* The Functions of the Executive. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1938.

[9] *Debreu, G.:* Theory of Value. New York, Wiley, 1959.

[10] *Demsetz, H.:* Informatiom and efficiency: another viewpoint. Journal of Law and Economics, 12. 1969. 1—22. old.

[11] *Hahn, F.:* On the Notion of Equilibrium in Economics. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1973.

[12] *Hart, A. G.:* Risk, Uncertainty and the Unprofitability of Compouding Probabilities. Megjelent: *O. Lange, F. McIntyre* és *T. O. Yntema* (szerk.): Studies in Mathematical Economics and Econometrics c. kötetben. Chicago, University of Chicago Press, 1942. 110—118. old.

[13] *Hirschleifer, J.:* The Private and Social Value of Information and the Reward to Inventive Activity. American Economic Review, 61. 1971. 561—574. old.

[14] *Hurwicz, L.:* Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocaiton Processes. Megjelent: *K. J. Arrow—S. Karlin—P. Suppes* (szerk.): Mathematical Methods in the Social Sciences c. kötetben. 1959. Stanford, Calif.: Stanford University Press 1960. 27—46. old.

[15] *Kaysen, C.:* Basing Point Pricing and Public Policy. Quarterly Journal of Economics, 63. 1949. 289—314. old.

[16] *Kornai, J.:* Anti-Equilibrium. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1971.

[17] *Leijonhufvud, A.:* On Keynesian Economics and the Economics of Keynes. New York Oxford University Press. 1968.

[18] *Machlup, F.:* The Production and Distribution of Knowledge in the United States. Princeton. N. J.: Princeton University Press. 1962.

[19] *Marschak, J.:* Remarks on the Economics of Information. Megjelent: Contributions to Scientific Research in Management c. kötetben. Los Angeles, Western Data Processing Center, University of California 1959. 79—98. old.

[20] *Mirlees, J.:* An Exploration in the Theory of Optimum Income taxation. Review of Economic Studies 38. 1971. 175—208. old.

[21] *Mirlees, J.:* Notes on Welfare Economics, Information and Efficiency. Kiadatlan kézirat., Oxford University. 1972.

[22] *Nelson, R. R.:* The Simple Economics of Basic Scientific Research. Journal of Political Economy, 67. 1959. 297—306. old.

[23] *Nerlove, M.:* Lags in Economic Behavior. Econometrica, 40. 1972. 221—252. old.

[24] *Pauly, M.:* The Economics of Moral Hazard. American Economic Review, 58. 1968. 531—537. old.

[25] *Radner, R.:* The Evaluation of Information in Organizations. Megjelent: *A. J. Neyman* (szerk.): Proceedings of the Fourth Berkeley Simposium On Mathematical Statistics and Probability 1. kötetében. Berkeley—Los Angeles, University of California Press, 1961.

[26] *Radner, R.:* Competitive Equilibrium under Uncertainty. Econometrica, 36. 1968. 31—58. old.

[27] *Rotschild, M.:* Models of Market Organization with Imperfect Information: a survey. Journal of Political Economy, 81 (megjelenés alatt). 1973.

[28] *Spence, M.:* Market Signalling. Cambridge Mass. Harvard University Press, 1973.

[29] *Stigler, G. J.:* The Economics of Information. Journal of Political Economy, 69. 1961. 213—225. old.

Napirendi kérdések a szervezetekben[*1]

BEVEZETÉS

A klasszikus maximalizáló elmélet implicite tartalmazza azt a feltételezést, hogy minden lényeges változó értékét mérlegelik minden pillanatban. Következésképp minden változó a szervezet *napirendjén* van, azaz értéküket állandóan meg kell választani. Másfelől a szervezeti tanulmányok és a mindennapi megfigyelések egyik közhelye, hogy egy lehetséges döntési változót mint olyat, sokkal nehezebben lehet elfogadtatni, mint értékét megválasztani. Hogy mit tekint a Szövetségi Kormány megfelelő napirendnek, az gyorsan változik; nem tartható az az álláspont, hogy egy új napirend szükségképpen megfelel a kereslet vagy a kínálat változásainak, például az újonnan felmerülő problémáknak, illetve a megoldásukat szolgáló új technikáknak. A munkanélküliség esetére szóló biztosítás régi gondolat, és szükségessége nem csupán a nagy válság idején merült fel; de az akkor napirenden nem szereplő kérdés hirtelen napirendi kérdéssé vált. Mindenféle szervezet esetében lehet hasonló példákra hivatkozni; egy vállalati újítás sokszor egyszerűen annak a kérdése, hogy a többi vállalatot megelőzve tűznek napirendre egy témát. Néhány új téma napirendre kerülésének folyamatát is láthatjuk mostanában. A Szövetségi Kormány esetében a rugalmas valutaárfolyamok felmerülésének lehetősége már a láthatáron van.

Másfelől világos, hogy egy téma napirendre tűzésének valóságos értéke van. Az 1946-os foglalkoztatási törvény (Employment Act) nem volt több, mint egy nyilatkozat arról, hogy végre a teljes foglalkoztatás a Szövetségi Kormány napirendjére került. Sokan úgy érezték, hogy ez valójában értéktelen győzelem. Nem tévedtek azonban azok, akik oly hevesen tiltakoztak ez ellen az álláspont ellen; hosszú távon e jogi elismerés meghatározó volt, bár a végrehajtás folyamata valóban lassúnak bizonyult. Ha egyszer egy téma napirendre került, akkor nehéz valamiféle

* On the Agenda of Organizations. Megjelent az *R. Marris* (szerk.): The Corporate Society c. kötetben, New York—Toronto, Wiley, 1974. 214—234. old.

[1] Ez a rendkívül spekulatív esszé olyan gondolatok ötvözete, amelyeket sok tudós írásának értelmezéséből, illetve a velük folytatott személyes beszélgetésekből merítettem; főleg Leonid Hurwiczot, Carl Kaysent, Burton Kleint, Kornai Jánost, Jacob Marschakot, Thomas Marschakot, Roy Radnert, Thomas Schellinget és Herbert Simont említhetném közülük.

nem racionális módon kezelni — ha ez egyáltalán lehetséges —, és feltehetően csaknem minden tekintetbe vehető megoldás jobb, mint a problémák mellőzése. Sietve teszem hozzá, hogy ez alól az általános szabály alól vannak kivételek; vannak olyan problémák, amelyeknek nincs kielégítő megoldásuk. Egy ilyen téma napirendre tűzése igényt támaszthat a megoldásra, bár az szükségképpen nem lesz kielégítő. Ennélfogva némiképp indokolható az „üdvös hanyagság" elve, de nem valószínű, hogy ez a kivétel valóságos. Lehet, hogy épp egy nem kielégítő megoldás kell ahhoz, hogy a jobb megoldáshoz szükséges információgyűjtés meginduljon, míg a probléma elhanyagolása soha nem vezet semmire.

A napirendet meghatározó tényezőkről szeretnék itt néhány gondolatot felvázolni. A probléma már létezik az egyén számára, s egy ideig elsősorban vele foglalkozom behatóbban. Felvethető azonban, hogy a szervezetek természetéből és céljaiból a napirend meghatározása terén további következmények fakadnak, ami különösen az új témák felvetésének nehézkességében nyilvánul meg.

Amit bemutatunk, az tulajdonképpen nem elmélet vagy modell, de az ilyesfajta megfontolások hozzátartoznak, illetve hozzá kellene hogy tartozzanak egy ilyen modell megfogalmazásához. Az előadandó elgondolások formalizálása nem látszik nagyon nehéznek, bár a szigorú következtetésekhez vezető analitikus kezelésük valóban nagyon nehéz lehet. Ebben a szakaszban megfelelőbbnek látszik a kérdéseket tágabb értelemben tárgyaljuk, hogy ne az analitikus problémákra összpontosítsunk. A nézőpont azonos egy optimális modell szemléletével, de a bizonytalanság és az információs csatornák gazdagabb keretébe ágyazva. A döntések — bárhol hozták őket — a kapott információk függvényei; ezért ha az információk változatlanok maradnak, akkor nem hoznak döntéseket, illetve egy kicsit pontosabban fogalmazva, az implicit döntések nem változtatják meg bizonyos változók értékét. Másfelől magát az információszerzés folyamatát kell elemezni, mert az az információgyűjtésre vonatkozó döntés eredménye.

Ahhoz, hogy jogos legyen ez az érvelés, természetesen elengedhetetlen, hogy az információ szűkös vagy drága legyen; ugyanis feltételezhető, hogy bármilyen ingyenes információt megszereznek. Bemutatjuk, hogy annak a ténynek, hogy a különböző fajta információknak különböző az ára bármely adott egyén vagy szervezet számára, sok — a szervezet viselkedését érintő — következménye van.

A bemutatandó téma lényege, hogy a bizonytalanság, az oszthatatlanság és a tőkeintenzitás kombinációja az információs csatornákkal és használatukkal kapcsolatban maga után vonja azt, hogy *a)* egy szervezet tényleges struktúrája és magatartása nagymértékben függhet véletlen eseményektől, más szóval a múlttól, és hogy *b)* maga a hatékonyságra törekvés merevséghez és a további változásokra való nehézkes reagáláshoz vezethet.

AZ INFORMÁCIÓ GAZDASÁGTANA[2]

Először is tételezzük fel minden egyénről, hogy képes (a természeti vagy társadalmi) környezet jelzéseit felfogni. Ez a képesség azonban nem korlátlan, és a szervezeti és egyéni viselkedés megértéséhez alapvető az információnak az a vonása, hogy szűkös. Egy egyén az összes — általa vagy bárki más által a jelenben vagy a jövőben elképzelhetően kapható — lehetséges jelzés előzetes valószínűségi eloszlásából indul ki. E jelzéseket tágan kell értelmezni; egyes jelzések informálhatják az egyént döntéseinek következményeiről, másokat a döntések megalapozására lehet felhasználni, hacsak nem kizárólag implicit döntések szerepelnek. Ebben az esetben a jelzés bármely olyan esemény, amely képes az egyén valószínűségi eloszlását megváltoztatni; szakszerűbb kifejezéseket használva: a jelzések — egy egyén megfigyeléseitől függő — utólagos eloszlása általában különbözhet az előzetestől. Pontosan a valószínűségeknek ez a transzformációja alkotja az információszerzés lényegét.

Az információnak ez a meghatározása kvalitatív, s e tanulmány céljainak megfelelően így is marad. Az információelméletben megjelenő kvantitatív meghatározás a gazdasági elemzés számára valószínűleg csak korlátozott értékű, azok miatt az okok miatt, amelyekre Marschak hívta fel a figyelmet. Az információelmélet számára egyenlő, egyébként különböző információk árban és hasznosságban nagyon eltérőek lehetnek. Legyen tehát A és B két olyan tetszőleges megállapítás a világról, amelyeknek igazságát vagy hamisságát nem ismerjük előzetesen *(a priori)*. Ekkor az a jelzés, hogy A igaz — shannoni értelemben — pontosan ugyanannyi információt hordoz, mint az az állítás, hogy B igaz. Lehetséges azonban, hogy annak az értéke, hogy tudjuk, vajon A igaz vagy nem, mérhetetlenül nagyobb mint B igazságértékének ismerete; vagy előfordulhat, hogy az A igazságértékének megállapításához sokkal több erőforrásra van szükség, mint B-éhez. A két lehetséges jelzés információelméleti azonossága mindkét esetben elfedi óriási gazdasági különbségüket.

Ebben az elemzésben az információ néhány gazdasági jellemzőjére koncentrálunk. Ezek közül első és legfontosabb, hogy maga az egyén is input, valójában bármelyik saját információs csatornájának fő inputja, ha egyáltalán van értelme itt a kvantifikálásnak. Az információ az érzékszervein keresztül előbb vagy utóbb az agyába jut, s mindkettő kapacitása korlátozott. Az információt „file"-okban lehet összegyűjteni, de a döntéshozásban való felhasználáshoz visszakereshetőnek kell lennie. A pszichológiai irodalomban sok tanulmány foglalkozik az emberi lények érzékekből származó észlelési képességének határaival, és néhány tanulmány (például Miller [5]) foglalkozik az emberi lények mint információfeldolgozók korlátaival. Nem tartom indokoltabbnak a rögzített koefficiensek használatát az információkezelésben, mint a legtöbb hagyományos termelési tevékenységben; az egyéni agynak más tényezőkkel — különösen számítógéppel — való helyettesítése lehetséges. Az egyén nagyon korlátozott információszerző és hasznosító kapacitása azonban

[2] (Lásd Marschak [3], Radner [9]).

fix tényező az információfeldolgozásban, és a többi információforrás növekedése egyfajta csökkenő hozadékot eredményezhet. A szervezetelmélettel foglalkozók már régen felismerték e korlátokat, és az „irányítás hatókörének" („span of control") címszava alatt tárgyalták.

Az információ költségeinek második kulcsfontosságú jellemzője, hogy ezek részben tőkeköltségek; tipikus példái a visszafordíthatatlan beruházásoknak. Nem helyezek nagy súlyt a hírközlés technikai vonatkozásaira, a telefonvonalakra és hasonlókra, bár valóban nem elhanyagolható költségeket és egy konkrét, könnyen érthető modellt jelentenek. Inkább arra gondolok, hogy ahhoz, hogy képesek legyünk az egyik jelzést a másiktól megkülönböztetni, idő és erőfeszítés megfelelő befektetése szükséges. Az idegen nyelvek tanulása kézenfekvő példa arra, amire gondolok. Az a képesség, hogy a későbbiekben a franciául kapott jelzések felfoghatóak legyenek, megkívánja ezt a kezdeti befektetést. A gyakorlatban sok más példa is található olyan kódokra, amelyeket meg kell tanulni annak érdekében, hogy felfogjunk bizonyos közléseket; például ilyen bármely tudományág technikai szókincse. A probléma abban rejlik, hogy egyesek gazdaságosnak találták a nagyszámú kódolási módszer használatát, és ezek elsajátításához mindenki számára kezdeti befektetés szükséges.

Még ha a kódok nem szándékosan kiagyaltak, a megértésük akkor is igényel kezdeti erőfeszítést. Az empirikus kutatónak — bármely területen — előzetes megfigyeléseket kell végezni (vagy másoktól kell ismereteket elsajátítania, ami szintén befektetéssel jár) annak érdekében, hogy a természet jelzéseit olvasni tudja. Ahogy E. H. Gombrich rámutatott az egyes művészeti iskolák megértése, még a művészek részéről is, függ az iskola ismertségétől. Ennek következtében létezik egy ciklikus tendencia, amelynek során az új művészi irányzat először elterjed; majd ahogy ismertebbé válik, a hasonló jelzések ismétlésének értéke csökken, és a képesség az új jelzések megértéséhez növekszik.

Az információ tőkejellegének formalizálását a következőképp kísérelhetnénk meg. Egy mind ez ideig nem hallott jelzés önmagában haszontalan; ugyanis nem módosít semmiféle valszínűségi eloszlást. Egy előzetes mintavételi kísérlet azonban — amelynek során az új és az ismertebb jelzések közötti összefüggés meghatározható vagy legalábbis becsülhető — értékelhetővé teszi a további, új típusú jelzéseket. Ez a kísérlet — amelyet más is elvégezhet helyettünk (oktatás, tudományos irodalom) — tulajdonképpen egy befektetési aktus.

Egy ilyen befektetés, lévén egy egyén agyában elzárva, szükségképpen visszafordíthatatlan. Természetesen tovább lehet adni másoknak, de az egyén tulajdonában marad, és nem idegenítheti el, bár — mint a legtöbb visszafordíthatatlan beruházás — veszít az értékéből.

Az utóbbi húsz évben kialakult a visszafordíthatatlan beruházások irodalma. Kézenfekvő, hogy a visszafordíthatatlanságnak nincs következménye, ha a jövőben állandóan növekszik a tőkejavak iránti kereslet; de fontossá válik akkor, amikor ingadozások, különösen amikor sztochasztikus ingadozások lépnek fel. Egy információs csatorna értéke, természeténél fogva bizonytalan, s ez egy olyan gazdasági prob-

léma, amely hasonlít a készletek iránt bizonytalan körülmények között felmerülő kereslet kérdéséhez. Megkockáztathatunk néhány lehetséges általánosítást. Az első, hogy az információkba való beruházások iránti kereslet kisebb lenne, ha az információk értéke biztosabb lenne. A második — véleményem szerint fontosabb — sejtés, hogy a múlt véletlen eseményei nagyobb szerepet játszanak a végső egyensúly létrejöttében. Ha egyszer egy befektetés megtörtént és egy információs csatornát megszereztek, akkor olcsóbb lesz azt tovább használni, mint új információs csatornákba beruházni. Különösen azért, mert — ahogy már említettem — az egyén mint input szűkösségéből az következik, hogy az új csatornák használata csökkenti a régiek eredményességét. Nehéz tehát visszavonni egy arra vonatkozó eredeti elkötelezettséget, hogy milyen információt gyűjtünk. Egy ilyen döntés későbbi megváltoztatása még akkor sem fizetődne ki, ha a két lehetséges csatorna várható értéke közti különbség viszonylag kicsi, és ha a későbbi információk azt sejtetik, hogy az eredeti választás rossz volt.

Az információs költségek harmadik alapvető jellemzője, hogy azok a különböző irányokban semmi esetre sem egyformák. Egy egyén bármely adott pillanatban képességeinek és felhalmazott információinak összessége. Könnyen lehet, hogy olcsóbb számára bizonyos, képességeihez és tudásához valamilyen módon kapcsolódó információs csatornák megnyitása, mint másmilyeneké. A felfedező az eddig ismeretlen területen könnyebbnek találja olyan új területek felkutatását, amelyek közel vannak a már felfedezettekhez. A földrajzi közelség persze csak speciális eset. Olcsóbb olyan vegyületek kémiai elemzését elvégezni, amelyek hasonlóak a már tanulmányozottakhoz. A tanulás bizonyos irányokban olcsón és természetesen, másokban sokkal nagyobb nehézségek árán általánosít. Egy patkány, amelyet egy bizonyos ponton áramütés ért, oly módon tanul, hogy bizonyos távolságban tartózkodik e ponttól; a megsemmisülés veszélye a távolsággal csökken.

Könnyebb olyan egyénekkel kommunikálni, akikkel — akár a szó szoros értelmében, akár képletesen — közös a szemléletünk vagy „közös nyelven" beszélünk. Lehetséges, hogy a csatorna mindkét végén meg kell lennie egy már említett kódnak, a tanulásból eredő tőkefelhalmozásnak. A szokásos gazdasági elemzés szerint azért nem tartósak egy iparág összejátszáson alapuló megállapodásai, mert mindig léteznek olyan, néhány termelőt és fogyasztót érintő alternatív elosztási megállapodások, amelyek a résztvevők szempontjából vonzóbbak. De — ahogy Adam Smith állította — ha egy bizonyos iparágban érdekeltek, feltehetően közös tapasztalataik alapján, könnyen kommunikálnak egymással, akkor lehetséges, hogy az egy azon termék termelői közötti összejátszáson alapuló megállapodáshoz vezető információcsere sokkal olcsóbb, mint az amely egy korlátozó szövetség eléréséhez lenne szüséges. Ezért lehet a valóságban tartós az összejátszáson alapuló megállapodás. (Az osztályérdek és identifikáció elméletét össze lehet kapcsolni a hasonló élettapasztalatokkal rendelkező egyének közötti jó kommunikációval.)

A kommunikációs csatornák viszonylagos költségeit befolyásolhatják az egyének információgyűjtésen kívüli tevékenységei is. A termelőtevékenység és az információ néhány fajtája között komplementaritás van. Az egyén egy feladat megoldásán

dolgozva kénytelen megfigyeléseket tenni. Ezek a megfigyelések olyan jelzések, amelyek bizonyos körülmények között megváltoztatják tudását a szóban forgó termelési tevékenységről, ez az ún. gyakorlatból tanulás (learning by doing). Más körülmények között a döntéshozás más, látszólag távoli területei számára nyújthatnak fontos információkat, ezt a jelenséget úgy ismerik, mint az értékes dolgok megtalálásának képességét, olyan helyen, ahol ez kevéssé valószínű (serendipity). Mindnyájan ismerjük az Északnyugati Átjárót kutató felfedezők eredményeit.

Összefoglalva, az információ költségei — a szűkös erőforrások hasznosításának általános elmélete alapján — *a)* az egyén számára bizonyos értelemben növekvőek, mert ő maga is egy szűkös input, *b)* jelentős, visszafordíthatatlan tőkeelemet tartalmaznak, és *c)* eltérőek a különböző irányokban.

Általánosítva keveset lehet mondani az információból származó haszonról. Talán azt a közismert megjegyzést lehetne esetleg megkockáztatni, hogy az információ *használata* során a hozadék növekszik. Például ugyanazok a technológiai információk bármilyen méretű termelésben felhasználhatók. Ez ösztönzi a termelés növelését, s ezért — a jól ismert elveknek megfelelően — bizonyos fokú monopolista hatalommal rendelkező termelővállalatok kialakulása irányába hat.

AZ EGYÉNEK NAPIRENDJE

A döntések szükségképpen az információ függvényei. Ezért, ha valaki úgy dönt, hogy a döntések egy bizonyos osztályához szükséges fontos információkat nem gyűjti, akkor ezek a döntések nem szerepelnek napirenden.

Az utolsó mondat — a „dönt" és „döntés" szóhasználattal — kiemeli, hogy különbséget kell tenni két döntésfajta között, a valamilyen konkrét értelemben vett cselekvésre vonatkozó döntés és az információgyűjtésre vonatkozó döntés között. Ez a különbségtétel nagyon jól ismert a statisztikai döntéselméletben; Raiffa és Schlaifer [7] úgy hivatkoznak rájuk, mint „végső cselekvésekre" (terminal acts) és „kísérletekre" (experiment). Ez a különbségtétel általában nem vihető teljesen következetesen végig. Az erőforrások kihasználása szempontjából mindkét fajta döntés fontos, mert a kísérlet ebben a szemléletben költséges. Feltételezzünk egy olyan modellt, amelyben a hasznosságok két függvény összegeként fejezhetők ki, mindkettő függ a világ állapotától, és az egyik a végső cselekvéstől, a másik pedig a kísérlettől. Amennyiben csak a kísérletből származó jelzések módosítják a valószínűségi eloszlást, és pozitív haszon csak a végső cselekvésből származhat (a kísérlet közvetlenül csak költségekhez vezethet, bár közvetve haszonnal jár), akkor valóban tisztán megkülönböztethető a két fajta döntés. Minthogy az előző fejezetben az információszerzés költségeire és a termelőtevékenységek közötti kölcsönös összefüggésekre helyeztem a hangsúlyt, nem akarok ragaszkodni ehhez a modellhez. A modell azonban sokatmondó.

Ráadásul képzeljük el, hogy a lehetséges végső cselekvések terét néhány altérre lehet felbontani, hogy a kísérletek tere is ezzel párhuzamosan felbontható, és hogy

bizonyos értelemben — amit itt nem fogok formalizálni — a végső cselekvések értékelésére elsősorban a megfelelő altér kísérleteinek eredménye hat. Ekkor elméletileg elképzelhető e döntési terek trichotómiája. (Egy döntési tér a végső cselekvések altere együtt a megfelelő kísérletek alterével.) A döntési terek lehetnek *aktívak, megfigyeltek* (monitored) és *passzívak*. Az aktív tér olyan, amelyben kísérleteket hajtanak végre, ezekből jelzéseket kapnak, és a végső cselekvéseket a jelzések függvényeként határozzák meg. Az ún. megfigyelt térben végrehajtanak néhány kísérletet; a kapott jelzések azonban túl kevés információt hordoznak a végső cselekvések meghatározásához, de ha a kapott jelzések megfelelőek, akkor az az optimális, ha további kísérleteket végeznek, amelyek már elegendő információt nyújtanak a végső cselekvések napirendre tűzéséhez. Végül a passzív térben nem folytatnak kísérleteket, s ezért sem a kísérletek, sem a végső cselekvések nincsenek napirenden.

A döntési terek e típusok szerinti felosztása természetesen függ a viszonylagos költségektől és a haszontól. Ahogy már megjegyeztük, a várt haszonról nem sokat lehet mondani, de a költségek előző fejezetbeli osztályozásának lehet némi magyarázó ereje. Illusztrációként tekintsünk egy egyéni beruházót, aki a részvények egyfajta kollekcióját választja. Lesz a részvényeknek egy osztálya, amelybe az egyén aktívan beruház, pozitív befektetéseket tesz vagy legalábbis közelről megfigyeli őket, azzal a céllal, hogy állandóan fontolóra vegye, beruházzon-e vagy sem. A beruházó figyeli a piaci árakat, jelentéseket kap a vállalatok tevékenységéről stb. Lesz a részvényeknek egy olyan osztálya, amelyet — úgy is mondhatnánk — figyel a szeme sarkából. Alkalomadtán ellenőrzi az árakat és pillantást vet a viszonylag felületes információkra. Ha érdekes mozgások vagy más érdekes információk jelennek meg, akkor esetleg növeli felderítő tevékenységének intenzitását, és áthelyezi ezt a részvényt az aktív csoportba. Végül a legtöbb részvényre egyáltalán nem figyel.

Ez az elemzés azt sejteti, hogy a részvények egyik vagy másik osztályba sorolásának valamiféle szisztematikus oka van. Egy bizonyos cégnek vagy iparágnak a korábbi tapasztalatokon vagy a folyó termelési kapcsolatokon alapuló ismeretei azt jelentik, hogy bizonyos részvényekről szóló információk olcsóbbak számára, mint a másokról szólók; a beruházónak olyan háttere van, amely lehetővé teszi számára, hogy jobban értsen bizonyos jelzéseket. Az a tény, hogy az információ jelentős tőkekomponenssel rendelkezik, azt jelenti, hogy amennyiben egyszer egy beruházó a részvények egy csoportja mellett döntött, akkor benn is marad ebben a csoportban, mert ugyanazokról a részvényekről szóló pótlólagos információk olcsóbbak, mint az értelmes elemzés megkezdéséhez szükséges — más részvényekről szóló — kezdeti információk megszerzése.

Valószínű, hogy a beruházó megfigyel olyan részvényeket, amelyekről olcsón szerezhet néhány információt, mert ezek megszerzése más tevékenységeket egészít ki. Az őt elsősorban érdeklő részvények elemzésének hátteréként tehát összeszedhet néhány, a második csoport szempontjából érdekes, más részvényekről szóló információt; ez a folyamat tulajdonképpen olcsó megfigyelést jelent. A hivatásos in-

formációszolgáltatók — például a brokerek és ehhez hasonlók — széles körű, de sekély információval láthatják el; ugyanakkor részletes információt is szolgáltatnak. Az üzleti élet körülményeiről szóló általános hírek gyakorlatilag ingyen elolvashatók, természetükből adódóan érdekesek; és ez egyben egyfajta megfigyelést is jelent. Végül az üzleti partnerekkel való társadalmi érintkezés is információforrást jelenthet, annál is inkább, mert sok jel utal arra, hogy a személyes befolyást — ami adott költségen, szubjektíven mérve, több információt jelent — megbízhatóbbnak tekintik.

Mit várhatunk ezek alapján, hogyan változik az egyén napirendje, azaz, hogyan kerülnek át a döntési terek az egyik osztályból a másikba? A folyamat egy részét a megfigyelési folyamat önmagában magyarázza. Sok olyan lehetséges döntési tér van, amelyet valójában megfigyelnek valamennyire. A megfigyelés klasszikus illusztrációja a minőségellenőrzés folyamata az iparban. A termék minőségét mintavétel alapján vizsgálják. Amíg az eredmények kielégítőek, addig nem történik semmi, de ha minőségi romlás következik be, akkor ennek okait alaposabban megvizsgálják, azzal az eshetőséggel is számolva, hogy egy gépet esetleg meg kell javítani vagy ki kell cserélni. Világos azonban, hogy itt többről van szó, mint arról, hogy a napirend az előre látható lehetőségek eredményeképp változik. Az egyik lehetőség az, hogy a végső cselekvések hozadéka hirtelen megváltozik. Különösen valószínű ez akkor, amikor az ún. opportunity benefit megváltozik, azaz a jelenlegi, nem elemzett akció nyeresége csökken. Egyszerűen szólva, ilyenkor „válságban" vagyunk. William James kifejezésével élve, egy „kényszerítő tény" sokkal meggyőzőbb lehet, mint bármiféle spekuláció egy változásból fakadó lehetséges haszonról. A *Titanic* elsüllyedése vezetett a jéghegy-őrjáratokhoz.

Kétségtelen, hogy a hozadékok változása inkább lehet az észlelés, mint a valóságos helyzet változása. A jelenleg gyakori ökológiai aggodalmak sokkal gyorsabban növekednek, mint a valóságos problémák (amivel nem azt akarom mondani, hogy ezek nem fontosak). Megtörténik néha, hogy a jelzések költsége — valamilyen okból — csökken. Lehetséges, hogy egyszerűen fellép egy küszöbhatás; egy bizonyos ponton túl pedig gyakorlatilag már a megfigyelésekbe vagy kísérletekbe való befektetés nélkül válik nyilvánvalóvá például a levegőszennyezés hatása vagy például egy részvény alacsony jövedelmezősége stb. Lehetséges, hogy bizonyos esetekben egyes egyének — saját megfontolásból — információikat olcsón szolgáltatják. Ezek a különféle agitátorok és reformerek; kétségtelen, hogy munkájuk csak akkor virágzik, amikor a társadalmi légkör megfelelő, bár a fáklya mindig kész, mégiscsak kell valaki, aki meggyújtsa.

A napirendváltozás másik oka az, hogy az információs csatornák kapcsolata a végső cselekvések terének altereivel, a próbaként használt modellel szemben valójában nem egyszerű. Az egészen különböző politikai következményekkel járó jelzések eredetüket tekintve szorosan összefüggnek és ugyanazon a csatornán érkezhetnek. Lehetséges, hogy egy bizonyos meghatározott célt szolgáló kísérlet nagyon különböző végső cselekvésekhez szolgáltat pótlólagos információt, csekély pótlólagos

költség árán. E szempontból érdekes a részegységcsere kedvező hatásának paradigmája (lásd Jorgensen, Mc Call és Radner [2]), amely szerint, ha egy olyan komplex mechanizmust vizsgálnak át valamely részegység lehetséges hibája miatt, mint például egy rakéta, akkor már sokkal olcsóbbá válik a többi részegység vizsgálata vagy cseréje is.

A SZERVEZETEK NAPIRENDJE

Nem teszek kísérletet a szervezet formális meghatározására; ez valószínűleg lehetetlen. A fogalom ugyan lényegében egy primitív kategória az adott rendszeren belül, amelynek jelentése valójában bizonyos feltételezésekben és ezek következményeiben érthető meg. Ezt a kategóriát azonban elég tágan kell értelmezni. Nem csupán formális szervezetek; vállalatok, szakszervezetek, közigazgatási szervek tartoznak ide. A piaci rendszert olyan szervezetként lehet értelmezni, amely valóban kifinomult kommunikációs és közös döntéshozási módszerekkel rendelkezik. Ebből a példából világos, hogy a szervezetek tagjai egyaránt lehetnek maguk is szervezetek és egyének. Továbbá meg kell jegyeznünk, hogy egy egyén általában számos szervezetnek tagja.

A szervezetek rendeltetése, hogy azt a tényt, hogy sok (gyakorlatilag valamennyi) döntés hatékonysága általában sok egyén részvételét követeli meg, ki lehessen használni. A vállalat belső gazdaságtanáról szóló vitában — az itt végső cselekvésnek nevezett fogalmat illetően — természetesen ez szokásos álláspont. De ugyanígy, ha nem még inkább, érvényes a kísérletekre, azaz az információs csatornákra is.

Egy szervezet bármely egyénnél több információt tud szerezni, mert minden tagjával különböző kísérleteket végeztethet. Az egyén kapacitásának korlátai tehát legyőzhetők. De ahogy mindennek, úgy ennek is ára van. Az *U*-alakú költséggörbéről folyó valamelyik régi vitában ezzel kapcsolatban lényegi megfontolásokra hivatkoztak. Ahhoz, hogy a szervezetnek valamennyire is hasznára legyenek, az információkat koordinálni kell. Formálisabban kifejezve, a szervezeten belül hírközlési csatornákat kell létrehozni.

Ha mindazt az információt, amit egy szervezet valamely tagja megkap, mindenki másnak vagy akár csak egy központnak továbbítanák, akkor az információfeldolgozásból a költségek miatt nem származna nyereség. Sőt, mivel a vállalaton belül további információs csatornák is vannak, veszteség származna belőle. Egy szervezetben azért jön létre „az információ hozadéka" (economies of information), mert sok, kapott információ valójában lényegtelen. A szervezet illetékességi körébe tartozó végső cselekvések értékeléséhez nincs szükség a világ állapotainak teljes valószínűségi eloszlására, csak az ebből származtatható néhány peremeloszlásra. Ezért azokat az információkat, amelyeket a szervezet valamely tagja kap, általában sokkal kisebb terjedelműre redukálva lehet továbbítani anélkül, hogy a végső cselekvés szempontjából veszítenének értékükből. Az elégséges statisztika elmélete jól példázza ezt az értékveszteség nélküli információcsökkentést. Ennek az az oka, hogy bármely végső

cselekvés értéke nem a mintában megfigyelt értékektől, hanem csupán a mögöttes eloszlás paramétereitől függ; ezért elegendő a minta egy olyan függvényének értékeit továbbítani, amely a paraméterekről szóló információkat teljességgel tartalmazza.

Az információ ismételt továbbadásának éppen ez a csökkentése magyarázza a szervezet információkezelésből származó hasznát. Mivel az információ költséges, világos, hogy általában a belső információtovábbítás további csökkentése javítja a szervezetek helyzetét. Azaz a végső cselekvésről való döntésben kifizetődő némi értékveszteség, ha ennek fejében lehet takarékoskodni a belső hírközlési csatornákkal. A belső hírközlési struktúra optimális megválasztása egy mérhetetlenül nehéz kérdés. Ez az alapja — bár nem mindig explicit módon — a szocialista gazdaságról folyó nagy vitáknak. A Marschak—Radner-féle team-elmélet bizonyos irányokban mélyen vizsgálta e kérdést.

Mivel általában az az optimális, ha nem továbbítanak minden lényeges információt, a szervezet egyes tagjai olyan információkat fognak felhalmozni, amelyeket úgy ítélnek meg, hogy a jelenlegi körülmények között nem érdemes továbbítani. Lehetséges, hogy egy későbbi időpontban, néhány más, az előzőekkel komplementer jelzés érkezésének következtében kiderül, hogy ez az információ értékes. Hogy ekkor felhasználják-e ezt az információt vagy nem, az egy sor tényezőtől függ; amelyek közt szerepel a későbbi — memóriák vagy file-ok visszakeresése útján való — továbbítás olcsósága. Ez teremti meg annak a lehetőségét, hogy a szervezet különböző tagjai, akik rendelkeznek különböző nem továbbított tapasztalatokkal, eltérő módon értelmezzék az új jelzéseket. Úgy tűnik, érdekes következtetések adódnak itt olyan szervezetek információs hatékonyságának csökkenéséről, amelyek külső környezete számottevően megváltozott.

Minthogy a belső hírközlési csatornákat meg lehet tervezni, struktúrájukat a költségminimalizálás szempontjának megfelelően lehet megválasztani. Nevezetesen, egy csatorna hatékonyságát növelni lehet a kód alkalmas megválasztásával. (A kód kifejezést mind szó szerinti, mind metaforikus értelemben használtam.) Az információközlés minden ismert módjára vonatkozik, akár formális szabályokban van rögzítve, akár nem. Ahogy az információelméletből jól ismert, az optimális kód ugyanolyan mértékben függ a lehetséges jelzések *a priori* eloszlásától, mint a különböző módon kódolt jelzések közlési költségeitől.

A kódolásnak két gazdasági következménye van: 1. gyengíti, de nem küszöböli ki a költségeknek a műveletek méretével növekvő tendenciáját; 2. a szervezetben egy belsőleg visszafordíthatatlan tőkekötelezettséget hoz létre. Ami az első pontot illeti, láttuk, hogy a szervezetnek a növekvő méretekből eredő haszna abból fakad, hogy különböző tagjaival különböző jellegű kísérleteket végeztet, azaz a specializációból. Ahogy az egyénre vonatkozó információ-gazdaságtan fejtegetése során láttuk, ez azt jelenti, hogy a szervezet tagjai az információfeldolgozás során különböző típusú készségeket halmoznak fel azokon a területeken, amelyre specializálódtak — tanulással (tőkét szerezve) —, más területeken pedig felejtenek. Ennek eredményeként a kommunikáció nehezebbé válik közöttük (a tudományos szakemberek ezt

jól ismerik), és az egymás közti kommunikációjukban használt kódok bonyolultabbá válnak. Ezért, bár a kódolás nagyobb számú egyedi információ hasznos összegyűjtését teszi lehetővé, a műveletek méretének növekedésével végső fokon még mindig növekszenek a költségek.

Ami a második pontot illeti, ahogy már kifejtettük, egy kód megtanulása az egyén számára visszafordíthatatlan beruházás. Ez tehát visszafordíthatatlan tőkefelhalmozás a szervezet számára is. Ebből az következik, hogy ha egyszer egy szervezetet létrehoztak, akkor ez határozott identitással rendelkezik, mert a kód megváltoztatásának a költségei váratlan erkölcsi kopásból eredő költségekként jelentkeznek.

Becker és mások hangsúlyozták, hogy az emberi tőke (human capital) felhalmozásának jelentős része a vállalat szükségleteinek megfelelő speciális képzésből áll, azaz olyan információkat táplálnak a dolgozókba, amelyek az adott vállalat számára növelik értéküket, de más vállalatok számára nem. Ha a munka funkciója az, hogy a termelésben olyan tőkejavakkal működjön együtt, amelyeket különböző vállalatok széles körben alkalmaznak, akkor nyilvánvalóvá válik, hogy gyakorlatilag minden képzés általános. A vállalaton belüli információs csatornák és a rajtuk való információtovábbítás kódjának megtanulása azonban valóban csak az adott vállalaton belül értékes képesség.

Feltehetnénk a kérdést, ahogy azt a vállalatokkal foglalkozó vitákban gyakran fel is teszik, miért nincs minden vállalatnak azonos kódja, tehát miért nem vihető át az egyik vállalatnál megtanult kód a másikhoz? Elsősorban, könnyen lehetséges, hogy ebben a kombinatorikai összefüggésben sok — egyformán jó — optimális kód létezik, de ahhoz, hogy valaki hasznos legyen egy vállalat számára, ismernie kell a helyes kódot. Ez a helyzet nagyon hasonlít azokhoz a koordinációs játékokhoz, amelyeket Schelling [8] oly erősen hangsúlyozott. Ha két ember számára fontos, hogy találkozzanak, bár utazásuk során nem tudnak egymással kommunikálni, akkor előre meg kell állapodniuk a találkozás helyében. Egy olyan személy azonban, aki megtanult, hozzászokott egy bizonyos találkozási helyhez, nem sok hasznára van egy olyan szervezetnek, amely egy másik helyet szokott választani.

Másodsorban a múlt is számít. A kódot rendszerint a vállalat létrehozásának időpontjában fennálló, legkedvezőbb várakozásoknak megfelelően határozzák meg. Minthogy a kód a vállalat része, vagy általánosabban, a vállalati tőke része, ahogy már megmutattuk, egy adott vállalat kódját időben csak lassan módosítják. Ezért a különböző időpontokban induló vállalatok kódja általában még akkor is különböző lesz, ha egymással versenyeznek. Valójában vállalatokat azonos időpontban indító egyéneknek is lehetnek különböző *a priori* eloszlásaik, s ezért különböző kódjaik.

A szervezeten belül kölcsönösen érthető kódok szükségessége megköveteli a résztvevők egységes magatartását. Az egyének azokra az információkra specializálódtak, amelyeket a kódok segítségével továbbítani tudnak; a már leírt folyamatban tehát többet tudnak saját tevékenységükről mint a többiekéről, és kevésbé hatékonyak

olyan információk megszerzésében és továbbításában, amelyek nem illeszkednek könnyen a használt kódba. Ezért maga a szervezet formálja tagjai magatartását.

E folyamatnak érdekes következményei lehetnek a szervezet viselkedésére vonatkozóan. Feltehetjük, hogy a szervezet kódját elsődleges céljai irányítják legerősebben. Egy szervezetnek azonban általában sok olyan célja van, amelyek az elsődlegesekhez képest valóban csak kiegészítő jellegűek, de a szervezet jóléte szempontjából fontosak. Vagy feltételezhetjük, hogy az elsődleges célokhoz a szervezet néhány másodlagos célját kívánatos hozzátenni, mert úgy tűnik, hogy ezek teljesítése kiegészíti az elsődleges célok teljesítését. Ha azonban az elsődleges célokhoz tartozó kód nem felel meg a kiegészítő, illetve a másodlagos céloknak, akkor lehetséges, hogy szervezet rosszul működik. Burton Klein így illusztrálta ezt: a hadsereg elsődleges célja nagy ember- és anyagtömegek koordinációja, olyan körülmények között, amikor a koordináció előzetesen megtervezett menetrend szerint folyik. A katonai fegyverek kutatása és fejlesztése — a jelenlegi korszakban — fontos kiegészítő szolgáltatás. Klein érvelése szerint az a tendencia érvényesül, hogy a kutatást olyan emberek irányítják, akik katonai fogalmakban gondolkodnak, s ezért elvárják, hogy az eredmények koordinációja a jövő előre meghatározható időpontjában következzék be. A kutatás és fejlesztés természetesen a legjobb példa a jelentős bizonytalansággal rendelkező információgyűjtésre, és biztos, hogy az eredmények nem határozhatók meg előre. Ennek az a következménye, — ahogy Summers [40] megmutatta —, hogy az előre pontosan lefektetett ütemezés és a költségelőirányzatok általában nem teljesülnek. A költségek végül sokkal magasabbak, mint akkor lettek volna, ha a bizonytalanságot eredetileg számításba vették volna. Azt a megoldást javasolja, hogy a katonai kutatást és fejlesztést vegyék ki a katonai ellenőrzés alól, és egy független polgári ügynökségnek adják át.

A létező szervezetek kiegészítő funkciókkal való ellátásának problémáit példázza az a tendencia, amelynek során a könyvelési és költségvetési osztályok feladatát vállalatirányítási (management control) funkciókkal egészítették ki. Minthogy a tudományos döntéshozás kvantitatív alapjai oly nagymértékben átfedik a klasszikus könyvelését, tetszetősnek tűnik a költségek csökkentése a két funkció összekapcsolása révén. Valójában azonban a célok jelentős mértékben különböznek, s ezért a kód és a szemlélet is különbözik. A könyvelő számára — akinek célja részben az, hogy a becstelenség ellen biztosítsa a céget — bizonyos adatok oly mértékű pontossága szükséges, ami szükségtelen a vezetéstudományhoz, ugyanakkor másfajta és durvább adatok nem érdekesek számára. A költségvetési irányítás szintén sok szempontból különbözik a tudományos vezetéstől, és a közigazgatás néhány tudósa nagyon kritizálja, hogy a korábbi Költségvetési Hivatalt (Bureau of Budget) nemrégiben vállalatirányítási funkciókkal egészítették ki.

E kommunikációs nehézségek miatt mind az állami, mind a magánszektorban kialakult egy tendencia, amely az összeegyeztethetetlen funkciókat új szervezetekbe helyezte át. Stigler [9] szuggesztíven mutatott rá a nagyvállalatok növekedését kísérő állandó vertikális bomlásra; a piaci erők kifizetődővé teszik a kiegészítő szolgálta-

tásokra való specializálódást. Úgy tűnik, hogy a kormányzásban Franklin D. Roosevelt volt az az újító, aki elsőként ismerte fel, hogy az új feladatokat még akkor is új hivatalokra kell bízni, ha azok valamiféle logika szerint egy létező minisztérium hatáskörébe tartoznának.

Térjünk vissza e tanulmány eredeti céljához, a szervezetek napirendjének meghatározásához. A szervezetek napirendjében bekövetkező változások lehetséges okai alapvetően azonosak az egyénekével: valamely megfigyelt területen olyan jelzést kaphatnak, amelynek alapján úgy ítélik meg, érdemes a területet aktívvá változtatni; a végső cselekvések eredménye vagy megváltozik, vagy észreveszik, hogy hirtelen változni fog; vagy egy elsődlegesen egy bizonyos célra használt információs csatorna váratlanul olyan jelzést ad, amely egy mindeddig passzív területen von akciót maga után. A szervezeteket úgy tárgyaltam, hogy lehetőség legyen figyelembe venni a szervezetek olyan specifikus költségtényezőit, amelyek befolyásolják a szervezetek napirendváltozásait. A költségek valóban sokféle módon növekedhetnek egy szervezetben. Pontosabban, egy szervezet inkább képes a megfigyelésre, és kevésbé képes a passzív magatartásból megfigyelői vagy aktív szerepre váltani.

Van egy olyan jelenség a szervezetek esetében, amelynek nincs megfelelője az egyéneknél. Az a tipikus, hogy a szervezet változó egyénekből áll. Bármely egyénnek általában sok hírközlési csatornához van kapcsolata, amelyek közül a szóban forgó konkrét szervezet csak az egyik. Például egy ilyen csatorna az oktatás. Így a szervezet jelentős mennyiségű olyan információ hasznát élvezi, amely számára ingyenes. Ha az ilyen információkból elegendő van, a szervezet magatartása még akkor is meg fog változni, ha a szervezet által használt kód az ilyen típusú információk belső átadását megdrágítja. Nevezetesen, új pontok jelennek meg a szervezet napirendjén. Ha úgy gondolunk az oktatásra, mint az új információk elsődleges forrására, akkor ezeket az információkat a szervezet legfiatalabb és legújabb tagjai viszik be a szervezetbe. Megvan tehát a lehetőségünk arra, hogy a szervezet napirendjének változását nemzedéki váltással idézzük elő.

AZ EXTERNALITÁSOK POLITIKÁJA; LEHETSÉGES KÖVETKEZTETÉSEK

Ha tekintetbe vesszük a termelő szervezetekben létező struktúrális és kommunikációs problémákat, akkor némi módosításra szorulnak a közgazdászok szokásos receptjei az externalitások melletti erőforrás-elosztással kapcsolatban. A napirendváltoztatás nehézségei megmagyarázhatják, hogy az állampolgárok és az érintett ipari érdekeltségek miért nem képesek felfogni azokat a javaslatokat, amelyek a közgazdász számára merő közhelynek számítanak. A jóléti közgazdász stratégiája az, hogy bünteti vagy jutalmazza a vállalatot externalitásaiért, a másokra gyakorolt — nem az árakban kifejeződő — hatásaiért. Egy ilyen politika azonban — ha szó szerint értelmezzük — aránytalan információs és szervezeti terheket róhat a vállalatokra.

Egy vállalatot úgy szerveznek meg, hogy specializálódjon a termékek egy konkrét halmazának gyártására, például az autógyártásra. A már leírt folyamatok szerint belső csatornái, ismeretei, tényleges napirendje erre és az ehhez kapcsolódó célokra (mint például piackutatásra és finanszírozásra) specializálódtak. Az autók hatása például a levegő minőségére vagy a városi forgalom torlódásaira a tudomány egy egészen más területéhez tartozik. Továbbá, ezek olyan tartományok, amelyek szerkezetükben nem hasonlíthatóak össze a mérhető teljesítményű tulajdonságokkal rendelkező és a jól definiált tulajdonjogokkal körülbástyázott anyagi javak termelésével és eladásával.

Tételezzük fel, hogy olyan állami politikát vezetnek be, amely szerint a levegőszennyezés és a forgalmi torlódás költségeit az autósnak kell viselnie. Természetes, hogy az autósnak az a képessége, hogy akcióinak ilyen jellegű hatásait felbecsülje, valószínűleg nagyon kicsi. Lehetséges, hogy a gyártók is megpróbálnak részt venni a játékban. Lehetséges, hogy olyan autótípusokat kínálnak, amelyek kisebbek vagy a forgalmi torlódásokat máshogyan csökkentik, illetve légszennyező anyagokat kevéssé bocsátanak ki. Valójában azonban az a képességük, hogy termelési döntéseik következményeit felmérjék, nekik sem túl nagy. Jól kifejlesztett belső kommunikációs csatornáik nagyon is más irányokban specializálódtak, s az új követelményekhez való alkalmazkodásuk költségei magasak. Ezek reális költségek, s ha egyszer felmerülnek, akkor versenykörülmények között át fogják hárítani őket a vásárlókra. Még valószínűbb, hogy ha elsődleges céljaik és struktúrájuk adott, akkor a vállalatok a legkevésbé meredek költséggörbe mentén alkalmazkodnak. A hirdetés az a folyamatos tevékenység, amely leginkább tartozik az externalitások problémájának körébe és az a legvalószínűbb, hogy a levegőszennyezés és forgalmi torlódás minimalizálásának problémáját kapcsolatszervezési (public relation) kérdésnek tekintik. Ha az autógyártók és -vásárlók számára egyaránt elég korlátozottak azok az információk, amelyek a termék természete és a hozzá kapcsolódó negatív externalitások közti kapcsolatról szól, akkor a hamis információszolgáltatás lehet a legolcsóbb megoldás — sokkal olcsóbb, mint az új információk beszerzése.

Lehetséges tehát, hogy a közvetlen adóztatásnak — az árban nem kifejeződő következmények egyszerű jóléti gazdaságtani megoldásának — a hatékonysága korlátozott; a szokásos elemzés elhanyagolja azokat a költségeket, amelyeket az új információs szükségletek hoznak létre. Ez az érvelés bizonyos fokig inkább érvényes rövid távra, mint hosszúra. Idővel mindenképpen létrehoznak új hírközlési csatornákat; minél hosszabb idő után teszik ezt meg, annál alacsonyabb lesz az externalitásokról szóló új információk megszerzésének költsége. Lehetséges azonban, hogy hosszú távon sem szűnnek meg azok a nehézségek, amelyek a gyártással és a bizonytalan és bonyolult külső hatásokkal egyaránt foglalkozó szervezetek működtetésével járnak.

Az externalitások szabályozása — talán éppen e megfontolások miatt — mind ez ideig nem a külső hatások árban való közvetlen kifejezésére épült. Ehelyett a közvetlen utasítások és a szabványelőírások formáját öltötte. Az egyes terméket és

szolgáltatások kibocsátási szabványait megállapítják; így például az ügyvédek és az orvosok is engedéllyel dolgoznak. Az irányítandó vállalat szempontjából a lényeges információkat sokkal kezelhetőbb formába hozzák. Az externalitások szabályozása egy a termék fizikai jellemzőihez hozzáadódó új dimenzió problémájává vált. A vállalat számára szükséges pótlólagos információ mennyiségileg nagyon korlátozott lett; az információs és kommunikációs szükségletek jellegükben azonosak azokkal a szükségletekkel, amelyek a szervezetet hatékonnyá teszik.

A specifikus szabványok alkalmazása természetesen egyaránt okozhat nyereséget és veszteséget. Ez esetben ugyanis az árrendszertől elméletileg elválaszthatatlan rugalmas reakciót feláldozzuk. A külső költségek kompenzációjának létezhetnek nagyon különböző, alkalmasabb formái is, mint a hagyományos módszer, de ezek az adott helyzetben korlátozottak. Bizonyos, hogy az irányítás merevsége, ami például megnyilvánul az építési szabályzatokban, nem biztató példa más területek számára. Az adott helyzetben egyszerűen nincs mód a következmények árban való kifejezése és az ennél sajátosabb szabályozási formák és engedélyezések közti választásra.

Mind ez ideig az externalitások termelőjének szóló jelzések helyességét tárgyaltuk. Ez azonban csak egy része az externalitásokkal kapcsolatos politika problémájának. Néhány szervezetnek — amelyekre általában „államigazgatásként" (goverment) hivatkoznak — a helyzettől függően alapvető adóztatási és árszabályozási döntéseket kell hoznia. A szokásos jóléti felfogás ezen államigazgatási hatóságok jóindulatát és hozzáértését magától értetődőnek tekinti. Ezt az álláspontot a *laissez-faire* olyan védői kritizálták, mint Demsetz [1], McKean és Minasian [4]. Az államigazgatás és bármely hozzá hasonló hatóság azonban szintén szervezet, amelynek információszerzési és hasznosítási kapacitása korlátozott. Azért nehéz egy lehetséges externalitást az államigazgatás napirendjére tűzni, mert ez megfigyelés kérdése. Még ha az elveket le is fektették, lehetséges, hogy a változó körülmények vagy változó információk alapján hozott új döntések mechanizmusának lehetőségei korlátozottak. A szabályozó szervezetek története — egészében — nem biztató.

A probléma az, hogy hogyan tervezzék meg úgy az állami szervezeteket, hogy azok lemásolják a piaci rendszer eszményét. Az e témát kutatók a kereslet erőit elválasztják a kínálattól, azzal az alkalmas indokkal, hogy információs szerkezetük nagyon különböző. Általános egyensúlyi modelljeinkben végül is össze kell egyeztetnünk ezeket az erőket; elemzésünknek ebben a szakaszában az alkuban résztvevők kényelmetlen módszereit vesszük igénybe, akik úgy igazítják az árakat, hogy elérjék a kereslet és kínálat egyenlőségét. Ezzel párhuzamos forma található a jogi rendszerben. A felperesnek és az alperesnek különböznek az érdekei és az információs csatornái. A perrendszer szokásos elmélete szerint mindkét fél leginkább arra képes és arra késztetett, hogy ne teljes képet, hanem a szempontjából leghasznosabb információkat terjessze elő. A bíróság ekkor csak a felek által rendelkezésére bocsátott információkat használja fel az ítélet meghozatalában. A döntések tehát három — információs szempontból eltérően specializált — szervezettől származnak.

Véleményem szerint ez az analógia megfelelő az externalitások vizsgálatához. Ha egyszer egy externalitást felismertek, akkor két, egymástól annyira különálló állami szervezetre van szükség, mint amennyire az ügyészség és a bíróság áll külön. Az egyiknek kritikai szerepe van — megállapítja az externalitások társadalmi költségét és orvosságot javasol ellenük, akár különféle adókat vagy árakat, akár előírásokat. Ha céljai jól meghatározottak, képesnek kell lennie arra, hogy információs csatornáit megfelelően szerkessze meg. Nincs okunk arra, hogy az externalitások álpiacán a költségek vonatkozásában monopóliumot adjunk egy ilyen ügynökség számára. Nagyon is kívánatos, hogy állampolgárok csoportjai, magánalapítványok, más államigazgatási ügynökségek és hasonló szervezetek is nyújtsanak be jegyzékeket különféle externalitásokról, azok költségeiről és szabályozásuk módjáról.

A végső döntéseket a „kvázi" bírói ügynökségeknek kell meghozni. Ezek olyan formában ismerik meg az ügyeket, ahogy azt a felperes — akár hivatalosan kinevezett ügynökség, akár önkéntesek szervezete — és az ügy által érintett vállalat előadja. Egy bizonyos idő múlva ki kell alakulniuk az arra vonatkozó szabályoknak, hogy milyen formában fogadják el a bizonyítékokat. Ez részben a cost-benefit (költség—haszon) elemzés jelenlegi gyakorlatának kodifikálása lesz. Ahogy az ideális piacnak vagy a bírói testületnek, úgy az információs feladatoknak is megfelelő specializációjuk lesz.

Hogy teljesen világos legyek, *nem* értek egyet azzal az általános véleménnyel, hogy az externalitások a polgári jog szokásos eljárásaival kezelhetők. Egy ilyen eljárás során minden egyes externalitás egy különálló ügy tárgya. Ez az eljárás az információ szempontjából módfelett gazdaságtalannak tűnik. Alapjában a már ismert érveket kell használnom; vagy óriási mértékű lesz az ismétlés, vagy pedig nem lesz kifizetődő a költséges információkat minden egyes esetre összegyűjteni, így az egyes ügyekben hozott döntés nem lesz korrekt. Ehelyett azt javaslom, hogy a jogi módszert a sok egyedi eset kezelésében követendő általános szabályok megállapításához használják, például egy adókulcs megállapításához. Az intézkedéseket, ahogy a körülmények változnak, természetesen időről időre felül kell vizsgálni, éppúgy ahogy az idő folyamán az árak is változnak. Tanulmányomban annak belátására törekedtem, hogy a külső költségeket értékelő eljárások kialakításában szükség van az információ gazdaságtanára.

IRODALOM

[1] *Demsetz, H.:* Information and Efficiency: Another Viewpoint. Journal of Law and Economics, 1969. 12. 1—22. old.

[2] *Jorgenson, D. W.—McCall, J. J.—Radner, R.:* Optional Replacement Policy. Rand McNally, Chicago, 1967.

[3] *Marschak, J.:* Remarks on the Economics of Information. A Contribution to Scientific Research in Mangement c. kötetben. Western Data Processing Centre, University of California, Los Angeles, 1959. 79—98. old.

[4] *McKean, R.—Minasian, J. R.:* On Achieving Pareto Optimality Regardless of Cost. Western Economic Journal, 1966. 51. 14—23. old.

[5] *Miller, G. A.:* The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Information. Psychological Review, 1956. 63. 81—97. old.

[6] *Radner, R.:* Competitive Equilibrium under Uncertainty. Econometrica, 1968. 36. 31—58. old.

[7] *Raiffa, H.* és *Schlaifer, R.:* Applied Statistical Decision Theory. Graduate School of Business Administration, Harvard University Press, Boston 1961.

[8] *Schelling, T.:* The Strategy Cambridge of Conflict Mass: Harvard University Press, 1960.

[9] *Stigler, G. J.:* The Division of Labour is Limited by the Extent of the Market. Journal of Political Economy, 59. 1951. 185—193. old.

[10] *Summers R.:* Cost Estimates as Predictors of Actual Cost: a Statistical Study of Military Development, 4. fejezet a *Marschak, T. Glennean, T. K.,* és *Summers, R.* (szerk.): Strategy for R. and D. Studies in the Microeconomics of Development c. kötetben. Springer, New York. 1967. 140—189. old.

Arrow műveinek bibliográfiája időrendi sorrendben

1949

1. On the Use of Winds in Flight Planning. Journal of Meteorology. 6. 150—159. old.
2. (Társszerző: *D. Blackwell—M. A. Girschick*). Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems. Econometrica 17. 213—244. old.

1950

3. Homogeneous Systems in Mathematical Economics: a Comment. Econometrica 18. 60—62. old.
4. A Difficulty in the Concept of Social Welfare. Journal of Political Economy 58. 328—346. old.

1951

5. Social Choice and Individual Values. New York, Wiley.
6. Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case. Megjelent: *T. C. Koopmans* (szerk.): Activity Analysis of Production and Allocation c. kötetben. New York, Wiley, 9. fejezet.
7. (Társszerző: *T. E. Harris—J. Marschak.*) Optimal Inventory Policy. Econometrica 19. 250—272. old.
8. Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations. Econometrica 19. 404—437. old.
9. Little's Critique of Welfare Economics. American Economic Review 41. 923—934. old.
10. Mathematical Models in the Social Sciences. Megjelent: *D. Lerner—H. D. Lasswell* (szerk.): The Policy Sciences c. kötetben, Stanford, Calif., Stanford University Press, 129—154. old.

11. An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics. Megjelent: *J. Neyman* (szerk.): Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability c. kötetben, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 507—532. old.

1952

12. The Determination of Many-Commodity Preference Scales by Two-Commodity Comparisons. Metroeconomica IV. 107—115. old.
13. Le principe de rationalité dans les choix collectifs. Economie Appliquée. V. 469—484. old.

1953

14. Le rôle des valeurs boursières pour la repartition la meilleure des risques, Économetrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Vol. XI. 41—47. old.
15. (Társszerző: *E. W. Barankin—D. Blackwell.*) Admissible Points of Convex Sets. Contributions to the Theory of Games, II. Princeton, Princeton University Press, 87—91. old.

1954

16. (Társszerző: *G. Debreu.*) Existence of Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica 22. 265—290. old.
17. Import Substitution in Leontief Models. Econometrica 22. 491—492. old.

1956

18. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Reduction of Constrained Maxima to Saddle-Point Problems. Megjelent: *J. Neyman* (szerk.): Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability c. kötetben. Vol. V. 1—20. old.
19. (Társszerző: *A. C. Enthoven.*) A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium. Econometrica 24. 288—293. old.

1957

20. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Gradient methods for constrained maxima. Operations Research, 5. 258—265. old.
21. Statistics and Economic Policy. Econometrica 25. 523—531. old.
22. Decision Theory and Operations Research. Operations Research, 5. 765—774. old.

1958

23. Utilities, Choices, Attitudes: a Review Note. Econometrica 26. 1—23. old.
24. Tinbergen on Economic Policy. Journal of the American Statistical Association. 53. 89—97. old.
25. (Társszerző: *S. Karlin—H. Scarf.*) Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford, Stanford University Press.
26. The Measurement of Price Changes. Megjelent: *Joint Economic Commitee,* The Relationship of Prices to Economic Stability and Growth. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 77—88. old.
27. (Társszerző: *M. Nerlove.*) A Note on Expectations and Stability. Econometrica 26. 297—305. old.
28. (Társszerző: *A. Alchian* and *W. M. Capron.*) An Economic Analysis of the Market for Scientists and Engineers. RM 2190—RC, The RAND Corporation, Santa Monica, California.
29. (Társszerző: *M. McManus.*) A Note on Dynamic Stability. Econometrica 26. 448—454. old.
30. (Társszerző: *L. Hurwicz—H. Uzawa.*) Studies in Linear and Non-Linear Programming. Stanford; Stanford University Press.
31. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) On the Stability of the Competitive Equilibrium, I. Econometrica 26. 522—552. old.

1959

32. Toward a Theory of Price Adjustment. Megjelent: *M. Abramovitz* és mások: The Allocation of Resources c. kötetben. Stanford, Stanford University Press, 41—51. old.
33. (Társszerző: *W. M. Capron.*) Dynamic Shortages and Price Rises: The Engineer-Scientist Case. Quarterly Journal of Economics 63. 292—308. old.
34. Rational Choice Functions and Orderings. Economica, N. S. 26. 121—127. old.

35. (Társszerző: *M. Hoffenberg,* munkatárs: *H. Markowitz* és *R. Shephard*) A Time Series Analysis of Interindustry Demands. Amsterdam, North Holland Publishing Co.
36. (Társszerző: *H. D. Block—L. Hurwicz*) On the Stability of the Competitive Equilibrium, II. Econometrica, 27. 82—109. old.
37. Functions of a Theory of Behavior under Uncertainty. Metroeconomica 11. 12—20. old.

1960

38. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Competitive Stability under Weak Cross Substitutability: The „Euclidean Distance" Approach. International Economic Review 1. 38—49. old.
39. Optimalization, Decentralization, and Internal Pricing in Business Firms. Megjelent: Contributions to Scientific Research in Management c. kötetben. Western Data Processing Center, Graduate School of Business Administration, University of California, Los Angeles, 9—18. old.
40. Decision Theory and the Choice of a Level of Significance for the t-test. Megjelent: *I. Olkin* és mások (szerk.): Contributions to Probability and Statistics c. kötetben. Stanford, Stanford University Press. 70—78. old.
41. The Work of Ragnar Frisch, Econometrician. Econometrica 28. 175—192. old.
42. Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. Megjelent: *K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes* (szerk.): Mathematical Methods in the Social Sciences c. kötetben, 1959. Stanford, Stanford University Press, 3—16. old.
43. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Decentralization and Computation in Resource Allocation. Megjelent: *R. W. Pfouts* (szerk.): Essays in Economics and Econometrics c. kötetben. Chapel Hill, University of North Carolina Press, 34—104. old.
44. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Stability of the Gradient Process in *n*-person Games. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 8. 280—294. old.
45. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Some Remarks on the Equilibria of Economic Systems. Econometrica 28. 640—646. old.

1961

46. Does the Majority Ever Rule? Introductory Notes. Portfolio and Art News Annual 4. 76—78. old.

47. Additive Logarithmic Demand Functions and the Slutsky Relations. Review of Economic Studies 28. 176—181. old.
48. (Társszerző: *H. B. Chenery—B. Minhas—R. M. Solow.*) Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. Review of Economics and Statistics. 43. 225—250. old.
49. (Társszerző: *L. Hurwicz—H. Uzawa.*) Constraint Qualifications in Maximization Problems. Naval Research Logistics Quarterly 8. 175—191. old.
50. (Társszerző: *A. C. Enthoven.*) Quasi-Concave Programming. Econometrica 29. 779—800. old.

1962

51. Case Studies: Comment. Megjelent: National Bureau of Economic Research. The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors c. kötetben. Princeton, Princeton University Press.
52. Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention. Megjelent a fenti kötetben, 609—625. old.
53. Optimal Capital Adjustment. Megjelent *K. J. Arrow—S. Karlin—H. Scarf* (szerk.): Studies in Applied Probability and Management Science c. kötetben. Stanford, Stanford University Press, 1—17. old.
54. (Társszerző: *M. Nerlove.*) Optimal Advertising Policy under Dynamic Conditions. Economica, N. S., 29. 129—142. old.
55. The Economic Implications of Learning by Doing. Review of Economic Studies, 29. 155—173. old.
56. (Társszerző: *L. Hurwicz.*) Competitive Stability under Weak Gross Substitutability: Nonlinear Price Adjustment and Adaptive Expectations. International Economic Review, 3. 233—255. old.

1963

57. Conference Remarks. Megjelent: *M. Astrachan—A. S. Chan* (szerk.): Proceedings of RAND's Demand Prediction Conference. January 25—26, 1962. Santa Monica, California, The RAND Corporation. RM—3358—PR. 125—134. old.
58. Utility and Expectation in Economic Behavior. Megjelent *S. Koch* (szerk.): Psychology: A Study of a Science. Vol. 6, New York, McGraw-Hill, 724—752. old.
59. The Economic Cost to Western Europe of Restricted Availability of Oil Imports: a Linear Programming Computation. Appendix *D.* Meg-

jelent: *H. Lubell,* Middle East Oil Crises and Western Europe's Energy Supplies c. kötetben. Baltimore, Md., Johns Hopkins Press, 214—220. old.

60. Comment on Duesenberry's "The Portfolio Approach to the Demand for Money and Other Assets" Review of Economics and Statistics 45, Supplement. 24—27. old.
61. Social Choice and Individual Values. 2. kiadás, New York, Wiley.
62. Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care. American Economic Review 53. 941—973. old.

1963/1964

63. Control in Large Organizations. Management Science 10. 397—408. old.

1964

64. Optimal Capital Policy, the Cost of Capital, and Myopic Decision Rules. Annals of the Institute of Statistical Mathematics 16. 21—30. old.
65. Research in Management Controls: a Critical Synthesis. Megjelent: *C. P. Bonini—R. K. Jaedicke—H. M. Wagner:* Management Controls: New Directions in Basic Research c. kötetben. New York, McGraw-Hill, 17. fejezet 317—327. old.

1965

66. Connaissance, Productivité et Pratique. Bulletin SEDEIS, Étude No. 909 Supplement.
67. Statistical Requirements for Greek Economic Planning. Athens, Greece: Center of Planning and Economic Research, Lecture Series No. 18.
68. Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care: Reply (The Implications of Transaction Costs and Adjustment Lags). American Economic Review, 55. 154—158. old.
69. Criteria for Social Investment. Water Resources Research 1. 1—8. old.
70. Aspects of the Theory of Risk-Bearing. Helsinki, Finnland, Yrjő Jahns sonin säätiő.
71. The Economic Context. Megjelent: *S. T. Donner:* The Future of Commercial Television c. kötetben. 1965—1975. (magánkiadás). 116—139. old.

1966

72. Discounting and Public Investment Criteria. Megjelent: *A. V. Kneese—S. C Smith* (szerk): Water Research, Baltimore, Johns Hopkins Press, 13—32 old.

1967

73. Values and Collective Decision-Making. Megjelent: *P. Laslett—W. G. Runciman* (szerk.): Philosophy, Politics and Society, Third Series. Oxford, Basil Blackwell, 10. rész. 215—232. old.
74. The Place of Moral Obligation in Preference Systems. Megjelent: *S. Hook* (szerk.): Human Values and Economic Policy c. kötetben, New York, New York Univ. Press. Part II. 3. 117—119. old.
75. Samuelson collected. Journal of Political Economy. 85 506—513. old.

1968

76. Economic Equilibrium. Megjelent: International Encyclopedia of The Social Sciences c. kötetben. Macmillan and the Free Press, Vol. 4, 376—386. old.
77. Meyer A. Girshick. Megjelent: International Encyclopedia of the Social Sciences c. kötetben. Macmillan and the Free Press, Vol. 6. 191—193. old.
78. The Economics of Moral Hazard: Further Comment. American Economic Review. 58. 537—539. old.
79. (Archen Minsol néven, együtt: *H. B. Chenery—B. S. Minhas—R. M. Solow*) Some Tests of the International Comparisons of Factor Efficiency with the CES Production Function: a Reply. Review of Economics and Statistics 50, 477—479. old.
80. Optimal Capital Policy with Irreversible Investment. Megjelent: *J. N. Wolfe* (szerk.): Value, Capital, and Growth c. kötetben. Edinburgh, Edinburgh University Press, 1—20. old.
81. Applications of Control Theory to Economic Growth. Megjelent: American Mathematical Society, Mathematics of the Decision Sciences. Part 2. Providence, American Mathematical Society, 85—119. old.

1969

82. Classificatory Notes on the Production and Transmission of Technological Knowledge. American Economic Review Papers and Proceedings 59. 29—35. old.
83. The Organization of Economic Activity: Issues Pertinent to the Choice of Market Versus Nonmarket Allocation. Megjelent: Joint Economic Committee, U. S. Congress, The Analysis and Evaluation of Public Expenditures: The PPB System. Vol. 1. 47—66. old.
84. (Társszerző: *M. Kurz*) Optimal Consumer Allocation Over an Infinite Horizon. Journal of Economic Theory 1. 68—91. old.
85. Tullock and an Existence Theorem. Public Choice VI. 105—112. old.
86. (Társszerző: *M. Kurz*) Optimal Public Investment Policy and Controllability with Fixed Private Savings Ratio. Journal of Economic Theory 1. 141—177. old.
87. (Társszerző: *D. Levhari*). Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment. Economic Journal 79. 560—566. old.
88. The Social Discount Rate. Megjelent: *G. G. Somers—W. D. Wood* (szerk.): Cost-Benefit Analysis of Manpower Policies c. kötetben. Kingston, Ontario: Industrial Relations Centre, Queen's University.

1970

89. The Effects of the Price System and Market on Urban Economic Development. Megjelent: *K. J. Arrow* és mások: Urban Process as Viewed by the Social Sciences c. kötetben. Washington, D. C.: The Urban Institute. 11—20. old.
90. (Társszerző: *M. Kurz*) Optimal Growth with Irreversible Investment in a Ramsey Model. Econometrica 38. 331—344. old.
91. New Ideas in Pure Theory: Discussion. American Economic Review Papers and Proceedings 60. 462—463. old.
92. (Társszerző: *R. C. Lind*) Uncertainty and the Evaluation of Public Investment Decisions. American Economic Review 60. 364—378. old.
93. Criteria, Institutions, and Function in Urban Development Decisions. Megjelent: *A. H. Pascal* (szerk.): Thinking About Cities c. kötetben. Belmont, California, Dickenson.
94. (Társszerző: *M. Kurz*) Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. Baltimore and London, The Johns Hopkins Press.

95. Induced Technical Change and Patterns of International Trade: Comment. Megjelent: *R. Vernon* (szerk.): The Technology Factor in International Trade c. kötetben. New York, National Bureau of Economic Research. 128—132. old.

1971

96. Essays in the Theory of Risk-Bearing. Chicago, Markham, Amsterdam, London, North-Holland, 278. old.
97. The Firm in General Equilibrium Theory. Megjelent: *R. Marris—A. Wood.* (szerk.): The Corporate Economy: Growth, Competition, and Innovative Potential c. kötetben. London, Macmillan, and Cambridge, Mass., Harvard University Press, 68—110. old.
98. A Utilitarian Approach to the Concept of Equality in Public Expenditures. Quarterly Journal of Economics 85. 409—415. old.
99. (Társszerző: *F. H. Hahn*) General Competitive Analysis. San Francisco—Holden-Day—Edinburgh, Oliver and Boyd.

1972

100. (Társszerző: *L. Hurwicz*) An Optimality Criterion for Decision-Making under Ignorance. Megjelent: *C. F. Carter—J. L. Ford* (szerk.): Uncertainty and Expectations in Economics: Essays in Honour of G. L. S. Shackle c. kötetben, Oxford, Basil Blackwell, 1—11. old.
101. (Társszerző: *R. C. Lind*) Uncertainty and the Evaluation of Public Investment Decisions: Reply. American Economic Review 62. 171—172. old.
102. Problems of Resource Allocation in United States Medical Care. Megjelent: *R. M. Kunz—H. Fehr* (szerk.): The Challenge of Life c. kötetben. Basel and Stuttgart, Birkhäuser, 392—408. old.
103. Models of Job Discrimination. Megjelent: *A. H. Pascal* (szerk.): Racial Discrimination in Economic Life c. kötetben. Lexington, Mass., Toronto, London, D. C. Heath. 2. fejezet, 83—102. old.
104. Some Mathematical Models of Race in the Labor Market. Megjelent: *A. H. Pascal* (szerk.): im. 6. fejezet, 187—204. old.
105. Gifts and Exchanges. Philosophy and Public Affairs 1. 343—362. old.
106. (Társszerző: *D. Levhari—E. Sheshinski*) A Production Function for the Repairman Problem. Review of Economic Studies 39. 241—249. old.

1973

107. Some Ordinalist-Utilitarian Notes on Rawls's Theory of Justice. Journal of Philosophy 70. 245—263. old.
108. (Társszerző: *D. Starrett*) Cost- and Demand-Theoretical Approaches to the Theory of Price Determination. Megjelent: *J. R. Hicks—W. Weber* (szerk.): Carl Menger and the Austrian School of Economics c. kötetben. Oxford, The Clarendon Press. 7. fejezet, 129—148. old.
109. Higher Education as a Filter. Journal of Public Economics 2. 193—216. old.
110. General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Techniques, Collective Choice. Megjelent: Les Prix Nobel en 1972. Stockholm, The Nobel Foundation. 206—231. old.
111. Social Responsibility and Economic Efficiency. Public Policy 21. 303—318. old.
112. Formal Theories of Social Welfare. Megjelent: *P. P. Wiener* (szerk.): Dictionary of the History of Ideas. New York, Scribner. Volume IV. 276—284. old.
113. Information and Economic Behavior. Stockholm, Federation of Swedish Industries, (Lecture).
114. The Theory of Discrimination. Megjelent: *O. Ashenfelter—A. Rees* (szerk.): Discrimination in Labor Markets c. kötetben. Princeton, N. J., Princeton University Press. 3—33. old.
115. Társszerző: *F. J. Gould—S. M. Howe:* A General Saddle Point Result for Constrained Optimalization. Mathematical Programming 5. 225—234. old.

1974

116. The Measurement of Real Value Added. Megjelent: *P. A. David—M. W. Reder* (szerk.): Nations and Households in Economic Growth c. kötetben. New York—London, Academic Press. 3—19. old.
117. Stability Independent of Adjustment Speed. Megjelent: *G. Horwich—P. A. Samuelson* (szerk.): Trade, Stability, and Macroeconomics c. kötetben. New York—London, Academic Press. 181—202. old.
118. Capitalism, for Better or Worse. Megjelent: *L. Silk* (szerk.): Capitalism: The Moving Target c. kötetben. New York, Quadrangle/New York Times Company, 105—113. old.
119. The Limits of Organization. New York, W. W. Norton.
120. Unbounded Utility Functions in Expected Utility Maximization: Response. Quarterly Journal of Economics 88. 136—138. old.

121. Rawl's Principle of Just Saving. Swedish Journal of Economics 75. 323—335. old.
122. Limited Knowledge and Economic Analysis. American Economic Review 64. 1—10. old.
123. Optimal Insurance and Generalized Deductibles. Scandinavian Actuarial Journal 1974. 1—42. old.
124. (Társszerző: *A. C. Fisher*) Environmental Preservation, Uncertainty, and Irreversibility. Quarterly Journal of Economics 88. 312—319. old.
125. On the Agenda of Organizations. Megjelent: *R. Marris* (szerk.): The Corporate Society. New York and Toronto, Wiley. 214—234. old.
126. The Combination of Time Series and Cross-Section Data in Interindustry Flow Analysis. European Economic Review 5. 25—32. old.
127. Taxation and Democratic Values. The New Republic 1971. No. 18, 2 November. 23—25. old.
128. Government Decision Making and the Preciousness of Human Life. Megjelent: *L. R. Tancredi* (szerk.): Ethics of Health Care c. kötetben. Washington, D. C., National Academy of Sciences, II. fejezet, 33—47. old.

1975

129. Climatic Impact Committee of the National Research Council, National Academy of Sciences, National Academy of Engineering tagjaként: Environmental Impact of Stratospheric Flight, Washington
130. Vertical Integration and Communication. The Bell Journal of Economics c. kötetben. 173—183. old.
131. Thorstein Veblen as an Economics Theorist. The American Economist 19. 5—9. old.

85,— Ft

K. J. Arrow 1972-ben az angol Sir John R. Hicksszel együtt nyerte el a közgazdasági Nobeldíjat az általános egyensúlyelmélet és a jóléti közgazdaságtan területén végzett kutatásaiért.

A kötet összeállítója, Kornai János arra törekedett, hogy az olvasó megismerje Arrow több mint negyedszázados tevékenységének sokoldalúságát, kiemelve valamennyi alkotói korszakából a legjelentősebb, a közgazdasági irodalomban is úttörő szerepet játszó tanulmányokat. Ilyen volt az 1951-ben publikált, optimális készletpolitikáról szóló mű, továbbá 1954-ben írt tanulmánya, amely a modern általános egyensúlyelméleti modellek elindítója. A hatvanas évek elejéről származik az a cikk, amelyben szerzőtársaival az ún. CES-függvényt ismertette. Ennek a függvénynek a felállítása, a hozzá kapcsolódó számítási anyag bemutatása és részletes elemzése jelentősen hozzájárult a közgazdaságtanban kiemelkedő szerepet játszó termelési függvények elméletéhez. 1973-ban jelent meg a felsőoktatás rostáló szerepéről írott tanulmány, amely újszerűsége, eredeti problémafelvetése és matematikai modellezése alapján jogosan került a válogatásba csakúgy, mint az információ gazdasági életben betöltött szerepéről készített művek. A hazai közgazdászok számára különösen hasznosak a piac működését magyarázó tanulmányok, amelyek részletesen elemzik a versenyhelyzet jellemzőit. Ugyancsak újszerű gondolatokkal gazdagodhat az olvasó a társadalmi diszkontrátáról, a „jelen-jövő" tehermegosztásáról szóló cikkekből, amelyek a tervezéselméleti kérdésekhez is értékes adalékot nyújtanak.

Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó